普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

理工类

上册

方　钢 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（理工类）上册

主　编　方　钢
副主编　黄　刚　杨春华
　　　　赵云梅　陈　萍
参　编　严庆丽　何应辉
　　　　邓燕林　陈　劲

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是编者充分考虑了物理类和对数学要求比较高的专业对高等数学的需求，并结合自身长期从事高等数学教学的经验编写而成的。全书分为上、下两册，本书为上册，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和微分方程。

本书适合物理类、电类等对高等数学要求比较高的专业的学生学习使用，也可作为相关人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类. 上册/方钢主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-035269-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①方… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184519 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：刘小梅
责任印制：闫 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2012 年 8 月第一次印刷 印张：17 1/2
字数：373 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段.高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求,另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才,这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化,教学内容改革势在必行.高等数学课程是大学的重要基础课,是大学生科学修养和专业学习的必修课.编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命.

科学出版社"十二五"教材出版规划的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合,因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组,共同策划编写了新的系列教材,并列人科学出版社普通高等教育"十二五"规划教材出版项目.本系列教材以大众化教育为前提,以各专业的发展对数学内容的需要为准则,分别按理工类、经管类和化生地类编写,第一批出版的有高等数学(理工类)、高等数学(经管类)、高等数学(化生地类)、概率论与数理统计(理工类)、线性代数(理工类),以及可供各类专业选用的数学实验教材.教材的特点是,在不失数学课程逻辑严谨的前提下,加强了针对性和实用性.

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师.教材的第一稿已通过一届学生的试用,在征求使用本教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改,并通过项目专家组的审查,最后由科学出版社统一出版.在此对试用本教材的师生、项目专家组以及科学出版社表示衷心感谢.

高等教育改革无止境,教学内容改革无禁区,教材编写无终点.让我们共同努力,继续编出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材,为高等数学教育做出应有的贡献.

郭　震

2012年8月1日于昆明

前　　言

本书是普通高等教育“十二五”规划教材，是根据高等院校物理类高等数学教学大纲，结合编者多年的教学实践经验编写而成的。本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，难点分散，例题丰富，通俗易懂，每小节后配有习题，书末附有习题参考答案，便于自学。

本书的一个特点是在重视基本理论、基本运算的基础上，加强数学建模的应用。书中每章后配有相关的大量数学建模的例题与实际应用，经多年使用证明，此举对提高学生数学能力及数学意识有很好的效果。

本书的使用对象主要是高等院校理工类(物理类、电类、信息类等)的本专科学生，也可以作为有关教师及其他科研人员的参考书。为适应不同专业、不同学时、不同对象的使用，书中有的地方打了※号，可适时进行删减。

本书由云南省 6 所高等院校的 9 位教师共同编写而成。第 1 章由云南师范大学方钢老师编写；第 2 章、第 3 章由曲靖师范学院黄刚老师编写；第 5 章、第 6 章由保山学院杨春华老师编写；第 4 章、第 8 章由红河学院赵云梅老师编写；第 7 章由楚雄师范学院陈萍老师编写；第 9 章由昭通学院陈劲老师编写；第 10 章由红河学院何应辉老师编写；第 11 章由云南师范大学严庆丽老师编写；第 12 章由楚雄师范学院邓燕林老师编写；全书由云南师范大学方钢教授和严庆丽老师进行修改、整理及最后统稿。

本书的编写得到云南省数学学会、云南师范大学和云南省多所高校的大力支持，科学出版社龚建波、任俊红二位编辑为本书的出版做了大量繁杂而细致的工作。在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，编写时间较紧，书中仍可能存在疏漏和错误，敬请读者和同行给以批评指正。

编　者

2012 年 7 月

目　录

第 1 章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数、极限、函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

1.1　函　　数

1.1.1　常量与变量

定义 1.1　在某一过程中，数值保持不变的量称为常量(或常数)；数值不断变化的量称为变量(或变数).

一个量是常量还是变量，在具体问题中要作具体分析．例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看成常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量．以后，用字母 a，b，c，d，…表示常量，用字母 x，y，z，…表示变量．

1.1.2　区间与邻域

在数学中，常用区间表示一个变量的变化范围，下面介绍一些常用的区间符号．

设 a 和 b 都是实数，并且 $a<b$.

1. 区间

(1) 开区间

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

表示由满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示以 a，b 为端点，但不包含端点 a 和 b 的线段(图 1.1).

(2) 闭区间

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

表示由满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示以 a，b 为端点且包含 a 和 b 的线段(图 1.2).

(3) 左闭右开区间

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$

表示由满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示以 a，b 为端点且包含左端点 a 的线段(图 1.3).

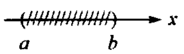

图 1.1

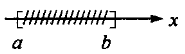

图 1.2

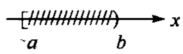

图 1.3

(4) 左开右闭区间

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

表示由满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示以 a,b 为端点且包含右端点 b 的线段(图 1.4).

左闭右开与左开右闭区间统称为半开半闭区间.

除了上述 4 种有限区间外，还有如下 5 种无限区间：

(1)

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$$

表示由大于 a 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示如图 1.5 所示.

(2)

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$$

表示由大于等于 a 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示如图 1.6 所示.

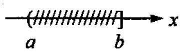

图 1.4

图 1.5

图 1.6

(3)

$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\}$$

表示由小于 a 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上表示如图 1.7 所示.

(4)

$$(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a\}$$

表示由小于等于 a 的全体实数 x 构成的集合，在数轴上的表示如图 1.8 所示.

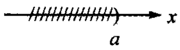

图 1.7

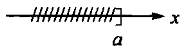

图 1.8

(5)

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

表示全体实数. 注意：“$+\infty$”(读作正无穷大)，“$-\infty$”(读作负无穷大)是引用的符号，不能作为数看待.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，就简称为“区间”，并且常用 I 表示.

2. 邻域(设 a 为实数)

(1) 设 δ 为任意一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，其中点 a 称为这个邻域的中心(图 1.9).

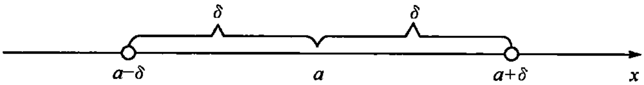

图 1.9

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此，

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x.

(2) 有时要用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心以后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

其中 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

注 1.1　在不需要强调半径大小的情况下，将邻域 $U(a,\delta)$ 简记为 $U(a)$.

1.1.3　函数

1. 函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循一定的变化规律，现在就两个变量的情况举三个例子.

例 1.1　圆的面积 S 与它的半径 r 之间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定，当半径 r 取定某一正的数值时，圆面积 S 相应有一个确定的值. ■

例 1.2　自由落体运动. 设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相互依赖关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中 g 为重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意确定一个数值时，由上式就可确定下落距离 s 的相应数值. ■

例 1.3　设有半径为 r 的圆，考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 S_n. 由图 1.10 可以看出，$S_n=2nr\sin\alpha_n$，其中 $\alpha_n=\frac{\pi}{n}$，所以内接正 n 边形的周长 S_n 与边数 n 之间的相互依赖关系由公式 $S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$ 给定. 当边数 n 在自然数 3,4,5,… 中任意取定一个数值时，由上式就可确定周长 S_n 的相应数值. ■

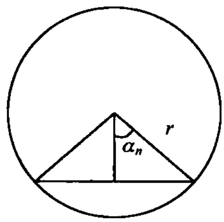

图 1.10

由上面三个例子可以看到，它们都表达了两个变量之间的相依关系. 这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.2　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$，其中 f 叫做对应法则，数集 D 叫做函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的每个数值时，对应函数值的全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域．

注 1.2　符号 $y=f(x)$ 表示两个数集间的一种对应关系，因此，也可以用 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等表示，但一个函数在讨论中应取定一种记法．当同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律，以免混淆．

注 1.3　在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，因此，当不考虑函数的实际意义，而只抽象地研究用算式表达的函数时，就约定：函数的定义域就是使算式有意义的全体实数 x 构成的集合．

例 1.4　函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $D=(-1,1)$．■

例 1.5　函数 $y=\ln(5x-4)$ 的定义域应满足 $5x-4>0$，故定义域为 $D=\left(\dfrac{4}{5},+\infty\right)$．■

例 1.6　函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $D=[-1,1]$．■

在函数关系中，对确定一个函数起决定作用的关键因素是对应法则 f 和定义域 D．今后，如果两个函数的对应法则 f 和定义域 D 都相同，则称两个函数为相同的(或者叫相等的)；否则，就称为不同的(或者叫不相等的)．至于自变量和因变量用什么记号表示则无关紧要，因此，只要定义域相同，对应法则相同，则这两个函数表示同一个函数．

例 1.7　下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$．

解　(1) 不相同，因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$．

(2) 不相同，因为对应法则不同，当 $x=-1$ 时，$f(-1)=-1$，$g(-1)=1$．

(3) 相同，因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应法则相同，定义域也相同，均为 $D=(-\infty,+\infty)$．■

2. 函数的表示法

1) 解析法

对自变量和常数施加四则运算、乘幂、取指数、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式．用解析表达式表达一个函数就称为函数的解析法，解析法也叫公式法．高等数学中讨论的函数大多由解析法表示，这是由于对解析表达式可以进行各种运算，便于研究函数的性质．这里有一点必须指出：用解析法表示函数不一定总是用一个式子表示，也可以分段用几个式子表示一个函数．另外，有些特殊函数并不是用解析式给出的，其对应关系是用“一句话”给出的，用约定的符号予以表示．

例 1.8　函数 $y=[x]=n(n\leqslant x<n+1, n$ 为整数)称为取整函数．例如，若 $x=1.5$，则 $[x]=1$；若 $x=\frac{5}{7}$，则 $[x]=0$；若 $x=-1.5$，则 $[x]=-2$；若 $x=\pi$，则 $[x]=3$. 也就是说，若 x 为任意一实数，则不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记为 $[x]$. 这一函数的图像是"阶梯"形，如图 1.11所示． ■

例 1.9　分段函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$，其图像如图 1.12 所示． ■

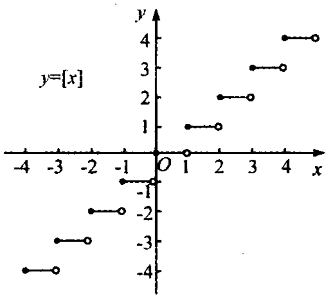

图 1.11

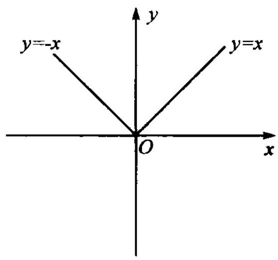

图 1.12

例 1.10　函数

$$y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,0,1\}$，其图像如图 1.13所示．

对于任何实数 x，关系式 $x=|x|\operatorname{sgn}x$ 总成立． ■

2) 表格法

在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用来表示函数关系，这样的表示法称为表格法．

3) 图示法

在有的问题中，很难找到一个解析函数表达式来准确地表示两个变量之间的关系．有时，虽然可以用解析表达式表示函数，但是为了使变量之间的对应关系更直观形象，常把两个变量之间的对应关系用某条曲线表示出来，这种方法称为图示法.

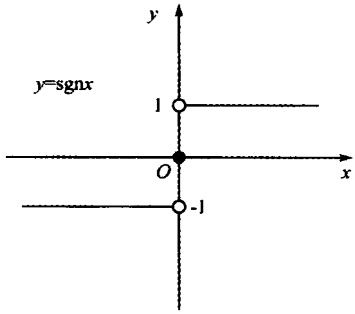

图 1.13

函数的上述三种表示法各有优缺点，在具体应用

时,常常是三种方法配合使用.

3. 函数的几种特性

1) 函数的有界性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在 K_1(或 K_2),使得 $f(x)\leqslant K_1$(或 $f(x)\geqslant K_2$)对任意一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上(或下)界,其中 K_1(或 K_2)称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上(或下)界. 如果存在正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对任意一 $x\in X$ 都成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例 1.11　正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数,因为对每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$. ■

例 1.12　函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内无上界,但有下界,如 1 就是它的一个下界,但当 $1<x<2$ 时总会有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<1$,故函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(1,2)$ 内有界.

■

2) 函数的单调性

定义 1.4　设有函数 $y=f(x)(x\in D)$,区间 $I\subset D$,如果对于 I 上的任意两点 x_1, x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加(或减少)的. 如果对于 I 上的任意 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 或($f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上为单调增加(或减少)的. 严格单调增加和严格单调减少的函数统称为严格单调函数,单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

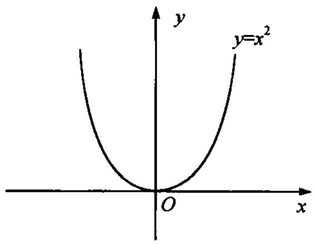

图 1.14

例 1.13　函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增加的,在 $(-\infty,0)$ 上是严格单调减少的,在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的(图 1.14). ■

例 1.14　证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的(图 1.15).

证　设 x_1,x_2 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意两点,当 $x_1<x_2$ 时,只需证明 $f(x_1)=x_1^3<x_2^3=f(x_2)$,即证明 $x_1^3-x_2^3<0$. 事实上,

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),$$

而当 $x_1<x_2$ 时,$x_1-x_2<0$,

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0,$$

故 $x_1^3-x_2^3<0$,即 $x_1^3<x_2^3$. ■

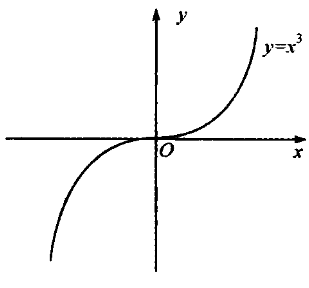

图 1.15

3) 函数的奇偶性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)(x\in D)$.

(1) 若对于任何 $x\in D$,都恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为 D 上的偶函数．偶函数的图形关于 y 轴对称．

(2) 若对于任何 $x\in D$,都恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为 D 上的奇函数．奇函数的图形关于原点对称．

例 1.15　$y=x^3,y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x\neq0),y=\sin x$ 都是奇函数,因为$(-x)^3=-x^3,\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x\neq0),\sin(-x)=-\sin x.$ ■

例 1.16　$y=x^2,y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x\neq0),y=\cos x$ 都是偶函数,因为$(-x)^2=x^2$,$\frac{1}{\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}(x\neq0),\cos(-x)=\cos x.$ ■

例 1.17　$y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数,因为

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq f(x),$$
$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x\neq -f(x).$$ ■

4) 函数的周期性

定义 1.6　设函数 $y=f(x)(x\in D)$,若存在 $T>0$,对于一切 $x\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,T 为 $f(x)$的一个周期．通常所说的周期函数的周期是指最小正周期．

周期函数图像的特点是自变量每增加或少一个周期后,图像重复出现．

例 1.18　函数 $\sin x,\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x,\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数．

注 1.4　并非每一个周期函数都有最小正周期．例如,狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是周期函数,任何正有理数都是它的周期,但它没有最小正周期． ■

1.1.4　反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W,因为W 是函数值组成的数集,所以对于任意一 $y_0\in W$,必有 $x_0\in D$,使得

$$f(x_0)=y_0 \tag{1.1}$$

成立,这样的 x_0 可能不止一个．就图 1.16 而言,在 W 上取定一点 y_0,作平行于 x 轴的直线 $y=y_0$,这条直线与 $y=f(x)$的图形的交点就是适合式(1.1)的 x_0. 在图中,这样的交点有两个,它们的横坐标分别为 x_0'及 x_0''. 一般地,如果对于任意 $y\in W$,在 D 上

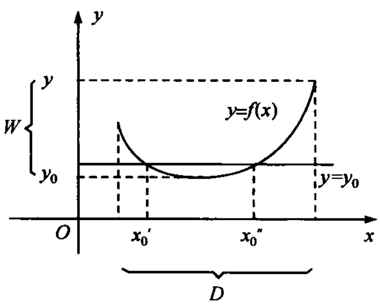

图 1.16

可以唯一地确定一个数值 x 与 y 对应，并且 x 适合 $f(x)=y$，这里，如果把 y 看成自变量，x 看成因变量，按照函数概念，就得到一个新的函数，这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=\varphi(y)$，它的定义域为 W，值域为 D. 对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数 .

注 1.5　反函数的存在是有条件的，这就是下面的反函数存在定理(这里不证明).

定理 1.1　严格单调函数必有反函数，并且严格增加(减少)函数的反函数也必是严格增加(减少)的 .

例 1.19　设直接函数为 $y=ax+b$，$y=x^3$，则其反函数分别为

$$x=\frac{y-b}{a},\quad x=\sqrt[3]{y}.$$

■

习惯上，往往用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示因变量 . 如果把 $x=\varphi(y)$ 中的 y 改成 x，x 改为 y，则得 $y=\varphi(x)$. 因为函数的实质是对应关系，只要对应关系不变，自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的，因此，函数 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数 . 例如，例 1.19 中的反函数可分别写为 $y=\dfrac{x-b}{a}$，$y=\sqrt[3]{x}$.

把直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图像画在同一个坐标平面上，这两个图像是关于直线 $y=x$ 对称的(图 1.17).

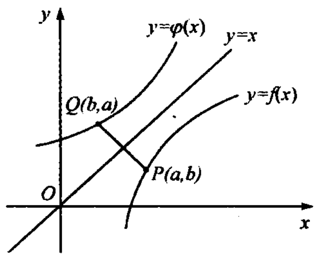

图 1.17

因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 的图像上的点，则 $Q(b,a)$ 是 $y=\varphi(x)$ 的图像上的点 . 反之，若 $Q(b,a)$ 是 $y=\varphi(x)$ 的图像上的点，则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 的图像上的点，而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 对称 .

1.1.5　复合函数

研究函数时，常把某些函数看成是由几个简单函数复合而成的复合函数，这样对函数的研究会很方便 . 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的复合函数 .

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，值域为 W_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 $W_2\subset D_1$，则对于任一 $x\in D_2$，定义了一个新函数，称之为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，$u=\varphi(x)$ 称为中间变量，函数 $y=f(u)$ 称为外函数，函数 $u=\varphi(x)$ 称为内函数 . 注意：复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 要求内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域要包含在外函数 $y=f(u)$ 的定义域之内 .

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，也就是 $u=\sin x$ 的定义域 . ■

必须注意的是，不是任何两个函数都能复合成一个复合函数 . 例如，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，而 $u=2+x^2$ 的值域是 $[2,+\infty)$，并且 $[-1,1]\cap[2,+\infty)=\varnothing$，故这

两个函数不能进行复合.

复合函数也可以由多个函数相继复合而成. 例如,由三个函数 $y=\sqrt{u}$, $u=\cos v$, $v=\frac{x}{2}$ 相继复合可得复合函数 $y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$,其中 u 和 v 都视为中间变量.

习 题 1.1

1. 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x-1}$;　　(2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;

(3) $y=\lg\frac{1+x}{1-x}$;　　(4) $y=\frac{2x}{x^2+3x+2}$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数的值:

$f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{a}\right)$, $f(x_0)$, $f(x_0+h)$.

4. 试证明下列结论:

(1) 设 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,则 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$;

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{x}+x$,则 $f(x^2)+2=[f(x)]^2$.

5. 下列哪些函数是偶函数,哪些是奇函数,哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\sqrt{1+x^2}\sin x$;

(3) $y=\frac{2^x+2^{-x}}{4}$;　　(4) $y=\sin x-\cos x+1$;

(5) $y=\begin{cases}x^2+x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2-x+1, & x<0.\end{cases}$

6. 设下面所考虑的函数都定义在对称区间 $[-l,l]$ 上,证明

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

7. 试证明下列结论:

(1) 函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的;

(2) 函数 $f(x)=\lg\sqrt{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=-\sqrt[3]{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$.

10. 求由下列所给函数复合而成的函数：

(1) $y=u^2, u=\sin x$；　(2) $y=\cos u, u=\sqrt{x}$；

(3) $y=2^u, u=\sqrt{t}, t=1+x^2$.

11. 设 $f(x)=x^3-x, \varphi(x)=\sin 2x$，求 $f(\varphi(x)), \varphi(f(x))$ 及 $f(f(x))$.

12. 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x), f(x+2)$.

1.2 初等函数

以下 6 类函数称为基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

基本初等函数的简单性质在中学里都已详细讲过，下面仅结合图像把其性质再叙述一下.

1.2.1 常数函数

函数 $y=C(x\in(-\infty,+\infty))$ 叫做常数函数，其中 C 为常数. 该函数的图像是一条平行于 x 轴的直线，在 y 轴上的截距为 C.

1.2.2 幂函数

函数 $y=x^m$ (其中 m 为任意实数)叫做幂函数，它的定义域随 m 的不同而不同，但无论 m 为何值，在区间 $(0,+\infty)$ 内，幂函数总是有定义的.

对于函数 $y=x^m$，当 $m=1,2,3,\dfrac{1}{2},-1$ 时是最常见的幂函数，其图像如图 1.18 所示.

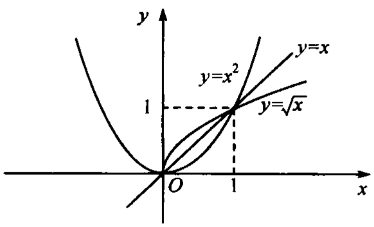

图 1.18

1.2.3 指数函数

函数 $y=a^x$ (其中 a 为常数且 $a>0, a\neq 1$)叫做指数函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

因为对于任何实数 x，总有 $a^x>0$，又 $a^0=1$，所