

中等學校教科適用

二B平面三角學

王允中譯

A Translation from

G. N. Bauer and W. E. Brooke's

"Plane Trigonometry"

二 B 平面三角學

王允中譯

A Translation from
G. N. Bauer and W. E. Brooke's
"Plane Trigonometry"

開明書店

二 B 平面三角學

每册售價人民幣9,000元

丙(皮4122)

譯者	王 允 中
出版者	開 明 書 店 (北京西總布胡同甲50)
發行者	三聯·中華·商務·開明·聯營 聯合組織 中國圖書發行公司 (北京絨線胡同63—67號)
印刷者	華 文 印 刷 局 (上海濟寧路143弄4號)

1941年12月一版

119P 32K

1951年3月十六版(滬1—5000)

有著作權 不准翻印

序

近來中等學校中最流行的三角學教本，爲 Granville, Smith, Mikesh 三氏所著之 Plane Trigonometry，即一般所稱之“葛氏平面三角學”。該書程度之深淺與教材之選擇，均甚得當，惟條理清晰與剖析精到，則猶不及 Bauer 與 Brooke 兩氏所著之 Plane and Spherical Trigonometry 甚多。葛氏三角之缺點在教材的編排過於零亂，僅就每章而論也往往沒有一個共通中心。例如牠特地把直角三角形的解法與斜三角形的解法，錯綜地編入應用與對數的理論及用途兩章之中，這在作者也許是要增加讀者復習的機會，然其結果，反使讀者迷亂恍惚，而不得要領。即如以應用一章而論，其中竟包括近似數計算，直角三角形解法，斜三角形解法，半角等項目，而關於半角一項教材，則又於三角的解析一章中再爲申述，徒見多事。蓋科學的敘述貴層次分明，不若文藝作品之須曲折有致也。又葛氏書中關於對數部分之過分強調，亦所不取。對數在三角學中之重要，自不待言，然此僅謂其便於作冗長之數值計算，至其與三角學本身之理解，則並無絲毫關係。且學習三角學之讀者，早經於代數學中習得對數之

知識，對於此項計算工具之使用，縱須稍加溫習，但絕無強調之必要。

準此以觀 Bauer 與 Brooke 兩氏的三角學，將見其具有葛氏等之長，而無葛氏等之短。此或如原序中所謂“由於教室之經驗而作種種之訂正及改編”之故。本書之內容及程度，與葛氏等之著作並無多大出入，而篇幅亦大致相等，然在編制方面則較有嚴密的層次，但這並非牠的特點。其重要特色在演算上採用圖解式之計算輪廓，這至少具有 (1) 節省時間，(2) 易於檢算，(3) 免除錯誤等三種優點。本書對於對數的安排，亦頗得當，即把牠列於最後一章，如是則可使一般讀者能集中注意於三角學本身之研習，而不致分心；即有一二對於對數較為生疏之讀者，亦可提前補習，蓋此與三角學之學習順序並無妨礙也。此外書中又隨處插入種種有價值的提示，足以指引讀者解除不自知的迷惑，也極難能可貴。

譯者王允中先生任中等學校數理教師多年，故能獨具隻眼，將此書之平面部分譯出，定名為“二 B 平面三角學”，交由開明書店印行，其對於我國數學教學上之貢獻，當非淺顯。筆者以職務關係，得與本書校讀之役，書成之日，爰識其感想如此。

一九四〇，一二，三。

顧均正

原 序

(第 三 版)

由於教室之經驗，本版已作種種之訂正及改編，並增加若干新的材料。

直角三角形一章，附有自然三角函數之四位數值表，舉凡該章所有之習題，皆可應用該表解之。此使學者可專注於三角學之原理，而不必着重繁複之數值計算。該章原不需用對數，然在已熟習對數者，自不妨用之。爲此之故，其所列例題之計算輪廓，將自然函數及對數函數一併列出。此外更加入一節，用以說明直角三角形當斜邊及其他各邊爲有理數時如何解出之方法。

對數一章，祇就用於初等三角學解出問題之各方面而論述之。

於若干情形中，對於某種基本公式曾導入交替證法，此種交替證法全以幾何圖示爲基礎。

三角函數圖都以圖示法作成，與以前所用者相同。而正弦及餘切曲線，則按射影方法爲之。

論述三角恆等式時，增以若干圖形，俾說明每個三角函數如何用其他三角函數表出之。此法同時亦用以使每個反

三角函數以其他反三角函數表出，此即明白指出反三角函數間之各個關係式並非具有恆等式之性質。

代莫伏爾定理一章，曾導入關於複素數之四種基本運算的圖示法，故已稍形擴大。

為實際應用上需要起見，故新增一節，以說明如何可化 $A \sin \theta + B \cos \theta$ 為 $C \sin(\theta + \phi)$ 之形式。

通編所增加之許多例題，其目的在使全書更為明晰，此亦依經驗之指示也。

凡三角學教師曾給以優良建議者，著者深致感謝！並將其優良建議一一納諸本書之中。

一九三二年一月 G. N. B.
W. E. B

原書附錄之對數表，卷帙幾與正文相等，茲特於不妨礙應用之範圍內刪存四位對數表兩種，以節省篇幅，而減輕讀者負擔。希採用本書者注意。

開明書店編譯所附誌

目次

第一章 正坐標及角

1. 發明史1 |

正 坐 標

- | | |
|---------------|------------------|
| 2. 方向線2 | 5. 一點之坐標 3 |
| 3. 參考線3 | 6. 坐標之符號5 |
| 4. 象限3 | 7. 習題 5 |

角

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| 8. 直角及度5 | 15. 圓弧或徑的度量法12 |
| 9. 由旋轉而成之角7 | 16. 中心角, 半徑與弧的關係12 |
| 10. 旋轉之方向8 | 17. 徑之值15 |
| 11. 正角及負角 9 | 18. 度與徑之關係15 |
| 12. 始線分與終線分 9 | 19. 直線速度及角速度17 |
| 13. 終線之符號10 | 20. 習題18 |
| 14. 二角之代數和10 | |

第二章 三角函數

- | | |
|--|------------------------------------|
| 21. 本章之要旨21 | 26. 三角比之符號27 |
| 22. 三角函數之定義21 | 27. 三角函數爲單值29 |
| 23. 30° , 45° 及 60° 之三角函數
值23 | 28. 由一三角函數之已知值可
決定無窮數之角30 |
| 24. 120° , 135° 及 150° 之三角
函數值26 | 29. 習題31 |

第三章 直角三角形

- | | |
|----------------------------------|------------------------|
| 29. 本章之要旨.....34 | 35. 檢算公式.....49 |
| 30. 三角函數之定義對於直角
三角形之應用.....34 | 36. 關於解三角形之提示.....49 |
| 31. 三角表.....36 | 37. 例題.....50 |
| 32. 三角表之用法.....37 | 38. 習題.....55 |
| 33. 解直角三角形所用之公式.....46 | 39. 邊為有理數之直角三角形.....57 |
| 34. 公式之選擇.....46 | 40. 斜三角形.....58 |
| | 41. 應用.....58 |

第四章 三角函數之變化

 $n90^\circ \pm \alpha$ 函數之簡化

- | | |
|--|--|
| 42. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 及 360°
之函數值.....61 | 49. $90^\circ + \alpha$ 之函數以 α 之函數
表示之.....71 |
| 43. 函數之變化.....63 | 50. $90^\circ - \alpha$ 之函數以 α 之函數
表示之.....72 |
| 44. 三角函數的圖示.....67 | 51. $180^\circ - \alpha$ 之函數以 α 之函數
表示之.....73 |
| 45. 三角函數之週期性.....68 | 52. 簡化定律.....73 |
| 46. 習題.....69 | 53. 習題.....74 |
| 47. 公式之用法.....69 | |
| 47. $-\alpha$ 之函數以 α 之函數表
示之.....69 | |

第五章 基本關係 線值

54. 緒論.....76 |

基 本 關 係

- | | |
|------------------|---------------------------------|
| 55. 公式之展開.....76 | 58. 任一三角函數以其他三角
函數表示之.....84 |
| 56. 指數之用法.....78 | 59. 三角方程式.....86 |
| 57. 三角恆等式.....78 | |

線 值

60. 三角函數之直線代表法.....89 | 61. 用線值表出三角函數之變化.....92

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| 62. 由線值而得出三角函數之圖.....92 | 63. 按線值而得之基本關係...95 |
| | 64. 習題.....96 |

第六章 二角之和之函數

二 倍 角 半 角

- | | |
|---------------------------------|--|
| 65. 問題之敘述.....101 | 74. 二角差之正弦, 餘弦, 正切及餘切.....107 |
| 66. 二銳角和之正弦以各角之正弦及餘弦表出之.....101 | 75. 習題.....108 |
| 67. 二銳角和之餘弦以各角之正弦及餘弦表出之.....102 | 76. 二倍角.....109 |
| 68. 用圖形說明二角之和之正弦與餘弦.....103 | 77. 半角.....110 |
| 69. 公式之重要.....104 | 78. 二正弦之和及差, 二餘弦之和及差.....112 |
| 70. 公式之概論.....104 | 79. 方程式及恆等式.....114 |
| 71. 二角和之正切.....106 | 80. 化 $A \sin \theta + B \cos \theta$ 爲形式 $C \sin(\theta + \phi)$116 |
| 72. 二角和之餘切.....107 | 81. 習題.....118 |
| 73. 加法公式.....107 | |

第七章 反三角函數

- | | |
|---|--|
| 82. 問題之敘述.....122 | 88. 一反函數之任一函數值...127 |
| 83. 反三角函數之基本意義...122 | 89. 由圖形得出反三角函數間之關係.....129 |
| 84. 反三角函數爲多值函數...123 | 90. 由二倍角, 半角及加法公式, 而得各反三角函數間之關係式.....131 |
| 85. 主值.....126 | 91. 習題.....132 |
| 86. $\sin \sin^{-1} a$ 及 $\sin^{-1} \sin a$ 之解釋.....126 | |
| 87. 基本關係對於以反函數表出之角之應用.....127 | |

第八章 斜三角形

- | | |
|------------------|--------------------|
| 92. 緒論.....134 | 94. 正切定律.....135 |
| 93. 正弦定律.....134 | 95. 文字之輪換法.....135 |

96. 餘弦定律	136	101. 三角形之面積以其一邊及 二鄰角表出之	140
97. 半角之正弦以三角形之各 邊表出之	137	102. 三角形之面積以其各邊表 出之	141
98. 半角之餘弦以三角形之各 邊表出之	138	103. 解一斜三角形之公式	141
99. 半角之正切以三角形之各 邊表出之	139	104. 檢算公式	142
100. 平面三角形之面積以其二 邊及夾角表出之	140	105. 例題	143
		106. 疑款	147
		107. 習題	150
		108. 雜題	154

第九章 代莫伏爾定理及其應用

109. 本章導言	166	118. 複素數之任何次根	177
110. 複素數之幾何圖示	166	119. $\sin na$ 及 $\cos na$ 以 $\sin a$ 及 $\cos a$ 表出之	178
111. 二個複素數之和, 差, 積及 商的幾何圖示	167	120. 若 a 爲銳角, 試比較 $\sin a$, a 及 $\tan a$ 之值	179
112. 代莫伏爾定理	170	121. 就 a 之小值而求 $\frac{\sin a}{a}$ 之 值	179
113. 幾何的解釋	172	122. 正弦級數及餘弦級數	180
114. 代莫伏爾定理之應用	173	123. 習題	182
115. 1 之三次根	173		
116. 1 之五次根	174		
117. 複素數之平方根	175		

第十章

對數

124. 對數在數學上之地位	186	131. 對數可書成數種形式	196
125. 對數爲指數	186	132. 內推法	197
126. 指數定律	187	133. 對數表之用法	197
127. 常用對數系	189	134. 表之特徵	201
128. 定位部及定值部	190	135. 對數之定律	201
129. 定位部之定律	192	136. 習題	204
130. 對數表	195		

習題答數

數之對數表

三角函數對數表

二 B 平面三角學

第 一 章

正 坐 標 及 角

1. 發明史 三角學之行於世，在基督耶穌降生以前。約在紀元前 150 年，有一天文家曰希巴諾斯(Hipparchus)發明三角學，希氏及其生徒之所以從事研究三角學，純以三角學可作天文學上之助力。

至十五世紀中葉，三角學有長足之進步。此時已有關於平球面三角形解法之論文；然歷三百餘年而至今日，方具現代規模之三角學。

三角學(Trigonometry)之得名，須遠溯至約 1600 年，此字係由二希臘字三角形(τρίγωνον)及量度(μετρία)衍化而得。按其字之蘊義，三角學原以論述三角形之解法為主。即在今日，此仍為三角學中一個重要部分，但三角學之範圍業已大為擴充。今日而論三角學，幾成數學分析科目中之不可缺少者，亦且對於不少的近代問題，莫不應用三角學而得解決。故讀三角學者，不但須論述三角形之解法，亦且須論及無數之其他問題。

三角學以數個基本定義爲其基礎。故在未論此等基本定義前，先將方向線及角詳盡討論之。

正 坐 標

2. 方向線 (Directed lines) 對於每一直線，吾人可任意指定其爲正方向及負方向。

若自 A 至 C 之方向爲正，則其反方向自 C 至 A 爲負。

若令文字之順序表線分度量之方向，則顯見 AC 與 CA 代表異方向之同一線分；是以



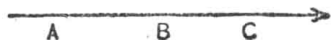
$$AC = -CA \text{ 或 } -AC = CA.$$

又若 B 爲線上之第三點，則 AB 及 BA 二線分之符號相反；同樣 BC 及 CB 二線分之符號亦相反。是以

$$AB = -BA \text{ 或 } -AB = BA,$$

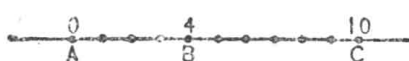
及
$$BC = -CB \text{ 或 } -BC = CB.$$

於是就線上 A, B, C 之一切位置而論，得知



$$AC = AB + BC.$$

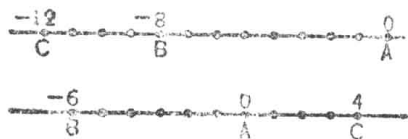
如是就下列各圖而論：



$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ 10 &= 4 + 6 = 10 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ 5 &= 8 + (-3) = 5 \end{aligned}$$



$$AC = AB + BC$$

$$-12 = -8 + (-4) = -12$$

$$AC = AB + BC$$

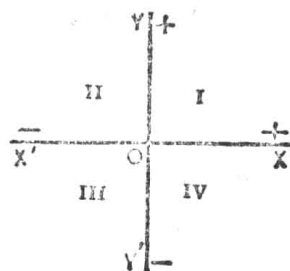
$$4 = -6 + 10 = 4$$

3. 參考線 (Lines of reference) 互相垂直之二有向直線，可取作參考線或參考軸。通常以 $X'X$ 及 $Y'Y$ 表出之，並分別稱之曰 X 軸及 Y 軸。

在 X 軸上，凡自左至右者為正，自右至左者為負。

在 Y 軸上，凡向上方者為正，向下方者為負。

二軸之交點稱曰原點 (Origin)。為便利計，以原點為度量距離之出發點。



4. 象限 (Quadrants) 相交之二軸分平面為四部分，稱曰象限，並以數記出之。第一象限以 XOY 表出之，第二象限以 YOX' 表出之，第三象限以 $X'OY'$ 表出之，而第四象限以 $Y'OX$ 表出之。

5. 一點之坐標 自平面上任一所設點 P_1 ，作一直線平行於 Y 軸而與 X 軸相交於 A 點。

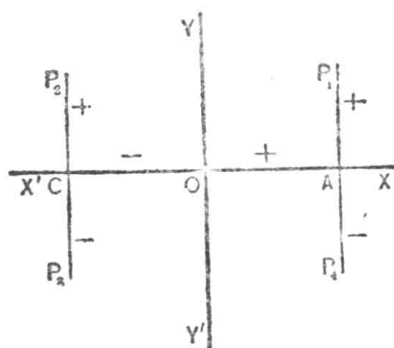
於是原點與交點間之距離， OA ，為所設點 P_1 之橫坐標 (Abscissa)。

交點與所設點間之距離， AP_1 ，為所設點 P_1 之縱坐標 (Ordinate)。

P_2 點之橫坐標及縱坐標各為 OC 及 CP_2 .

P_3 點之橫坐標及縱坐標各為 OC 及 CP_3 .

P_4 點之橫坐標及縱坐標各為 OA 及 AP_4 .

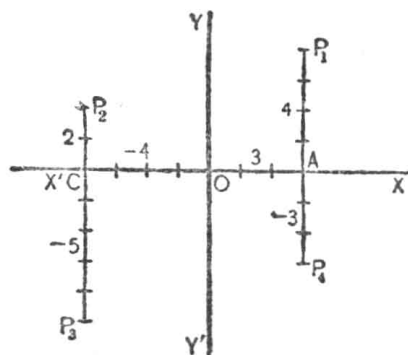


一點之橫坐標及縱坐

標稱為該點之坐標 (Coördinates of the point).

選取一適當單位以測量距離，則平面上之任何點可用二個坐標以定其位。

例如，在左圖中， P_1 之橫坐標為 3，而其縱坐標為 4，此二個坐標可以完全決定 P_1 之位置。點 P_1 常以點 $(3, 4)$ 表之，即將坐標書在括號之中，而以橫坐標書在第一位。



同理，點 P_2 可用橫坐標 -4 及縱坐標 2 而定其位，稱為點 $(-4, 2)$ 。同理，點 P_3 稱為點 $(-4, -5)$ ，而點 P_4 稱為點 $(3, -3)$ 。

總之，二個已知坐標可決定一點；而任何所設點都有二個坐標，即一橫坐標與一縱坐標也。

6. 坐標之符號 於上節中，若干點之橫坐標與縱坐標之符號皆為已知。若就一般而論，則凡橫坐標量自原點而至右方者為正，量自原點而至左方者為負。

縱坐標量自 X 軸而向上方者為正，向下方者為負。

例如在第 5 節之圖中， OA ， AP_1 及 CP_2 皆為正； CC_1 ， CP_3 及 AP_4 皆為負。

7. 習 題

1. 有一點，其橫坐標為 4 而其縱坐標為 7。試定其位置。此點可用 $(4, 7)$ 表出之。

2. 試定一點具有橫坐標為 2 及縱坐標為 5，即點 $(2, 5)$ 之位置。

3. 試定下列各點之位置： $(-3, 4)$ ， $(-6, -3)$ ， $(5, -1)$ ， $(0, 4)$ ， $(-7, 0)$ ，及 $(-8, 10)$ 。

4. 試定下列各點之位置： $(1\frac{1}{2}, 3)$ ， $(-\frac{1}{2}, 0)$ ， (m, n) ， (x, y) ， $(x, 0)$ 。

5. 問橫坐標為 6 之點之軌跡為何？

6. 問縱坐標為 -3 之點之軌跡為何？

7. 問橫坐標為二倍其縱坐標之點之軌跡為何？

角

8 直角及度 於平面幾何學中，許多角如銳角，直角，鈍角及反射角 (Reflex angle) 等都有論及。直角可用作

一個便利的測量單位，任何角度皆可用直角表示之。例如，一所設角可等於一直角之三分之二，或他一所設角可等於一直角之 1.476 倍。

然為應用便利起見，有用較直角為小之單位之必要。度 ($^{\circ}$) 即為此種之一個單位，並規定一度為一直角之九十分之一之一角。一度分為六十等分，謂之分 ($'$)，一分分為六十等分，謂之秒 ($''$)。於是吾人可書

$$60 \text{ 秒 } (60'') = 1 \text{ 分}$$

$$60 \text{ 分 } (60') = 1 \text{ 度}$$

$$90 \text{ 度 } (90^{\circ}) = 1 \text{ 直角}$$

為 26 度，30 分，57 秒之角，可書為 $26^{\circ}39'57''$ 。

作角及量角時，用一量角器較為便利。

下圖即示量角器應如何安置方可測量角 XOP 。由量角器上標度所示，得知此角為 70° 。於作角及量角時，量角器有一定之安置法，令其內圓之中心與角之頂點相合，而其直徑與角之一邊相重合。

