经济管理类教材

决策与博弈

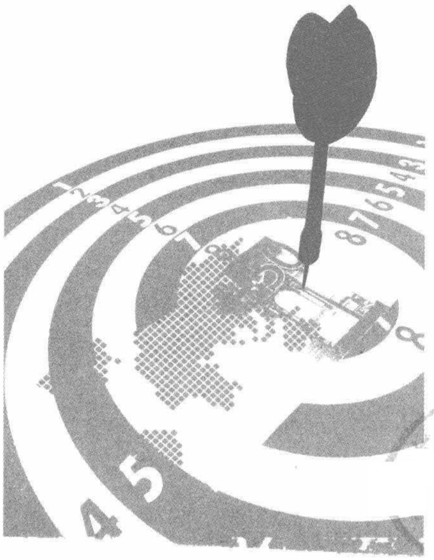
杨 莉 编著

JUECE YU BOYI

经济科学出版社
Economic Science Press

经济管理类教材

决策与博弈



杨 莉 编著

JUECE YU BOYI

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

决策与博弈／杨莉编著．—北京：经济科学出版社，2011.5

经济、管理类教材

ISBN 978－7－5141－0677－0

Ⅰ.①决…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①决策学－高等学校－教材

Ⅳ.①C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 084966 号

责任编辑：于　源

责任校对：徐领弟

版式设计：代小卫

技术编辑：邱　天

决策与博弈

杨　莉　编著

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142

总编部电话：88191217　发行部电话：88191540

网址：www.esp.com.cn

电子邮件：esp@esp.com.cn

汉德鼎印刷厂印刷

德利装订厂装订

710×1000　16 开　19 印张　340000 字

2011 年 5 月第 1 版　2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5141－0677－0　定价：35.00 元

前　　言

决策存在于社会生活的各个领域。所谓决策，就是作出决定，通常指从多种可能中作出选择。即人们为实现预定的目标，根据一定的条件，采用科学的方法和手段，从所有可供选择的方案中找出最满意的一个方案进行实施。

决策理论是有关决策概念、原理、学说等的总称，是把系统理论、运筹学、计算机科学等综合运用于管理决策问题，形成的一门有关决策过程、准则、类型及方法的较完整的理论体系。决策理论已经成为经济学和管理科学的重要分支，发挥着重要的作用，因此在相关专业的学习中，决策学是非常重要的专业课程。

博弈论主要研究决策主体的行为发生直接相互作用时的决策及其决策均衡问题的理论，它与常规决策的区别是，一般决策仅有一个决策者，其从个人效用最大化出发进行决策；博弈论中有多个决策主体，这些主体之间是利益相关的，因此博弈论主要讨论多个决策立体之间的策略互动关系，本书从决策机理的角度探讨了博弈模型。

无论是决策学还是博弈论，都是经济、管理专业的学生应该掌握的重要内容。而理工科专业的学生如果能掌握一些有关决策学、博弈论的相关内容，无论是对学生的成长和对学生学习过程中的方法论的探索都会有所帮助。

由于决策学和博弈论都需要涉及许多数学方法，需要涉及运筹学、系统工程方面的知识，本书较详细地讲解了这些内容，从在数学和经济、管理之间搭建学生尽可能容易通过的桥梁的角度进行编写，在理论阐述上力求简明扼要，为了方便读者学习，用大量算例来说明相关内容的原理和应用。这样可以避免产生数学基础好的专业的学生不知数学在

经济、管理专业如何应用，而经济、管理专业的学生，在学习中遇到有数学公式的内容时往往不知道公式的由来，因此相关内容学不深，或者不理解问题的原始背景和求解的理论基础，最终学不透的现象。

书中前三章涉及内容都是优化理论，讲述了决策学和博弈论中需要用到的涉及计算极值和最值问题的相关数学基础理论和方法。第 1 章分别讨论了一元函数的极值、多元函数的极值、凸（凹）函数的极值、海赛矩阵判断法求极值等；第 2 章详细讲述了利用单纯形方法求线性规划问题的最值；第 3 章从多目标优化的角度学习优化理论，内容包括多目标规划单纯形法、目标规划法、评价函数法、约束法与分层序列法等。第 4 章和第 5 章有针对性地介绍了决策分析的基础知识和相关的决策方法，包括决策的相关概念、决策的分类、系统结构模型化技术、不确定型决策、风险型决策、多属性决策、效用理论、层次分析法等。第 6、7、8 章分别从博弈的基础知识、静态博弈模型和动态博弈模型等方面介绍了博弈论的相关知识。

由于普遍觉得博弈论在本科阶段难学，开设一门课程难度大，而博弈的过程就是决策，所以书中将博弈论作为决策理论的一支进行讲解。本书可作为高等院校经济、管理、系统工程、理工科专业的高年级本科生的决策学的教材，也可作为经济、管理专业研究生的参考书籍，或为各级行政干部、企业管理人员、工程技术人员的参考书。

非常感谢董少宣同学为全书的电子文档录入和编辑付出的辛勤劳动，衷心感谢研究生项纯楠同学、李亚同学、温博同学、侯萌萌同学、温绵绵同学、张圆圆同学参与全书内容的讨论，并提出的宝贵意见，为本书的完成做出了很多工作。

由于作者水平有限，疏漏不当之处在所难免，衷心希望读者不吝赐教。

编 者

目　录

第 1 章

函数的极值与最值

极值和最值在处理实际问题时应用最为广泛，本章讲述了决策学和博弈论中需要用到的涉及计算极值和最值问题的相关数学基础理论和方法。分别讨论了一元函数的极值、多元函数的极值、海赛矩阵判断法求极值、凸（凹）函数的极值等。

1.1 一元及多元函数的极值

1.1.1 一元函数的极值

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内的任一点 x，有

$$f(x)<f(x_0)\ （或 f(x)>f(x_0)）$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）。

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点。极值是函数的局部性概念：极大值可能小于极小值，极小值可能大于极大值。最值是函数的全局性概念，极大值不一定是最大值，函数所有极大值中的最大的也不一定是最大值。

若 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 为函数的驻点。

函数的极值点必是函数的驻点或导数不存在的点；但是，驻点或导数不存在

的点不一定是函数的极值点。

例如：$y=x^2$，$x\in(-\infty, +\infty)$，在驻点 $x=0$ 处取得极小值；$y=|x|$，$x\in(-\infty, +\infty)$，在导数不存在的点 $x=0$ 处取得极小值。而 $y=x^3$（或 $y=x$），$x\in(-\infty, +\infty)$，在驻点 $x=0$ 处没有取得极值；$y=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$在 $x=0$ 处不可导，但在 $x=0$ 处没有取得极值。

在函数取得极值处，曲线的切线是水平的。但曲线上有水平切线的地方，函数不一定取得极值。例如：$y=x^2$，$x=0$ 处取得极值，有水平切线；$y=x^3$，在 $x=0$ 处上有水平切线，但没有取得极值。

定理 1（必要条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$。

证明 不妨设在 x_0 处取得极大值，$f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内，$f(x)<f(x_0)$，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0 \qquad (\Delta x>0)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0 \qquad (\Delta x<0)$$

由函数极限的局部保号性定理的逆定理①，有

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0$$

而 $f'(x_0)$ 存在，故 $f'(x_0)=0$。

这里用了当函数恒大于零时，其极限值可能为 0，如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

定理 1 就是说：可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点。但反过来，函数的驻点却不一定是极值点。

定理 2（第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0, \delta)$ 内可导。

---

① 函数极限的局部保号性定理：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）。

逆定理：在 x_0 的某去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）。

（1）如果 $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ 有 $f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ 有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

（2）如果 $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ 有 $f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ 有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

（3）如果当 $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ 及 $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ 时，$f'(x)$ 符号相同，则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值。

证明（1）利用拉格朗日中值定理[①]，由于 $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$，即 $x<x_0$，$f'(x)>0$，故

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)<0 \qquad (x<\xi<x_0)$$

即 $f(x)<f(x_0)$。当 $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$，即 $x>x_0$，$f'(x)<0$，故

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)<0 \qquad (x_0<\xi<x)$$

即 $f(x)<f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

（2）、（3）证明省略。

定理3（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，那么

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

证明（1）$\because f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0$

根据函数极限的局部保号性定理，存在 $\overset{0}{U}(x_0)$，当 $x\in\overset{0}{U}(x_0)$，有

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0$$

故 $f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$ 与 Δx 异号，当 $\Delta x<0$ 时，有

$$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0$$

当 $\Delta x>0$ 时，有 $f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0$，所以，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值。

同理可证（2）。

注 求极值的步骤：

①求导数 $f'(x)$；

②找出可能的极值点：方程 $f'(x_0)=0$ 的根或 $f'(x_0)$ 不存在的点；

③检查 $f'(x)$ 在可能极值点 x_0 左右的正负号，或 $f''(x_0)$ 的符号，判断是否

---

① 拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，在开区间 $(a,\ b)$ 内可导，那么在 $(a,\ b)$ 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立。

是极值点；

④若是，求出极值。

例 1 求函数 $y=x^4$ 的极值点。

解 令 $f'(x)=4x^3=0$，得驻点 $x=0$，由于 $f''(x)=12x^2$，$f''(0)=0$，不能用定理 3，但当 $x<0$，$f'(x_0)<0$，当 $x>0$，$f'(x_0)>0$，故 $y=x^4$ 在 $x=0$ 处取得极小值。

也就是说，定理 3 表明，如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$，那么该驻点 x_0 一定是极值点。但如果 $f''(x_0)=0$，定理 3 失效，只能用定理 2 进行判断。这时 $f(x)$ 在 x_0 处可能有极大值，也可能有极小值，也可能没有极值。例如：$f_1(x)=-x^4$，$f_2(x)=x^4$，$f_3(x)=x^3$，这三个函数在 $x=0$ 处就分别属于这三种情况。

例 2 求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极值。

解 $f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}$，当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$；当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 不存在。函数可能在这两点取得极值。见表 1－1

表 1－1

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	0 极大值	↘	$-\frac{1}{2}$ 极小值	↗

故函数 $f(x)$ 有极大值 $f(0)=0$，极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$。

1.1.2 一元函数的最值

最值的求法有两种：

（1）一般说来，求连续函数在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，首先求出函数的全部驻点和不可导点，计算这些点的函数值及区间端点处的函数值 $f(a)$ 及 $f(b)$，进行比较，找出其中的最大和最小值即可。

（2）如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有且仅有一个极大值，而无极小值，则此极大值即最大值。若 $f(x)$ 在

(a, b) 内有且仅有一个极小值，而无极大值，则此极小值即最小值。

很多求最大值和最小值的实际问题，是属于此种类型，对这种类型的求最大值和最小值的问题，可以用求极值的方法来解决。

例 3　求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $\left[-1, \frac{27}{8}\right]$ 的最大值和最小值。

解　前面例 2 已求了函数 $f(x)$ 的极大值和极小值，通常的做法将极值和区间端点处的函数值进行比较，找出其中的最大和最小值即可。

但可以更省一步，找出 $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在，即可能的极值点，和区间端点处的函数值进行比较即可。由于

$$f(-1)=-\frac{5}{2},\ f(0)=0,\ f(1)=-\frac{1}{2},\ f\left(\frac{27}{8}\right)=0$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-1, \frac{27}{8}\right]$ 上取得最大值 $f(0)=0$ 及 $f\left(\frac{27}{8}\right)=0$，取得最小值 $f(-1)=-\frac{5}{2}$。

例 4　在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内嵌入一内接矩形，使其边平行于椭圆的轴，且面积最大。

解　设 x，y 为矩形边之半长，则矩形面积为 $S=4xy$，由题设可知 (x, y) 为椭圆上的点。

此题用参数方程求解相对简单。由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

所以

$$S=4xy=4ab\sin t\cos t=2ab\sin 2t$$

$$S'=4ab\cos 2t$$

令 $S'=0$，得

$$t_1=\frac{\pi}{4}, \qquad t_2=\frac{3\pi}{4}$$

$$S''\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-8ab\sin 2t\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-8ab<0$$

$$S''\big|_{t=\frac{3\pi}{4}}=-8ab\sin 2t\big|_{t=\frac{3\pi}{4}}=8ab>0$$

故 $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=2ab$ 内接矩形的最大值，此时矩形的边长分别为 $2x=\sqrt{2}a$，$2y=\sqrt{2}b$。

例 5　铁路线上 AB 段的距离为 100km，工厂 C 距 A 处为 20km，$AC\perp AB$

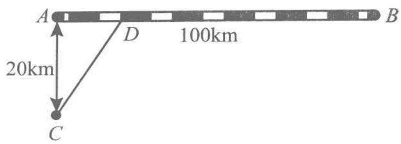


图 1－1

（图 1－1）。为了运输需要，要在 AB 线上选定一点 D 向工厂 C 修筑一条公路，已知铁路与公路每公里货运的运费之比为 3∶5，为了使产品从工厂运到消费点 B 的运费最省，问 D 点应选在何处？

解 设 D 点在铁路上距 A 点 x km 处，则 $BD=100-x$(km)，$CD=\sqrt{20^2+x^2}$(km)。

又设每公里铁路运费为 $3k$，公路运费为 $5k$（k 为常数，$k>0$），则总运费 W 为

$$W=3k(100-x)+5k\sqrt{x^2+20^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant 100)$$

令

$$W'=-3k+\frac{5kx}{\sqrt{x^2+20^2}}=0$$

得 $x=15$km。只要一个驻点，比较两个端点和驻点的函数值：

$$W(0)=400k, \qquad W(15)=380k$$

$$W(100)=5k\sqrt{100^2+20^2}=500k\sqrt{1+0.2^2}$$

从而当 $x=15$ 时 W 最小，所以 D 点应选在距离 A 点 15km 处。

1.2 多元函数的极值

1.2.1 多元函数的极值

定义 2 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的任意一点 (x, y)，如果

$$f(x, y)<f(x_0, y_0)$$

则称函数在 (x_0, y_0) 处有极大值；如果

$$f(x, y)>f(x_0, y_0)$$

则称函数在 (x_0, y_0) 处有极小值；极大值、极小值统称为极值。使函数取得极值的点称为极值点。

与导数在一元函数极值研究中的作用一样，偏导数也是研究多元函数极值的

主要手段。

若二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极值，那么固定 $y=y_0$，一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在 $x=x_0$ 点必取得相同的极值；同理，固定 $x=x_0$，$z=f(x_0, y)$ 在 $y=y_0$ 点也取得相同的极值。因此，由一元函数极值的必要条件，我们可以得到二元函数极值的必要条件。

定理4（必要条件） 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零，即

$$f_x(x_0, y_0)=0, \qquad f_y(x_0, y_0)=0$$

类似地，如果三元函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处具有偏导数，则它在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处有极值的必要条件为

$$f_x(x_0, y_0, z_0)=0, f_y(x_0, y_0, z_0)=0, f_z(x_0, y_0, z_0)=0$$

与一元函数的情形类似，对于多元函数，凡是能使一阶偏导数同时为零的点称为函数的驻点。

根据定理4，具有偏导数的函数的极值点必定是驻点。但是函数的驻点不一定是极值点，例如，点 $(0, 0)$ 是函数 $z=y^2-x^2$ 的驻点，但函数在该点并无极值。

如何判定一个驻点是否为极值点？下面的定理部分地回答了这个问题。

定理5（充分条件） 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有直到二阶的连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$。令

$$f_{xx}(x_0, y_0)=A, f_{xy}(x_0, y_0)=B, f_{yy}(x_0, y_0)=C$$

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处有极值，且当 $A>0$ 时有极小值 $f(x_0, y_0)$；当 $A<0$ 时有极大值 $f(x_0, y_0)$；

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处没有极值；

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可能有极值，也可能没有极值。

证明略。

注 在定理2中，如果 $AC-B^2=0$，则不能确定 $f(x_0, y_0)$ 是否是极值，需另做讨论。

根据定理1与定理2，如果函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，则求 $z=f(x, y)$ 的极值的一般步骤为：

①解方程组 $f_x(x, y)=0$，$f_y(x, y)=0$，求出 $f(x, y)$ 的所有驻点；

②求出函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数，依次确定各驻点处 A，B，C 的值，并根据 $AC-B^2$ 的正负号判定驻点是否为极值点。最后求出函数 $f(x, y)$ 在极值点

处的极值。

例 6 求函数 $f(x,\ y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解 解方程组

$$\begin{cases}f_x(x,\ y)=3x^2+6x-9=0\\ f_y(x,\ y)=-3y^2+6y=0\end{cases}$$

得驻点为（1，0），（1，2），（−3，0），（−3，2）。再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,\ y)=6x+6,\ f_{xy}(x,\ y)=0,\ f_{yy}(x,\ y)=-6y+6。$$

在点（1，0）处，$AC-B^2=12\times 6>0$，又 $A>0$，故函数在该点处有极小值 $f(1,\ 0)=-5$；

在点（1，2），（−3，0）处，$AC-B^2=-12\times 6<0$，故函数在这两点处没有极值；

在点（−3，2）处，$AC-B^2=-12\times(-6)>0$，又 $A<0$，故函数在该点处有极大值 $f(-3,\ 2)=31$。

例 7 某工厂生产Ⅰ、Ⅱ两种型号的产品，Ⅰ型产品的售价为 1 000 元/件，Ⅱ型产品的售价为 900 元/件，生产 x 件Ⅰ型产品和 y 件Ⅱ型产品的总成本为

$$40\ 000+200x+300y+3x^2+xy+3y^2$$

元。求Ⅰ、Ⅱ两种产品各生产多少时，利润最大？

解 设 $L(x,\ y)$ 为生产 x 件Ⅰ型产品和 y 件Ⅱ型产品时获得的总利润，则

$$\begin{aligned}L(x,\ y)&=1\ 000x+900y-(40\ 000+200x+300y+3x^2+xy+3y^2)\\ &=-3x^2-xy-3y^2+800x+600y-40\ 000\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}L_x(x,\ y)=-6x-y+800=0\\ L_y(x,\ y)=-x-6y+600=0\end{cases}$$

解方程组，得 $x=120$，$y=80$。又由

$$L_{xx}=-6<0=,\ L_{xy}=-1,\ L_{yy}=-6$$

可知

$$B^2-AC=(-1)^2-(-6)\cdot(-6)=-35<0$$

故 $L(x,\ y)$ 在驻点（120，80）处取得极大值，又驻点唯一。因而可以断定，当Ⅰ、Ⅱ两种产品分别生产 120 件和 80 件时，利润会最大，且最大利润为

$$L(120,\ 80)=32\ 000\ （元）$$

注 在讨论一元函数的极值问题时，我们知道，函数的极值既可能在驻点处取得也可能在导数不存在的点处取得。同样，多元函数的极值也可能在个别偏导数不存在的点处取得。例如，函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0，0）处有极大值，但

该函数在点（0，0）处不存在偏导数。因此，在考虑函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，还要考虑那些使偏导数不存在的点。

在通常遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，可以判断出函数 $f(x, y)$ 的最大值（最小值）一定在 D 的内部取得，而函数 $f(x, y)$ 在 D 内只有一个驻点，则可以肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值（最小值）。

1.2.2 多元函数的极值的拉格朗日乘数法

多元函数的极值另有一种直接寻求条件极值的方法，可以不必先把问题化到无条件极值的问题，这就是下面要介绍的拉格朗日乘数法。

现在先来寻求函数

$$z=f(x, y) \tag{1-1}$$

在条件

$$\varphi(x, y)=0 \tag{1-2}$$

下取得极值的必要条件。

如果函数（1-1）在 (x_0, y_0) 取得所求的极值，那么首先有

$$\varphi(x_0, y_0)=0 \tag{1-3}$$

我们假定在 (x_0, y_0) 的某一区域内 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均有连续的一阶偏导数，而 $\varphi_y(x_0, y_0)\neq 0$。由隐函数存在定理可知，方程（1-2）确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=\psi(x)$，将其代入式（1-1），结果得到一个变量 x 的函数

$$z=f[x, \psi(x)] \tag{1-4}$$

于是函数（1-1）取得所求的极值，也就是相当于函数（1-4）在 $x=x_0$ 取得极值。由一元可导函数取得极值的必要条件知道

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0, y_0)+f_y(x_0, y_0)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0 \tag{1-5}$$

而由（1-2）用隐函数求导公式，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=-\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}$$

把上式代入式（1-5），得

$$f_x(x_0, y_0)-f_y(x_0, y_0)\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}=0 \tag{1-6}$$

（1-3）、（1-6）两式就是函数（1-1）在条件（1-2）下在 (x_0, y_0) 取得极值的必要条件。

设$\frac{f_y(x_0,\ y_0)}{\varphi_y(x_0,\ y_0)}=-\lambda$，上述必要条件就变为

$$\begin{cases}f_x(x_0,\ y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,\ y_0)=0\\ f_y(x_0,\ y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,\ y_0)=0\\ \varphi(x_0,\ y_0)=0\end{cases} \tag{1-7}$$

若引进辅助函数

$$L(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\varphi(x,\ y)$$

则不难看出，（1-7）中前两式就是

$$L_x(x_0,\ y_0)=0,\ L_y(x_0,\ y_0)=0$$

函数 $L(x,\ y)$ 称为拉格朗日函数，参数 λ 称为拉格朗日乘子。

由以上讨论，我们得到以下结论：

拉格朗日乘数法 要找函数 $z=f(x,\ y)$ 在附加条件 $\varphi(x,\ y)=0$ 下的可能极值点，可以先作拉格朗日函数

$$L(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\varphi(x,\ y)$$

其中 λ 为参数。求其对 x 与 y 的一阶偏导数，并使之为零，然后与方程（1-2）联立起来：

$$\begin{cases}f_x(x,\ y)+\lambda\varphi_x(x,\ y)=0\\ f_y(x,\ y)+\lambda\varphi_y(x,\ y)=0\\ \varphi(x,\ y)=0\end{cases} \tag{1-8}$$

由此方程组解出 x，y 及 λ，这样得到的（x，y）就是函数 $f(x,\ y)$ 在附加条件 $\varphi(x,\ y)=0$ 下的可能极值点。

该方法还可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形。例如，要求函数

$$u=f(x,\ y,\ z,\ t)$$

在附加条件

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=0,\qquad \psi(x,\ y,\ z,\ t)=0 \tag{1-9}$$

下的极值，拉格朗日函数

$$L(x,\ y,\ z,\ t)=f(x,\ y,\ z,\ t)+\lambda\varphi(x,\ y,\ z,\ t)+\mu\psi(x,\ y,\ z,\ t)$$

其中 λ，μ 均为参数，求其一阶偏导数，并使之为零，然后与条件（1-9）中的两个方程联立起来求解，这样得出的（x，y，z，t）就是函数 $f(x,\ y,\ z,\ t)$ 在附加条件（1-9）下的可能极值点。至于如何确定所求得的点是否为极值点，在实际问题中往往可根据问题本身的性质来判定。

例 8 要造一个容量一定的长方体箱子，问选择怎样的尺寸，才能使所用的