黄霭英 康锦屏 主编

数学

高中生能力培养丛书

（供高二年级使用）

与新教材同步·与新教材同步·与新教材同步

高中生能力培养丛书

数　学

（供高二年级使用）

分科主编　方金秋

本册编者　孙永顺　张景茂
张　辉　李廷奇
杨宏山　杨跃先

华夏出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/黄霭英,康锦屏主编.－北京:华夏出版社,1997.1
(高中生能力培养丛书)
供高二年级使用
ISBN 7－5080－1137－6

Ⅰ.数…　Ⅱ.①黄…　②康…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第23807号

华夏出版社出版发行
(北京东直门外香河园北里4号　邮编:100028)
新华书店经销
中国建筑工业出版社印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本　11.5印张　263千字
1997年1月北京第1版　1997年1月北京第1次印刷
印数1－11000册
ISBN 7－5080－1137－6/G·746
定价:12.80元

编 者 的 话

由于在教育学院执教所具有的条件，因而有了广泛接触、深入了解中学教育的机会，有了博览研究全国各地出版部门编辑出版的有关中学教学的各类书籍的机会。研读之余，感慨良深。那些书籍虽或多或少有助于教师的教，学生的学，但均不无缺憾之处：有的详于知识而略于将知识转化为能力的指点；有的详于题例的堆列而略于重点、难点知识的疏解；有的虽兼顾了知识与题例，但又缺乏规律与方法的揭示与提供……。至于专门在能力培养上下力气的得力之作，更是凤毛麟角了。看到这多如牛毛的大同小异的书籍，我们感到忧心。为培养高级中学学生学习能力和提高教师教学质量，我们约集了北京市专门从事中学教育或专门研究中学教育的有共识的专家、学者，编著了这套丛书，名之曰《高中生能力培养丛书》。采众家之长，去各家之短。本丛书体现了如下特点：重点难点知识的疏解与典型题例相结合；精讲知识与怎样将知识转化为能力的点拨相结合；精选、精设典型题例与解题思路、解题方法的分析、揭示相结合；注重指导平时教学与适应高考实际需要相结合。因此，丛书是科学性、针对性、实用性、有效性的有机统一。编著此丛书的构想方案形成以后，华夏出版社为丛书出版竭尽心力，北京市原教育局长、中学教育专家陶西平同志欣然同意任丛书顾问，为此，我们由衷地表示谢意！由于时间紧，任务重，难度大，因此是否将美好的设想变成了现实，尚待广大中学师生在实践中去验证。

黄霭英　康锦屏

目　录

第一部分　代　数

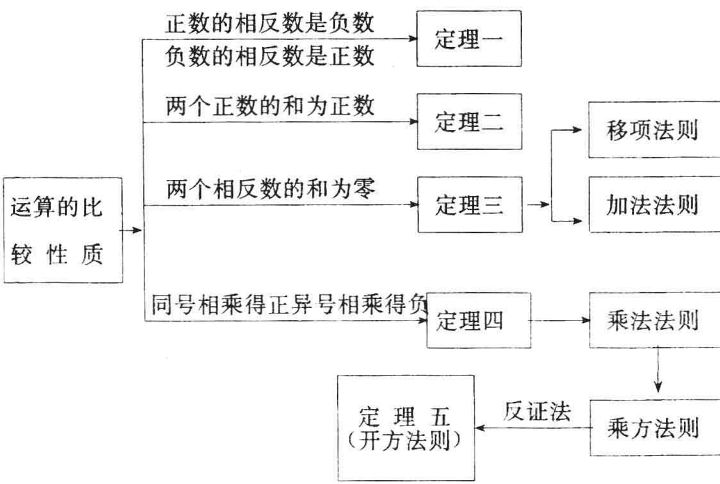
第二部分　解析几何

第一部分 代 数

第一章 不等式

一、重点、难点知识

(一)重点、难点知识说明



不等式的概念,实数运算的比较性质($a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$)是理解和掌握不等式的五个性质定

理、推论的基础. 前页结构图反映了实数的运算性质，符号法则与四个定理发生联系的过程. 也可以帮助理解、掌握五个定理. 本章中，不等式的概念、性质是重点. 在解不等式和证明不等式的过程中经常用到.

证明和解不等式是本章的重点，也是难点. 它们在研究函数的性质，函数的最值，讨论圆锥曲线系，讨论直线与圆锥曲线的位置关系等各方面都有广泛的应用.

（二）知识体系与分析

本章内容共分五个部分：第一部分是不等式的基本概念. 这部分不仅对不等式的概念作进一步的阐述，而且给出了实数的运算性质与大小顺序之间的关系，是本章的基础. 第二部分是不等式的性质. 教材中给出了五个定理及三个推论. 不等式的概念和性质是证明和解不等式的依据. 第三部分是不等式的证明. 主要介绍了两个定理和两个推论，以及证明不等式的三种基本方法. 第四部分是不等式的解法，重点研究了分式不等式，无理不等式和超越不等式的解法. 第五部分是含有绝对值的不等式，包含有两个定理及含有绝对值不等式的解法和证明.

上述五部分内容的内在联系如下（见下页）.

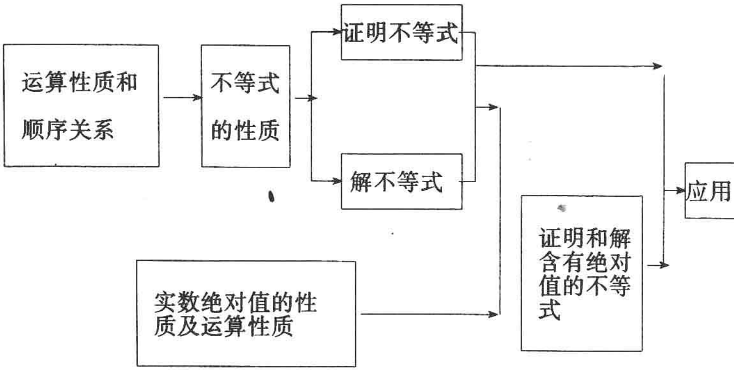
二、能力培养

（一）数学方法和思想

1. 不等式的证明

不等式的证明，除课本所讲的三种方法外，放缩法、换元法、反证法、判别式法、数学归纳法等，也是常用的重要方法. 证不等式的实质是运用基本知识和方法把已知式转化为“目标式”，变形是核心.

方法一：　比较法



比较法有两种形式,比差法和比高法.

比差法的主要依据是:$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$;$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$. 基本过程是:作差⟶差的等价变形式⟶确定出差的符号.

比商法的主要依据是:当 $a>0,b>0$ 时,$\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$;$\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a<b$. 基本过程是:作商⟶商的等价变形式⟶确定商与 1 的大小.

例 1. 若 $a>b>c>0$,求证 $a^a b^b c^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

证明:$\dfrac{a^{3a}b^{3b}c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}}$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{b}\left(\frac{a}{c}\right)^{a}\left(\frac{c}{a}\right)^{c}\left(\frac{b}{c}\right)^{b}\left(\frac{c}{b}\right)^{c}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}.$$

$\because$ $a>b>c>0$,

$\therefore$ $\frac{a}{b}>1,\frac{a}{c}>1,\frac{b}{c}>1,a-b>0,a-c>0,b-c>0$,

$\therefore$ 由指数函数的性质得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1,\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}>1.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}>1,$$

即 $\dfrac{a^{3a}b^{3b}c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}}>1.$

$$\therefore\quad a^ab^bc^c>(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

评析：当所证的不等式的两边都是正数，并且都是幂的乘积时，常用比商法.

方法二： 放缩法

用放缩法证明不等式的基本思想是：要证明 $a<b$，只要证明 $a<c<b$．“放”和“缩”就是指放大或缩小．放缩法具有较强的灵活性．在做放缩变换时，第一要注意放缩要达到的“目标式”要清楚；第二要注意放缩的合理性，不要产生矛盾．放缩的思想方法，较广泛地应用在各种证明方法之中，是常用方法之一.

例 2. 求证 $\mathrm{ctg}23°57'+\mathrm{ctg}65°35'+\mathrm{ctg}44°59'>3.$

证明：
$$\begin{aligned}&\mathrm{ctg}23°57'+\mathrm{ctg}65°35'+\mathrm{ctg}44°59'\\&>\mathrm{ctg}24°+\mathrm{ctg}66°+\mathrm{ctg}45°\\&=\mathrm{tg}66°+\mathrm{ctg}66°+1\\&>3\sqrt[3]{\mathrm{tg}66°\cdot\mathrm{ctg}66°\cdot 1}\\&=3,\end{aligned}$$

即 $\mathrm{ctg}23°57'+\mathrm{ctg}65°35'+\mathrm{ctg}44°59'>3.$

例 3. 求证：$\left(\dfrac{1}{\sin^4\alpha}-1\right)\left(\dfrac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)\geqslant 9.$

证明：
$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)\\&=\frac{1-\sin^4\alpha}{\sin^4\alpha}\cdot\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos_4\alpha}\\&=\frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}{\sin^4\alpha\cos^4\alpha}\end{aligned}$$

$$=\frac{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{8}{\sin^2 2\alpha}+1$$

$$\geqslant 8+1$$

$$=9.$$

即 $\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4\alpha}-1\right)\geqslant 9.$

例 4. 若 a、b、c 是直角三角形的三边，其中 c 为斜边，$n\in N$，且 $n>2$，求证 $a^nb^n<c^n$.

证明：∵ $a^n+b^n>0, c^n>0, 0<\frac{a}{c}<1, 0<\frac{b}{c}<1, n>2$，

根据指数函数的性质，有

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n<\left(\frac{a}{c}\right)^2,\left(\frac{b}{c}\right)^n<\left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

∴ $$\frac{a^n+b^n}{c^n}$$

$$=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n$$

$$<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$=\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

$$=1.$$

∴ $a^n+b^n<c^n$.

评析：例 2 用到了余切函数 $y=\operatorname{ctg}x$ 在区间$(0°,90°)$上是减函数的性质，把较小的角度适当的换成较大的角度进行了一次缩小，再利用平均值定理再进行一次缩小，达到了证明不等式的目的. 例 3 利用了函数 $y=\sin^2x$ 的值域 $0\leqslant\sin^2x\leqslant1$ 进行了缩小. 例 4 用了比商法，也用到了指数函数 $y=a^x(0<a<1)$在区间

$(-\infty,+\infty)$上是减函数的性质进行了放大，使不等式得证.

方法三：` 综合法和分析法

分析法是由题目结论不等式出发，根据不等式的性质和有关定理量，把它转化为一个新的不等式，一直转化到题目已知或一个绝对成立的不等式. 由一个不等式转化成另一个不等式，只要求前者是后者的必要不充分条件就够了. 当用综合法困难时，常常考虑用分析法.

例 5. 设实数 x、y 满足条件$|x-y|<K$，求证：$\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right|<K$.

证明：要证明$\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right|<K$，

$\because$ $|x-y|<K$，

只要证明$\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right|\leqslant|x-y|$.

此式当 $x=y$ 时等号成立.

当 $x\neq y$ 时，因为$|x-y|\neq0$，故只要证明

$$\left|\frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}\right|\leqslant1,$$

即 $(x^2+1)^2(y^2+1)^2\geqslant(x+y)^2$.

$\because$ $(x^2+1)^2(y^2+1)^2-(x+y)^2=[(x^2+1)(y^2+1)-(x+y)][(x^2+1)(y^2+1)+(x+y)]=[x^2y^2+(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}][x^2y^2+(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}]>0$,

$\therefore$ $(x^2+1)^2(y^2+1)^2>(x+y)^2$ 成立.

$\therefore$ $\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right|<K$.

评析：本题用分析法证题的关键是将要证的不等式$\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right|<K$转化为证不等式$\left|\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{y^2+1}\right|\leqslant|x-y|$.

例 6. 求证$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

证明：设 $x_1, x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，对于函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}>0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间$[0,+\infty]$上为增函数.

$\because$ $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 且 $|a|\geqslant0, |b|\geqslant0, |a+b|\geqslant0$,

$\therefore$ $f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$,

$\therefore$ $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$.

$\because$ $\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$,

$\therefore$ $\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$.

评析：本题用的是综合法，在证明的过程中使用了函数.

方法四： 换元法

某些不等式，原有形式数量关系较为复杂，难以找到解题的途径时，可通过对题目的某些条件进行“换元”，把它转化成我们较熟悉的不等式，从而得到不等式的证明.

例 7. 已知 $x^2+y^2\leqslant1$，求证$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.

证明：设 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$,(其中$|a|\leqslant1$),

$\therefore$ $|x^2+2xy-y^2|$

$=|a^2\cos^2\theta+2a^2\cos\theta\sin\theta-a^2\sin^2\theta|$

$=a^2|\cos^2\theta-\sin^2\theta+\sin2\theta|$

$=\sqrt{2}a^2|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos2\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin2\theta|$

$=\sqrt{2}a^2|\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})|$

$\leqslant\sqrt{2}a^2\leqslant\sqrt{2}$.

即 $|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$.

评析：本题用的是三角代换法，把代数问题转化成三角问题使问题化难为易. 具备条件 $a^2+b^2=1$ 的不等式，可设 $a=\cos\alpha$，$b=\sin\alpha$；具备条件 $|a|\leqslant1$ 的不等式，可设 $a=\sin\alpha$；具备条件 $a^2+b^2\leqslant1$ 的不等式，可设 $a=K\cos\alpha,b=K\sin\alpha$（其中 $|K|\leqslant1$）；具备条件 $a^2+b^2\geqslant1$ 的不等式可以假设 $a=K\cos\alpha,b=K\sin\alpha$（其中 $|K|\geqslant1$）.

例 8. 已知 $\frac{a^1}{b^1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3},\cdots,\frac{a_n}{b^n}$，其中所有字母都表示正数. 其中最大的是 $\frac{a_n}{b_n}$，最小的是 $\frac{a_1}{b_1}$，求证 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$.

证明：设 $\frac{a_1}{b_1}=K,\frac{a_n}{b_n}=P$，

∵ $\frac{a_1}{b_1}$ 是最小的，$\frac{a_n}{b_n}$ 是最大的.

∴ $K<\frac{a_2}{b_2}<P,K<\frac{a_3}{b_3}<P,\cdots,K<\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}<P$.

∵ $b_2,b_3,\cdots,b_{n-1}$ 都为正数，

∴ $Kb_2<a_2<Pb_2,Kb_3<a_3<Pb_3,\cdots,Kb_{n-1}<a_{n-1}<Pb_{n-1}$.

$\because \quad b_1K=a_1, a_n=Pbn$,

$\therefore \quad K(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<P(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$,

$\because \quad b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n>0$,

$\therefore \quad K<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}<P$,

即 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$.

方法五： 反证法

反证法证题的基本思路是:想法驳倒求证的反面;证题的基本过程是:假设求证的反面为真,并由此出发,经过步步正确推导,得出与本题已知,公理,定理等矛盾的结果,从而否定假设,肯定求证.

例 9. 已知 $ap-2bn+cm=0$ 且 $ac-b^2>0$,求证 $mp-n^2\leqslant 0$.

证明:假设 $mp-n^2>0$,则

$mp>n^2\geqslant 0$,

由 $ac-b^2>0$ 得,

$ac>b^2\geqslant 0$

$\therefore \quad acmp>n^2b^2$,

由 $ap-2bn+cm=0$ 得,

$ap+cm=2bn$.

两边平方得,

$(ap+cm)^2=4b^2n^2<4acmp$,

即 $(ap-cm)^2<0$.

这与$(ap-cm)^2\geqslant 0$ 相矛盾,

所以假设不成立. 即 $mp-n^2\leqslant 0$.

方法六： 判别式法

判别式法是利用实数系数一元二次方程有实数根时它的判别式$\triangle\geqslant 0$来证明不等式的一种方法.

例10. 求证：$\frac{1}{3}\leqslant\frac{\sec^2x-\mathrm{tg}x}{\sec^2x+\mathrm{tg}x}\leqslant 3$.

证明：设$y=\frac{\sec^2x-\mathrm{tg}x}{\sec^2x+\mathrm{tg}x}$，则

$y=\frac{\mathrm{tg}^2x+1-\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}^2x+1+\mathrm{tg}x}$，

即 $(y-1)\mathrm{tg}^2x+(y+1)\mathrm{tg}x+y-1=0$. (1)

当$y-1\neq 0$，即$y\neq 1$时，

$\because$ 方程(1)是关于tgx的实数系数一元二次方程，并且它的根tgx也是实数，

$\therefore$ 它的判别式$\triangle\geqslant 0$.

即 $(y+1)^2-4(y-1)(y-1)\geqslant 0$.

$\therefore$ $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

当$y-1=0$即$y=1$时，由方程(1)得$\mathrm{tg}x=0$，代入假设式得$y=1$，适合$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

$\therefore$ $\frac{1}{3}\leqslant\frac{\sec^2x-\mathrm{tg}x}{\sec^2x+\mathrm{tg}x}\leqslant 3$.

方法七： 数学归纳法

数学归纳法和反证法一样，都是证明不等式的有力工具.证明有关自然n的命题常常考虑用数学归纳法.

例 11. 求证 $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots+\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}(n\in N,n\geqslant 2)$.

证明：(1)当$n=2$时，左式$=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，右式$=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

∵ $\frac{4}{3}=\frac{8}{6},\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{45}}{6}$,

∴ 不等式成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时不等式成立,则

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots+\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}.$$

当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots+\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\\&>\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\frac{\sqrt{2k+1}}{2}\cdot\frac{2k+2}{2k+1}\\&=\frac{\sqrt{4k^2+8k+4}}{2\sqrt{2k+1}}\\&>\frac{\sqrt{(2k+1)(2k+3)}}{2\sqrt{2k+1}}\\&=\frac{\sqrt{2(k+1)+1}}{2}.\end{aligned}$$

∴ 当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

由(1)、(2)可知,对于大于 1 的一切自然数 n 不等式成立.

评析:用数学归纳法证明不等式问题时,难点是由假设式推出当 $n=k+1$ 时不等式成立. 本例用的是放缩法. 在证明不等式的过程中,根据题目的特点,要具体问题具体分析,选用不同的方法.

例 12. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_n>0$,$a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$,试确定 a_n 和 $\frac{1}{n}$ 的大小关系,并加以证明.

解:∵ $a_n>0,a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$,

$\therefore\quad a_n(1-a_n)\geqslant a_{n+1}>0,$

$\therefore\quad 1-a_n>0,$

$\therefore\quad 0<a_n<1.$

$\therefore\quad a_1<\frac{1}{1};$

$$a_2\leqslant a_1-a_1^2=-(a_1-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2};$$

$$a_3\leqslant a_2-a_2^2=-(a_2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}.$$

$\because$ 函数 $y=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ 在区间 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 上是增函数，

$$\therefore\quad a_3<-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}<\frac{1}{3}.$$

猜想：$a_n<\frac{1}{n}$.

证明：(1)由上述可知，当 $n=1$ 和 $n=2$ 时命题成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时命题成立，即

$$a_k<\frac{1}{k}.$$

当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}a_{k+1}&\leqslant a_k-a_k^2\\&=-(a_k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$\because$ 函数 $y=-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ 在区间 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 上是增函数，并且 $\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_{k+1}&<-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{k-1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2(k+1)}\\&<\frac{k^2}{k^2(k+1)}=\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$