中等學校教科適用

二B平面三角學

王允中譯

A Translation from

G. N. Bauer and W. E. Brooke's

"Plane Trigonometry"

[illegible]

二B平面三角學

王允中譯

A Translation from

G. N. Bauer and W. E. Brooke's

"Plane Trigonometry"

開明書店

二 B 平面三角學

每册售價人民幣9,000元　　丙(皮4122)

譯者	王　尤　中
出版者	開明書店 (北京西總布胡同甲50)
發行者	三聯·中華·商務·開明·聯營 聯合組織 中國圖書發行公司 (北京絨線胡同63—67號)
印刷者	華文印刷局 (上海濟寧路143弄4號)

1941年12月一版　　119P　32K
1951年3月十六版(滬1—5000)

序

近來中等學校中最流行的三角學教本,爲 Granville, Smith, Mikesh 三氏所著之 Plane Trigonometry, 即一般所稱之"葛氏平面三角學". 該書程度之深淺與教材之選擇,均甚得當,惟條理清晰與剖析精到,則猶不及 Bauer 與 Brooke 兩氏所著之 Plane and Spherical Trigonometry 甚多. 葛氏三角之缺點在教材的編排過於零亂,僅就每章而論也往往沒有一個共通中心. 例如牠特地把直角三角形的解法與斜三角形的解法,錯綜地編入應用與對數的理論及用途兩章之中,這在作者也許是要增加讀者復習的機會,然其結果,反使讀者迷亂恍惚,而不得要領. 即如以應用一章而論,其中竟包括近似數計算,直角三角形解法,斜三角形解法,半角等項目,而關於半角一項教材,則又於三角的解析一章中再爲申述,徒見多事. 蓋科學的敍述貴層次分明,不若文藝作品之須曲折有致也.又葛氏書中關於對數部分之過分強調,亦所不取. 對數在三角學中之重要,自不待言,然此僅謂其便於作冗長之數値計算,至其與三角學本身之理解,則並無絲毫關係.且學習三角學之讀者,早經於代數學中習得對數之

知識，對於此項計算工具之使用，縱須稍加溫習，但絕無強調之必要。

準此以觀 Bauer 與 Brooke 兩氏的三角學，將見其具有葛氏等之長，而無葛氏等之短．此或如原序中所謂"由於教室之經驗而作種種之訂正及改編"之故。本書之內容及程度，與葛氏等之著作並無多大出入，而篇幅亦大致相等，然在編制方面則較有嚴密的層次，但這並非牠的特點．其重要特色在演算上採用圖解式之計算輪廓，這至少具有 (1) 節省時間，(2) 易於檢算，(3) 免除錯誤等三種優點．本書對於對數的安排，亦頗得當，卽把牠列於最後一章，如是則可使一般讀者能集中注意於三角學本身之研習，而不致分心；卽有一二對於對數較為生疏之讀者，亦可提前補習，蓋此與三角學之學習順序並無妨礙也．此外書中又隨處插入種種有價值的提示，足以指引讀者解除不自知的迷惑，也極難能可貴．

譯者王允中先生任中等學校數理教師多年，故能獨具隻眼，將此書之平面部分譯出，定名為"二 B 平面三角學"，交由開明書店印行，其對於我國數學教學上之貢獻，當非淺顯．筆者以職務關係，得與本書校讀之役，書成之日，爰識其感想如此。

一九四〇，一二，三。

顧均正

原　　序

（第　三　版）

由於教室之經驗，本版已作種種之訂正及改編，並增加若干新的材料．

直角三角形一章，附有自然三角函數之四位數值表，舉凡該章所有之習題，皆可應用該表解之．此使學者可專注於三角學之原理，而不必着重繁複之數值計算．該章原不需用對數，然在已熟習對數者，自不妨用之．爲此之故，其所列例題之計算輪廓，將自然函數及對數函數一併列出．此外更加入一節，用以說明直角三角形當斜邊及其他各邊爲有理數時如何解出之方法．

對數一章，祇就用於初等三角學解出問題之各方面而論述之．

於若干情形中，對於某種基本公式曾導入交替證法，此種交替證法全以幾何圖示爲基礎．

三角函數圖都以圖示法作成，與以前所用者相同．而正弦及餘切曲線，則按射影方法爲之．

論述三角恆等式時，增以若干圖形，俾說明每個三角函數如何用其他三角函數表出之．此法同時亦用以使每個反

三角函數以其他反三角函數表出,此即明白指出反三角函數間之各個關係式並非具有恆等式之性質.

代莫伏爾定理一章,曾導入關於複素數之四種基本運算的圖示法,故已稍形擴大.

為實際應用上需要起見,故新增一節,以說明如何可化 $A\sin\theta+B\cos\theta$ 為 $C\sin(\theta+\phi)$ 之形式.

通編所增加之許多例題,其目的在使全書更為明晰,此亦依經驗之指示也.

凡三角學教師曾給以優良建議者,著者深致感謝!並將其優良建議一一納諸本書之中.

一九三二年一月 G. N. B.
W. E. B

原書附錄之對數表,卷帙幾與正文相等,茲特於不妨礙應用之範圍內刪存四位對數表兩種,以節省篇幅,而減輕讀者負擔.希採用本書者注意.

開明書店編譯所附誌

目　次

第一章　正坐標及角

正　坐　標

角

第二章　三角函數

第三章 直角三角形

第四章 三角函數之變化

$n\,90°\pm\alpha$ 函數之簡化

第五章 基本關係 線值

基本關係

線值

第六章　二角之和之函數

二倍角　半角

第七章　反三角函數

第八章　斜三角形

第九章 代莫伏爾定理及其應用

第十章 對數

二B平面三角學

第　一　章

正　坐　標　及　角

1. **發明史**　三角學之行於世,在基督耶穌降生以前.約在紀元前 150 年,有一天文家曰希巴諸斯(Hipparchus)發明三角學,希氏及其生徒之所以從事研究三角學,純以三角學可作天文學上之助力.

至十五世紀中葉,三角學有長足之進步.此時已有關於平球面三角形解法之論文;然歷三百餘年而至今日,方具現代規模之三角學.

三角學(Trigonometry)之得名,須遠溯至約 1600 年,此字係由二希臘字三角形(τρίγωνον)及量度(μετρία)衍化而得.按其字之蘊義,三角學原以論述三角形之解法爲主.卽在今日,此仍爲三角學中一個重要部分,但三角學之範圍業已大爲擴充.今日而論三角學,幾成數學分析科目中之不可缺少者,亦且對於不少的近代問題,莫不應用三角學而得解決.故讀三角學者,不但須論述三角形之解法,亦且須論及無數之其他問題.

三角學以數個基本定義爲其基礎．故在未論此等基本定義前，先將方向線及角詳盡討論之．

正　坐　標

2.　方向線(Directed lines)　對於每一直線，吾人可任意指定其爲正方向及負方向．

若自 A 至 C 之方向爲正，則其反方向自 C 至 A 爲負．

若令文字之順序表線分度量之方向，則顯見 AC 與 CA 代表異方向之同一線分；是以

$$AC=-CA \text{ 或 } -AC=CA.$$

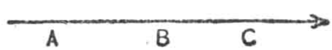
又若 B 爲線上之第三點，則 AB 及 BA 二線分之符號相反；同樣 BC 及 CB 二線分之符號亦相反．是以

$$AB=-BA \text{ 或 } -AB=BA,$$

及

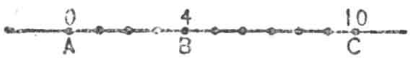
$$BC=-CB \text{ 或 } -BC=CB.$$

於是就線上 A, B, C 之一切位置而論，得知



$$AC=AB+BC.$$

如是就下列各圖而論：



$$AC=AB+BC$$
$$10=4+6=10$$

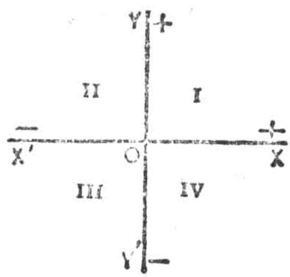
$$AC=AB+BC$$
$$5=8+(-3)=5$$

$$AC = AB + BC$$
$$-12 = -8 + (-4) = -12$$

$$AC = AB + BC$$
$$4 = -6 + 10 = 4$$

3. **參考線**(Lines of reference)　互相垂直之二有向直線,可取作參考線或參考軸. 通常以 $X'X$ 及 $Y'Y$ 表出之,並分別稱之曰 X 軸及 Y 軸.

在 X 軸上,凡自左至右者為正,自右至左者為負.



在 Y 軸上,凡向上方者為正,向下方者為負.

二軸之交點稱曰原點 Origin). 為便利計,以原點為度量距離之出發點.

4. **象限** (Quadrants)　相交之二軸分平面為四部分,稱曰象限,並以數記出之. 第一象限以 XOY 表出之,第二象限以 $Y'OX'$ 表出之,第三象限以 $X'OY'$ 表出之,而第四象限以 $Y'OX$ 表出之.

5. **一點之坐標**　自平面上任一所設點 P_1, 作一直線平行於 Y 軸而與 X 軸相交於 A 點.

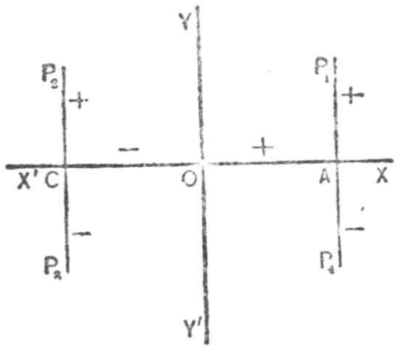
於是原點與交點間之距離, OA, 為所設點 P_1 之橫坐標 (Abscissa).

交點與所設點間之距離, AP_1, 為所設點 P_1 之縱坐標 Ordinate).

P_2 點之橫坐標及縱坐標各為 OC 及 CP_2.

P_3 點之橫坐標及縱坐標各為 OC 及 CP_3.

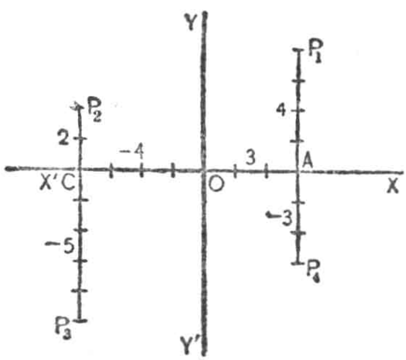
P_4 點之橫坐標及縱坐標各為 OA 及 AP_4.



一點之橫坐標及縱坐標稱為該點之坐標(Coördinates of the point).

選取一適當單位以測量距離，則平面上之任何點可用二個坐標以定其位.

例如，在左圖中，P_1 之橫坐標為 3，而其縱坐標為 4，此二個坐標可以完全決定 P_1 之位置．點 P_1 常以點 (3, 4) 表之，即將坐標書在括號之中，而以橫坐標書在第一位.



同理，點 P_2 可用橫坐標 -4 及縱坐標 2 而定其位，稱為點 $(-4, 2)$. 同理，點 P_3 稱為點 $(-4, -5)$，而點 P_4 稱為點 $(3, -3)$.

總之，二個已知坐標可決定一點；而任何所設點都有二個坐標，即一橫坐標與一縱坐標也.

6. 坐標之符號　於上節中，若干點之橫坐標與縱坐標之符號皆為已知。若就一般而論，則凡橫坐標量自原點而至右方者為正，量自原點而至左方者為負。

縱坐標量自 X 軸而向上方者為正，向下方者為負。

例如在第 5 節之圖中，OA, AP_1 及 CP_2 皆為正；CC, CP_3 及 AP_4 皆為負。

7. 習　題

1. 有一點，其橫坐標為 4 而其縱坐標為 7. 試定其位置。此點可用 (4, 7) 表出之。

2. 試定一點具有橫坐標為 2 及縱坐標為 5，即點 (2, 5) 之位置。

3. 試定下列各點之位置：$(-3, 4)$, $(-6, -3)$, $(5, -1)$, $(0, 4)$, $(-7, 0)$, 及 $(-8, 10)$.

4. 試定下列各點之位置：$(1\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, (m, n), (x, y), $(x, 0)$.

5. 問橫坐標為 6 之點之軌跡為何？

6. 問縱坐標為 -3 之點之軌跡為何？

7. 問橫坐標為二倍其縱坐標之點之軌跡為何？

角

8. 直角及度　於平面幾何學中，許多角如銳角，直角，鈍角及反射角 (Reflex angle) 等都有論及。直角可用作

一個便利的測量單位，任何角度皆可用直角表示之．例如，一所設角可等於一直角之三分之二，或他一所設角可等於一直角之 1.476 倍．

然為應用便利起見，有用較直角為小之單位之必要．度(°)卽為此種之一個單位，並規定一度為一直角之九十分之一之一角．一度分為六十等分，謂之分(′)，一分分為六十等分，謂之秒(″)．於是吾人可書

$$60\text{ 秒 }(60'') = 1\text{ 分}$$

$$60\text{ 分 }(60') = 1\text{ 度}$$

$$90\text{ 度 }(90^\circ) = 1\text{ 直角}$$

為 26 度，30 分，57 秒之角，可書為 $26^\circ 39' 57''$．

作角及量角時，用一量角器較為便利．

下圖卽示量角器應如何安置方可測量角 XOP．由量角器上標度所示，得知此角為 70°．於作角及量角時，量角器有一定之安置法，令其內圓之中心與角之頂點相合，而其直徑與角之一邊相重合．