Classical Mathematical Problems and Galois Theory

HIT

数学·统计学系列

古典数学难题与伽罗瓦理论

徐诚浩 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

古典数学难题与伽罗瓦理论

Classical Mathematical Problems and Galois Theory

徐诚浩 著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书应用伽罗瓦理论清晰透彻地论述了两个古典难题的解决方法，即寻找代数方程的求根公式和限用圆规直尺作图（如三等分任意角、把立方体体积加倍、化圆为正方形以及作正多边形等），并借此由浅入深地向读者介绍了一些抽象代数的基本知识和研究方法.

本书可作为理工科学生和其他数学爱好者学习抽象代数的普及读物，也可供大中学校数学教师阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

古典数学难题与伽罗瓦理论 / 徐诚浩著. -- 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.11

ISBN 978-7-5603-3835-4

Ⅰ.①古… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①抽象代数-普及读物 Ⅳ.①O153.49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第264133号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　徐　丽
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张7.5　字数145千字
版　　次　2012年11月第1版　2012年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3835-4
定　　价　58.00元

⊙写在前面

近几年来，仍然有人宣布已成功地用圆规直尺将任意角三等分. 他们把稿件投寄到有关部门，但一般都得不到答复. 事实上，这一问题早已被证明是不可能的. “不予审阅，妥为保存”，这已成为处理这种特殊稿件的专门方法. 据说，法国科学院曾作出决议，凡是关于三等分角、倍立方、化圆为方和永动机的文章一律不予审阅. 作者愿把这本小册子奉献给读者，也算是一个肤浅的答复和解释吧！书中所提到的五大难题，曾折磨了人们两千多年，致使有些了不起的数学家也曾为之冥思苦想，虚掷光阴，直到19世纪伽罗瓦引入了置换群，创立了抽象代数学，才透彻地解决了这些难题. 作者恳切希望至今仍迷恋于这些已有定论之难题的人们，不要再浪费时间和精力了. 当然，有些人相信这些问题已有结论，但他们“只知其然，不知其所以然”，总希望能看到一些普及读物，以便了解这些问题是如何解决的. 更进一步，近一个世纪以来，抽象代数学已成为一门重要学科，它的应用已遍及各个数学分支，甚至扩及其他科学领域. 然而，不少大学生、青年教师和科技工作者却没有机会系统地学习这门学科. 因此，作者希望通过对伽罗瓦理论的介绍，普及某些最基本的抽象代数学知识，让读者了解抽象代数学处理问题和解决问题的方法.

抽象代数，顾名思义是抽象的代数，而这也正是使某些人“望而却步”的原因之一. 的确，抽象代数可谓是抽象概念的宝塔，逻辑推理的楷模. 应该说，抽象是个好法宝，经过抽象往往更能看清事物的本质和各个事物相互之间的联系. 事实上，任何有生命力的抽象概念都有广泛的实际背景，决不是凭空臆造出来的空中楼阁. 为了尽量减轻阅读难度，我们将比较自然地引入一些必要而又基本的概念，采取尽可能简单的途径证明一些结论，并力求讲得通俗易懂些，至于逻辑推理，只要习惯了，也就不难了.

本书从初等代数和初等几何中的古典难题讲起，由浅入深地介绍抽象代数，特别是伽罗瓦理论的基本知识，任何受过一定数学训练的读者都能读懂本书.

全书共分四章,在第一章中介绍有关历史及所引用的史料,由于出处不一,仅供参考.第二章介绍有关群论的知识.伽罗瓦理论的核心内容将在第三章中讨论.第四章是它的一些应用,详细地叙述了五大难题是如何解决的.

在本书的编写过程中,周仲良同志和顾海燕同志曾认真地阅读了全书,并提出了不少修改意见,作者在此对他们表示衷心的感谢.由于作者学识浅,水平低,在本书中难免有不当之处,望读者批评指正.

徐诚浩

1984 年国庆

重印说明

本书是在1986年,由复旦大学出版社出版的,至今已有26年了.在这期间,经常有读者来函索取或询问何时能够重印,然而总不能如愿.近日欣悉刘培杰数学工作室,为了数学的教育、传承和发展,克服种种困难,寻找各种途径,立志要把一些早期的经典著作重新出版发行,而这些书在书市中已几乎绝迹,但是还有一定的需求.这被有些读者称为"功德无量"之举!于是,本书终于能够重印了!

借用这次重印之机,我把原书中的一些已经发现的错误详细予以更正,并对部分史料予以修正.但是,却无法在内容上更新.

哈尔滨工业大学出版社的刘培杰等有关同志,为了重印这本书,付出了巨大努力,特致以衷心感谢.

徐诚浩

2012年9月

于上海

目录

历史概况

第一章

§1　高次代数方程的求根公式

根据古埃及的草片文书①记载，早在公元前1700年左右，人们就发现，当$a\neq0$时，$ax=b$有根$x=\frac{b}{a}$. 随着岁月的流逝，数学发展了. 到了公元前几世纪，巴比伦（现在伊拉克的一部分）人实际上已经使用过配方法得知$ax^2+bx+c=0$（当$a\neq0$时）有根

$$x=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})$$

当时，人们只认识正有理数（即两个自然数之比）的根才是根. 零、负数、无理数和复数的概念和理论迟至16世纪到18世纪才得到承认并逐步完善. 根据巴比伦的泥板文书②记载，当时已解决了如下二次方程问题：求出某数x，使其与其倒数之和等于给定数b，即$x+\frac{1}{x}=b$，得出的解答是

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$$

这就促使人们进一步思考，是否对于任意次数的方程都能找到这种求根公式？寻找三次方程的求根公式，经历了两千多年的漫长岁月，直到16世纪欧洲文艺复兴时期，才由几位意大利数学家找到，这就是通常所说的卡尔丹（J. Cardan，1501—1576）公式. 其原始的想法是：在

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

中作变量代换$x=y-\frac{a}{3}$后化为

① 草片是一种把苇草紧压后切成的薄片，用墨水写上象形数字就成了草片文书.

② 泥板文书是在胶泥尚软时刻上楔形数字然后晒干得到的文书.

$$y^3+py=q \tag{1}$$

它不再含有平方项了. 设 $y=\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}$,这里 m 和 n 是两个待定的数,则有

$$y^3=m-n-3\sqrt[3]{mn}\,y=q-py$$

如果取 m,n 满足

$$m-n=q,\quad \sqrt[3]{mn}=\frac{p}{3}$$

则对应的 y 值必满足(1)式. 另一方面,由

$$(m+n)^2=(m-n)^2+4mn=q^2+\frac{4}{27}p^3$$

可得

$$m+n=\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}$$

所以,当取

$$m=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},\quad n=-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$$

时,并令 $\alpha=\sqrt[3]{m}$,$\beta=\sqrt[3]{n}$,就得原三次方程的一个根

$$x_1=\alpha-\beta-\frac{a}{3}$$

它的另两个根是

$$x_2=\omega\alpha-\omega^2\beta-\frac{a}{3}$$

$$x_3=\omega^2\alpha-\omega\beta-\frac{a}{3}$$

这里

$$\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$$

$$\omega^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i}) \qquad (\text{其中 } \mathrm{i}=\sqrt{-1})$$

是 $x^3-1=0$ 的两个不是 1 的根.

关于卡尔丹,历史上评价不一,可谓是毁誉参半. 在他晚年所著《我的生平》一书中,他对自己既有褒扬之词,但也不乏贬抑之语. 卡尔丹既是闻名全欧的医生,又是颇有名气的数学教授. 他既对数学、物理学作出过不少贡献,又精通赌博和占星术,而且还曾写过有关赌博的专著. 他曾因犯有给耶稣基督算命的异端罪行而被捕入狱,然而教皇却也将他奉为座上宾,请他当占星术士.

在三次方程求根公式的发明过程中,卡尔丹还有一段不甚光彩的轶事,这就要从四百多年前的一场数学竞赛谈起了. 竞赛的内容是求解三次方程. 竞赛的一方是菲奥尔(A. M. Fior,16 世纪前半叶),他是意大利波洛那(Bologna)数

学学会会长费尔洛(S. d. Ferro,1465—1526)的学生. 另一方是威尼斯的数学教授方丹诺(N. Fontana,1499—1557),不过他的这个真名鲜为人知,留传于后世的倒是他的绰号——塔尔塔里亚(Tartaglia),意思是"口吃者". 在他幼年时,正值意法战争. 其父被法国兵杀害,他的头部和上、下颚被法国兵用马刀砍成重伤,后来,他的母亲在尸骸堆中把他找到,用舌舔其伤口,居然得救,但已得了口吃之疾. 他自学拉丁文、希腊文,酷爱数学. 与费尔洛一样,对求解三次方程很有研究. 在1530年,塔尔塔里亚曾解决了另一个挑战者科拉(Colla)提出的以下两个三次方程求解问题:$x^3+3x^2=5$,$x^3+6x^2+8x=1\ 000$. 这引起菲奥尔的不服,定于1535年2月22日在米兰大教堂公开竞赛,双方各出三十个三次方程. 结果,塔尔塔里亚在两小时内解完,而菲奥尔却交了白卷. 1541年,塔尔塔里亚得到了三次方程的一般解法,准备在译完欧几里得和阿基米德的著作后,自己写一本书公开他的解法. 此时,卡尔丹出场了. 他再三乞求塔尔塔里亚把解法告诉他,并发誓保守秘密. 塔尔塔里亚给他一首语句晦涩的诗. 这首诗写得很蹩脚,但的确把解法的每一步骤都写进去了. 他本人也说:"本诗有无佳句,对此我不介意,为记这一规则,此诗堪作工具."(另一种说法是,卡尔丹是在塔尔塔里亚的朋友处答应保密后套出了这首诗的)卡尔丹在得到这一切以后,却背信弃义,于1545年把这一解法发表在《大术》这本书中,并断定塔尔塔里亚的方法就是费尔洛的方法,他是在与菲奥尔竞赛时得知的. 这引起塔尔塔里亚的极大愤怒,并向卡尔丹宣战,双方各出31题,限定15天交卷. 卡尔丹派他的学生费尔拉里(L. Ferrari,1522—1565)应战. 结果,塔尔塔里亚在七天之内解出大部分题目,而费尔拉里五个月后才交卷,仅解对了一题. 塔尔塔里亚本想完成一部包含他的新算法在内的巨著,可惜壮志未酬就与世长辞了!

在三次方程的求解问题解决后不久,费尔拉里又得到了四次方程的求解方法,其主要思路是:对于四次方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{2}$$

引入参数 t,经过配方化为

$$\begin{aligned}&\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}t\right)^2\\ =&\left(\frac{1}{4}a^2-b+t\right)x^2+\left(\frac{1}{2}at-c\right)x+\left(\frac{1}{4}t^2-d\right)\end{aligned} \tag{3}$$

容易验证(2)与(3)式是一样的. 为了保证(3)式右边是完全平方,可令它的判别式为0,即

$$\left(\frac{1}{2}at-c\right)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2-b+t\right)\left(\frac{1}{4}t^2-d\right)=0$$

即选择 t 是三次方程

$$t^3-bt^2+(ac-4d)t-a^2d+4bd-c^2=0$$

的任一根. 把这个根作为(3)式中的 t 值就有

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}t\right)^2=\left(\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+t}\ x+\sqrt{\frac{1}{4}t^2-d}\right)^2$$

把右边移到左边并分解因式得到两个二次方程

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+t}\right)x+\frac{1}{2}t-\sqrt{\frac{1}{4}t^2-d}=0$$

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+t}\right)x+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}t^2-d}=0$$

这样,就把求四次方程的根化为求一个三次方程和两个二次方程的根,因此,可以认为四次方程求解问题也解决了.

既然有了这个突破,数学家们就以极大兴趣和自信致力于寻找五次方程的求解方法. 他们发现,对次数不超过四的方程,都能得到根的计算公式,每个根都可用原方程的系数经过加减乘除和开方运算表出. 我们把这件事简称为可用根号求解,于是人们就断言:对五次方程来说,也一定存在这种求根公式,关于这一点,当时的一些著名数学家,如欧拉(L. Euler,1707—1783)、范德蒙德(Van der Monde,1735—1796)、拉格朗日(J. L. Lagrange,1736—1813)、鲁菲尼(P. Ruffini,1765—1822)和高斯(K. F. Gauss,1777—1855)等都曾深信不疑,因而都曾尽力寻找,但都以失败告终.

首先怀疑这种求根公式存在性的是拉格朗日. 他透彻地分析了前人所得的次数低于五的代数方程的求解方法,发现都可作适当变量代换化为求解某些次数较低的辅助方程(它们被后人称为拉格朗日预解式),然而,对于五次方程,按这种方法得到的辅助方程的次数却升至六次,于是此路不通! 1771 年,拉格朗日发表长篇论文《关于方程的代数解法的思考》提出了这个怀疑. 到了 1813 年,他的弟子,意大利的内科医生鲁菲尼终于证明了拉格朗日所采用的寻找预解式的方法对于五次方程的确是失效的. 早在 1801 年,高斯也意识到这个问题也许是不能解决的. 可是,包括拉格朗日在内,他们都没有给出“不存在性”的证明.

第一个证明“高于四次的代数方程不能用根号求解”的是挪威青年数学家阿贝尔(N. H. Abel,1802—1829). 他是乡村牧师之子,幼年丧父,家境贫困. 在中学时,他就读了拉格朗日和高斯关于方程论的著作,探讨高次方程的求解问题. 1824 ~ 1826 年,他写出《五次方程代数解法不可能存在》一文,但高斯等人表示不理解. 阿贝尔在数学方面有很多独创性成就,在当时都未能被重视. 由于贫病交迫,1829 年 4 月 6 日死于结核病,年仅 27 岁. 在他逝世前不久,曾把一些研究结果告诉了勒让得(A. M. Legendre,1752—1833). 就在他离开人间的第三天,柏林大学给他寄来了教授聘书.

不过,鲁菲尼和阿贝尔的证明毕竟不是很清楚的,甚至还有一些漏洞. 阿贝尔并没有给出一个准则用来判定一个具体数字系数的高次代数方程能否用根号求解. 作为历史,他们的功绩不容抹煞,但是,若与不久以后出现的伽罗瓦的

辉煌成就相比,就大为逊色了!

伽罗瓦(E. Galois,1811—1832)出生于法国巴黎郊区的一个小城市. 他的父亲是自由党人,任市长. 他的母亲是当地法官的女儿,是伽罗瓦的启蒙老师. 在伽罗瓦的一生中,受父亲和母亲的影响很大.

伽罗瓦年满 12 岁时,考入有名的皇家中学,可是直到 16 岁,他才被批准选学第一门数学课,这立即唤醒了伽罗瓦的数学才能,对数学发生了浓厚的兴趣. 伽罗瓦经常到图书馆阅读大数学家的专著,这更提高了他的信心,他认为他能够做到的,不会比这些大数学家们少.

由于他忽视了其他学科和不善于表达,两次报考巴黎综合工科学校都失败了,只得进入高等师范学校.

年仅 17 岁的伽罗瓦就开始着手研究关于方程理论、整数理论和椭圆函数理论的最新著作,并在法国第一个专业数学杂志《纯粹与应用数学年报》三月号上,发表了他的第一篇论文—《周期连分数一个定理的证明》.

1829 年,他先后将他的两篇关于群的初步理论的论文呈送法国科学院的柯西,结果不了了之!

1830 年,伽罗瓦将他仔细修改过的论文再次呈送法国科学院,由傅里叶主审. 不幸,傅里叶在当年 5 月份去世,而在他的遗物中未能找到伽罗瓦的手稿.

1831 年,他向科学院呈送了关于方程根式解的条件的论文,这次负责审查论文的是泊松. 结果以“完全不能理解”为理由被否定了!

对事业必胜的信念激励着年轻的伽罗瓦. 虽然他的论文一再被丢失,得不到应有的支持,但他并没有灰心,进一步向更广的领域探索.

1830 年法国七月革命时,他因批评学校的学监不支持革命而被开除,又因政治罪两次被送进监狱. 1832 年 4 月出狱住医院治病. 出院当天,在路上遇到两个不速之客,相约于第二天决斗,结果他因受重伤于 5 月 31 日离世,时年不满 21 岁. 在决斗前夜,他深知为女友决斗而死毫无意义,但又不甘示弱. 当晚,他精神高度紧张和不安,连呼“我没有时间了!”匆忙之中,他把他的关于方程论的发现草草写成几页说明寄给了他的朋友,并附有如下一段话:“你可以公开地请求雅可比(C. Jacobi)或者高斯,不是对于这些定理的真实性而是对于其重要性表示意见,将来我希望有一些人会发现把这堆东西注释出来对他们是有益的.”到了 14 年以后的 1846 年,刘维尔(J. Liouville,1809—1882)在由他创办的《纯粹数学和应用数学杂志》上发表了伽罗瓦的部分文章. 关于伽罗瓦理论的头一个全面而清楚的介绍是在约当(C. Jordan,1838—1922)于 1870 年出版的《置换和代数方程专论》一书中给出的. 这样,伽罗瓦超越时代的天才思想才逐渐被人们所理解和承认,至今已成为一门蓬勃发展的学科——抽象代数学. 伽罗瓦避开了拉格朗日的难以捉摸的预解式而巧妙地应用置换群这一工具,他不但证明了如下的一般代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

当 $n \geqslant 5$ 时不可能用根号求解(这里系数 a_i 可取任何复数),而且还建立了具体数字系数的代数方程可用根号求解的判别准则,并举出不能用根号求解的数字系数代数方程的实例. 这样,他就透彻地解决了这个在长达两百多年的时间中使不少数学家伤透脑筋的问题. 不仅如此,伽罗瓦所发现的结果,他的奇特思想和巧妙方法,现已成为全部代数的中心内容. 从这一点上说,他作为抽象代数的创始人之一是当之无愧的,他的贡献不仅仅限于解决代数方程根号求解的问题.

§2 圆规直尺作图

在历史上,限用圆规直尺的古希腊四大几何作图难题,一直引起无数数学家和数学爱好者的浓厚兴趣. 这里所说的直尺是没有刻度的(因为尺上的刻度总是近似的),并且要求作图必须在有限步完成. 为什么非要限用圆规直尺作图呢? 希腊人认为,直线和圆弧是构成一切平面几何图形的基本图形,而直尺和圆规则是直线和圆弧的具体化. 他们甚至认为只有使用圆规直尺作图才能确保其严密性. 到了公元前 3 世纪的欧几里得时期,创立了以五条公设为基础的欧氏几何,就更加严格限用圆规直尺作图了. 现在我们把这四个难题逐一介绍一下. 我们约定:凡说到"可作",总指限用圆规直尺能在有限步内作出.

(一) 将任意角三等分. 这等价于将任意一段圆弧三等分. 中学生学会了用圆规直尺把任意角二等分,那么,自然要问:能否将任意角三等分呢? 在历史上的确有过一些三等分角的作图法. 早在公元前 5 世纪,希腊人希皮亚斯(Hippias,生于公元前 425 年左右)特地为此发明了一种割圆曲线,用它可把任意角三等分. 割圆曲线的作法如图 1. 在平面上作 AB 垂直于 AD,且 $|AB| = |AD|$,作 BC 平行于 AD. 将 AB 绕点 A 顺时针匀速转到 AD. 同时,将 BC 匀速平行下移与 AD 重合. 设 AB 转到 AD'时,BC 正好平移到 $B'C'$. AD' 与 $B'C'$ 交于 E',则这个 E' 就是割圆曲线上的一般点. 如果割圆曲线已经作出,那就可把任意角三等分了. 不妨设 $\angle E'AD = \varphi$,作 $E'H$ 垂直于 AD,在 AD 上的垂足是 H. 把线段 $E'H$ 三等分(这容易用圆规直尺作出,见第 87 页的注①),使 $|H'H| = \frac{|E'H|}{3}$,过 H' 作 $B''C''$ 平行于 AD,交割圆曲线于 E'',注意到割圆曲线是按照两个"匀速"的要求作出的,所以必有

$$\frac{\angle E''AD}{90^\circ} = \frac{|H'H|}{|AB|} = \frac{1}{3}\ \frac{|E'H|}{|AB|} = \frac{1}{3}\ \frac{\angle E'AD}{90^\circ}$$

于是 $\angle E''AD = \frac{\angle E'AD}{3} = \frac{\varphi}{3}$. 可惜的是这种割圆曲线是决不可能只用圆规直尺

在有限步内作出的.

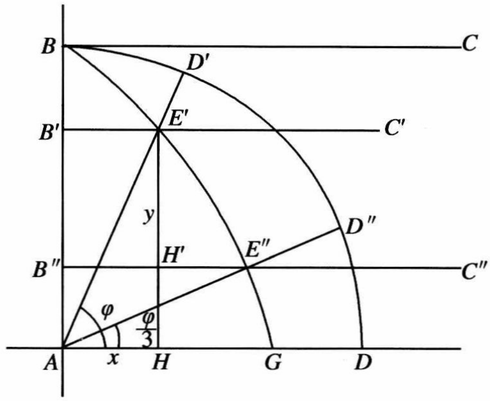

图 1

到了公元前 3 世纪,希腊数学大师阿基米德(Archimedes,公元前 287—前 212)曾给出一个非常简单的方法,如图 2. 任给 $\angle AOB = \varphi$,设 F 和 F' 是某直尺的两个端点,用有色笔在此直尺上任意画上一个点 E. 以 O 为圆心,以 $|EF| = r$ 为半径作半圆,交角 φ 的两边于 A 和 B. 现在这样来放置直尺,让 E 在圆周上滑动,F 在 OB 的反向延长线上滑动,恰使此尺过 A 点,则有

$$\begin{aligned}\varphi &= \angle AOB = \angle AFO + \angle OAE \\ &= \angle AFO + \angle OEA = 2\angle AFO + \angle EOF \\ &= 3\angle AFO\end{aligned}$$

所以 $\angle AFO = \frac{\varphi}{3}$. 可惜,在直尺上画上点 E 不符合规尺作图的规定. 稍为放松一"点"要求,三等分任意角就可作了! 类似这种不易觉察的"想当然"式的漏洞,三等分角者经常会不自觉地产生. 当然,阿基米德知道这是犯规的,但苦于无法否定它的可作性. 在本书中我们将要证明,的确存在不可以三等分的角,例如 $60°$. 另一方面,只要 n 不能被 3 整除,角 $\alpha = \frac{\pi}{n}$ 必可三等分. 在一百多年前,这个问题已有定论:三等分任意角不可作. 企图用圆规直尺把任意角三等分,就像企图发明永动机一样,是不会成功的.

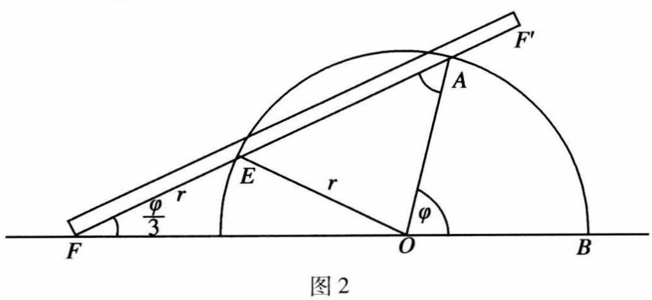

图 2

（二）倍立方. 根据历史记载，公元前430年，雅典城流行鼠疫，居民们向地劳斯神殿请求驱除瘟疫，巫神命令他们把现有的立方体祭坛的体积扩大一倍，但仍要保持立方体的形状. 于是倍立方问题就产生了. 人们去请教柏拉图（Plato），他说，巫神之意是借此谴责希腊人不重视数学，并对几何学不够尊崇. 当然，这些都是传说而已. 其实，提出这个问题也是很自然的. 因为以任一正方形的对角线为边所得的新正方形，其面积恰是原正方形面积的两倍，这是一个倍平方问题，转而考虑立方体就是倍立方体问题了. 古希腊的毕达哥拉斯学派的希波克拉提斯（Hippocrates，约公元前460—前377）早就指出：倍立方问题可归结为求线段 a 与 $2a$ 之间的两个比例中项 x 和 y 的问题，这里 a 是给定立方体的棱长

$$a:x=x:y=y:2a$$

事实上，此时有 $x^2=ay, y^2=2ax, x^4=a^2y^2=2a^3x$，在等式两边约掉 x 后即得

$$x^3=2a^3$$

于是棱长为 x 的立方体的体积就是棱长为 a 的立方体体积的两倍. 但是，这个 x 如何作出呢？后来有人用两把直角尺（称为矩）作出了这个 x. 其作法如图3. 任作两条互相垂直的直线 $M'B'$ 和 $A'N'$，交点为 O. 截取 $|OB|=a, |OA|=2a$. 取两把直尺甲和乙，让甲的直角顶在 $M'B'$ 上移动，一条直角边通过 A 点；乙的直角顶在 $A'N'$ 上移动，一条直角边通过 B 点. 再如此协调甲和乙的位置，使它们的另一对直角边正好重合，这样就产生了图上的 M 和 N 两点. 于是 $|ON|=x$，$|OM|=y$，此 x 即为所求. 显然，这不能算是圆规直尺作图，我们将很容易地证明，作出倍立方体的棱长也是圆规直尺无法办到的.

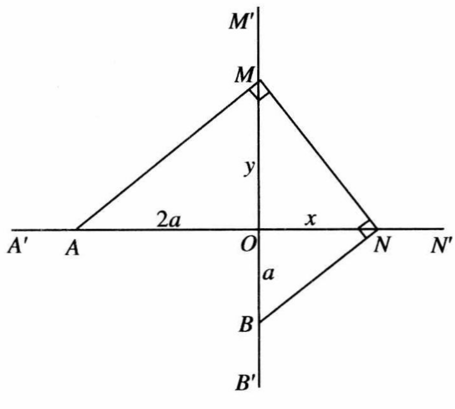

图3

（三）化圆为方. 求作一正方形使其面积与给定圆的面积相等. 这是历史上曾经风靡一时的等积问题（作新图形与原图形的面积相等）的特例. 欧洲文艺复兴时期的达·芬奇（Leonardo de Vinci，1452—1519）曾很巧妙地解决了这个问题，如图4. 以半径为 r 的已知圆为底作一圆柱，其高为 $\frac{r}{2}$. 将这个圆柱在平面

上滚动一周，产生一个矩形，其边长为$\frac{r}{2}$和$2\pi r$，以$2\pi r+\frac{r}{2}$为直径作一半圆. 在分点A处作一垂线交半圆于B点，则

$$|AB|^2=\frac{r}{2}\cdot 2\pi r=\pi r^2$$

因此，以$|AB|$为边长的正方形的面积就是已知圆的面积. 但是这种方法也不符合圆规直尺作图的规定. 如果设已知圆的半径为1，则面积为π. 于是要作的正方形的边长$x=\sqrt{\pi}$. 直到1882年，林德曼（F・Lindemann）证明了π是超越数以后，才知道限用圆规直尺实现化圆为方也是不可能的.

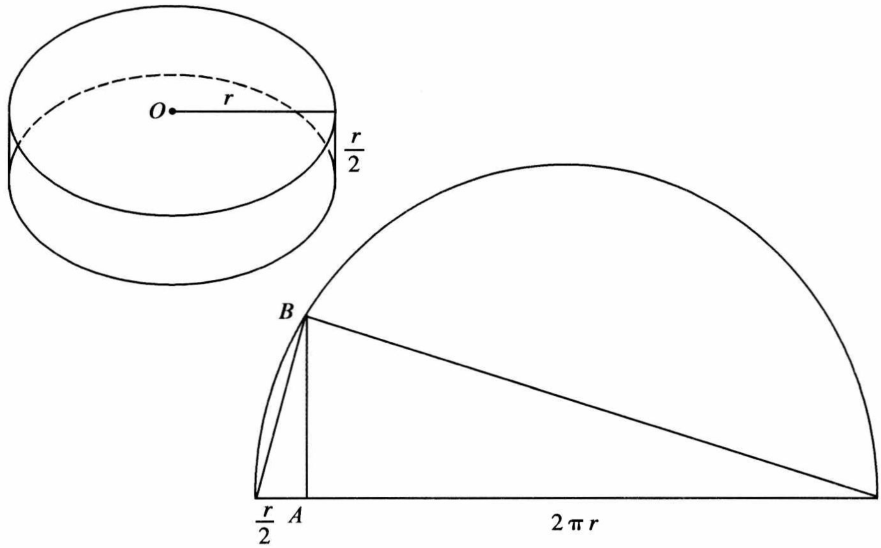

图4

（四）作正n边形. 这等价于把整个圆周n等分. 早在古希腊的欧几里得时期，人们就知道边数为

$$3,5,15,2^n,2^n\cdot 3,2^n\cdot 5,2^n\cdot 15$$

（n是任意自然数）的正多边形是可作的. 但在以后的两千多年的时间内却毫无进展，甚至数学家们一致声称不存在其他可作的正多边形了！在这个问题上，第一个作出卓越贡献的当推18世纪末的德国天才数学家高斯. 1796年，这位年仅19岁的大学生限用圆规直尺作出了正十七边形. 当时，高斯兴致勃勃地去告诉他的导师，然而得到的竟是冷嘲热讽. 因为这个发现太出乎意料了，使人难以相信. 由于这位教授也曾炫耀过他的诗集，于是高斯回敬他是"数学家中最好的诗人和诗人中最好的数学家". 当导师确定高斯已经得到正确结果时，就热烈地赞扬了他. 为了永远纪念高斯在青年时代的这个重要发现，1855年他逝世后，在他的出生地布鲁斯维克的墓碑上，刻着一个内接于圆的正十七边形.

此外,高斯还进一步断言:一个正 n 边形可作当且仅当 $n=2^e p_1 p_2 \cdots p_s$,这里 e 是任意自然数或 0,$p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是 s 个两两不同的形如 $2^{2^t}+1$ 的素数. 当时,高斯仅证明了这一断言的充分性,其必要性是由旺策尔(P. L. Wantzel,1814—1848)于 1837 年证明的. 我们也将用伽罗瓦理论证明高斯的这一结论.

解决这些乍看起来似乎并不困难的问题,怎么会经历如此漫长而又艰难的岁月呢? 两千多年来,曾有无数人将自己的聪明才智倾注在这些难题上,但未得到丝毫结果,其原因就是缺乏一些新的工具. 拉格朗日使用的工具——预解式,在 $n=5$ 时失效了. 直到伽罗瓦等人找到了真正有效的工具——抽象代数学中的群、环和扩域理论,这些长期折磨着人们的难题才一一迎刃而解,这就是我们在下两章中要讲的内容. 由于这些内容涉及许多抽象代数的重要概念,这些概念不但对解决上述古典难题必不可少,而且也是抽象代数这门学科的基础,因此我们打算由浅入深地将它们向读者作些简要的介绍.