高中数学应用题
解题思路与技巧

费得意　　　陆[illegible]

高中数学应用题解题思路与技巧

—征服高中数学的制高点

费得意

陕西人民教育出版社

高中数学应用题解题思路与技巧

——征服高中数学的制高点

费得意

陕西人民教育出版社出版

（西安长安路南段376号）

陕西省新华书店发行　　陕西省印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32开本　6.5印张　141千字

1991年2月第1版　　1991年2月第1次印刷

印数：1—7,400

ISBN 7—5419—1408—8/G·1242

定价：2.50元

前　言

中学数学的教学目的是："使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。"这就启迪我们："运用数学知识来分析和解决实际问题"是中学数学学习目的的制高点，也是中学数学基本任务的落脚点，而高中数学中的应用题就是这一制高点的内核。掌握应用题的思维和解法，这不但能巩固学生的双基知识，更重要的是能激励他们为实现四个现代化学好数学的积极性，培养其科学态度和辩证唯物主义的观点，从而能提高思维素质，开拓数学智力，增强为四化服务的基本功。

本书主要介绍高中数学各学科中应用题的基本题型、解题途径和思维方法。编写本书的目的在于帮助青年学生提高正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力；逐步培养学生分析问题和运用所学知识解决实际问题的能力。

这是一本课外读物。它的特点是：例题力求精选，典型且具有一定的覆盖面；题解做到明练，剖析透彻；方法多样，步骤完整。每章后面附有小结，归纳基本原理和解题规律。

读者在阅读每一个例题的解答时，最好先独立思考，然

后带着问题看例题，这样可以收到举一反三、触类旁通的效果。滴水穿石、聚沙成塔；只有开动脑筋，才能迎来科学的春天。

费得意

1989. 2

目　录

第一章 概 述

高中数学中的应用题蕴藏量大、覆盖面宽．它是教材习题中的精髓，也是检验我们对双基知识的理解和运用的试金石，从而确立了它在教材中的突出地位．我们在解答应用题的过程中，由于概念性强、知识性广、技巧性高、综合性大，所以又是解题中的难点．克服这一难点的关键是：

（一）理解题意，追根索源．

初中代数曾经告诉我们列方程解应用题的步骤和方法，主要的一点也是深刻理解题意．既要分清谁是已知量，谁是未知量，又要发现已知量和未知量之间的等量关系；更为重要的是还必须切实弄清题目中牵涉到的每个概念的内涵和外延，掌握其实质；深刻理解题目中所要用到的某些性质的内容．追根索源、分析对比寻找解题的突破口．

（二）迂回进攻、旁敲侧击．

选好了突破口就可以率领优势兵力正面强攻，固若金汤的城堡定能指日可下．

然而，《四渡赤水》给我们的启示是，有时旁敲侧击、迂回进攻，还能收到比正面进攻更快更大的效果．这正是：山重水复疑无路，柳暗花明又一村．

例1．四位男同学、两位女同学、两位老师坐在一排照相，如果他们各自都要分别坐在一起，有几种排法？

分析：这是有关排列、组合内容的应用题．为了解答这

个问题，首先应该思考下面几个问题：

1．回忆一下排列、组合的定义，分清楚本题研究的是排列问题还是组合问题。

2．什么是加法定理？什么是乘法定理？

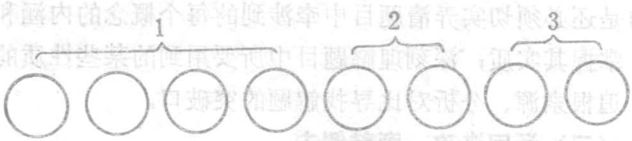
3．本题的已知条件、未知条件、约束条件各是什么？根据这些条件如何选择解题的突破口？

在弄清排列组合的特征时，记住下面的歌诀是有帮助的：

分清组合与排列，元素顺序本质别；

顺序无关是组合，顺序相关是排列。

由题目的特征条件——排队照相可以知道本题研究的是排列问题。为什么呢？如果我们先请四位男同学坐在1号位置上（如图），两位老师坐在2号位置上，两位女同学坐在3号位置上，这是一种排法。

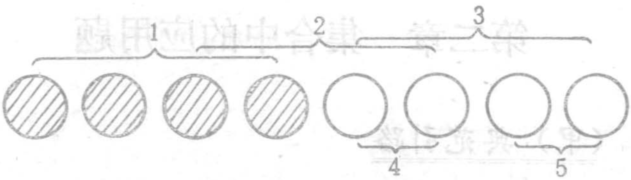


很显然，如果四位男同学坐的位置不变，而两位老师与两位女同学调换一个位置坐，这时人员（元素）没有变，位置（元素顺序）变了，照出来的底片同第一种排法是不同的，因而这是一个排列问题。

题目中的约束条件告诉我们：四位男同学两位女同学和两位老师各自都必须坐在一起，这是题中的特殊矛盾也是主要矛盾，我们选择它作为主攻的突破口。

我们先考虑四位男同学的位置，四位男同学必须坐在图

中的1、2、3组位置上，才能保证两位女同学、两位老师坐在一起，符合题中的约束条件。



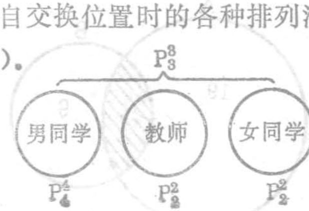
当四位男同学坐在第一组位置时，这时两位女同学和两位老师就在4、5两组位置上选一组坐好，因而有P_2^1种选法。值得注意的是不管选择哪一种坐法，四位男同学在那一组坐位上本身又有P_4^4种排法；同理，两位女同学和两位老师又各有P_2^2种排法。所以，当四位男同学坐在第一组位置时的排法种数，由乘法定理可知是 $P_2^1 \cdot P_4^4 \cdot P_2^2 \cdot P_2^2$种。

同理，当四位男同学坐在第2组或第3组位置时也各有P_2^1。$P_4^4 \cdot P_2^2 \cdot P_2^2$种。

所以，符合题意的排列种数应该是

$3 \cdot P_2^1 \cdot P_4^4 \cdot P_2^2 \cdot P_2^2 = 576$（种）

如果我们换一种战术，调换一个进攻方向也可以攻克这个碉堡。我们先把四个男同学、两位女同学、两位老师各看作一个整体，而三个整体（这里看作是3个元素）的全排列数是P_3^3种，每个整体内的元素各自交换位置时的各种排列法又分别有P_4^4、P_2^2和P_2^2种（如图）。



因此，总的排列种数是：

$P_3^3 \cdot P_4^4 \cdot P_2^2 \cdot P_2^2 = 576$（种）。

第二章　集合中的应用题

（甲）典范引路

例2. 某班有45个学生，其中有20个学生有哥哥，有10个学生有姐姐，有哥哥也有姐姐的学生只有1人，求下列学生人数：

（1）有哥哥没有姐姐；

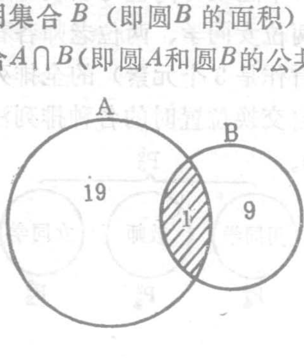
（2）有姐姐没有哥哥；

（3）有哥哥或有姐姐；

（4）哥哥、姐姐都没有。

解： 为了解决集合中的直观性，往往借助于范恩——欧拉图。它可以用矩形、圆或椭圆为界的平面面积来表示集合。

我们用集合A（即圆A的面积）表示有哥哥的学生集合，用集合B（即圆B的面积）表示有姐姐的学生集合，那么集合$A\cap B$（即圆A和圆B的公共部分，也就是图中的阴影部分）就表示既有哥哥也有姐姐的学生集合。



（1）依题意，有哥哥也有姐姐的学生只有1人，如图可知有哥哥没有姐姐的学生人数应该是：

$20-1=19$（人）；

（2）有姐姐没有哥哥的学生人数是：

$10-1=9$（人）；

（3）“有哥哥或有姐姐”包括了三种情况：只有哥哥、只有姐姐、哥哥姐姐都有。

所以有哥哥或有姐姐的学生人数是：

$19+9+1=29$（人）；

也可以这样列式：

$20+10-1=29$（人）；

（4）哥哥、姐姐都没有的学生人数是：

$45-(19+9+1)=16$（人）。

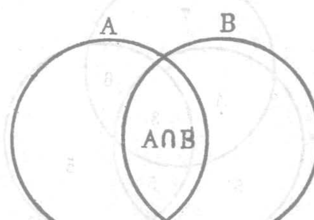
例3．220个学生中，175个爱踢足球，140个爱打篮球，20个两样都不爱。试问有几个学生只爱踢足球，几个学生两样都喜欢？

分析：我们先来弄清一个原理：

设A为有限集合，则A的基数（元素个数）用符号$n(A)$表示。由范恩图容易验证以下公式的正确性：

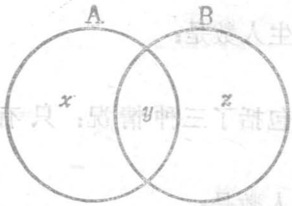
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

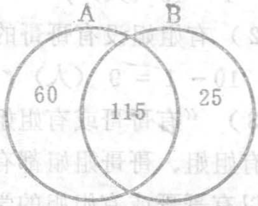
如果设A表示踢足球学生的集合，B表示打篮球学生的集合，用x、y和z分别表示图中各个区域的基数（元素个数），（如P6图）



这时，$n(A)=175$，即$x+y=175$；…………（1）

$n(B)=140$，即$y+z=140$；…………（2）





$n(A \cap B)=y$，（两样都喜欢的学生数）。

$n(A \cup B)\ =x+y+z$　表示除去两样球类都不爱的学生总数，

即$n\ (A \cup B)=220-20=200$；

$\therefore x+y+z=200$……………………………………（3）

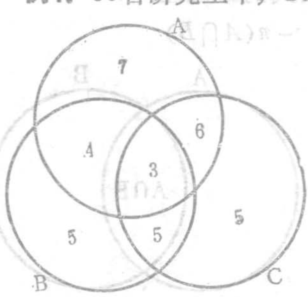
由（3）－（1），得

$x=00-140=60$。（只爱踢足球人数）

$\therefore y=175-x=175-60=115$。（两样球类都 喜欢的学生数）。

答：有60个学生只爱踢足球，115个学生两样都 喜 欢。

例4．35名研究生中，20名是物理研究生，17名 是 化学研究生，19名是生物研究生。又其中既研究物理又研究化学的 7 名，既研究化学又研究生物的 8 名，既研究物理又研究生物的 9 名。如果每人至少研究一门课程，问三门课程都研究的有几人？



解：由范恩图容易验证以下公式正确：

$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-$

$n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

设$A=$｛物理研究生｝，$B=$｛化学研究生｝，$C=$｛生物研究生｝。于是，

$n(A)=20$，$n(B)=17$，$n(C)=19$，

$n(A\cap B)=7$，$n(B\cap C)=8$，$n(A\cap C)=9$，

又$n(A\cup B\cup C)=35$。（即全部研究生）。

∴三门课程都研究的研究生人数共有：

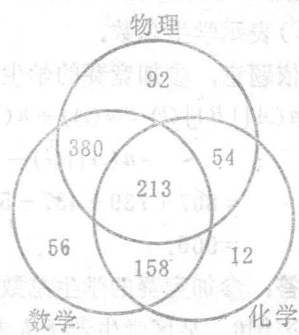
$$n(A\cap B\cap C)=n(A\cup B\cup C)+n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A)-n(B)-n(C)$$

$$=35+7+8+9-20-17-19$$

$$=3$$。

答：三门课程都研究的3人。

例5. 某校先后举行数、理、化三科竞赛，学生中至少参加一科的：数学807人，物理739人，化学437人；至少参加两科的：数学、物理593人，数学、化学371人，物理、化学267人；三科都参加的有213人。试计算参加竞赛的学生总数。



解一：用三个圆分别代表数学、物理、化学各科竞赛的参加人数。那么三圆的公共部分是三科竞赛都参加的人数：213人。

显然，只参加数学、化学竞赛的人数是$371-213=158$；

只参加物理、化学竞赛的人数是

$$267-213=54;$$

只参加数学、物理竞赛的人数是

$593-213=380$；

只参加数学竞赛的人数是

$807-213-158-380=56$；

只参加物理竞赛的人数是

$739-213-54-380=92$；

只参加化学竞赛的人数是

$437-213-54-158=12$；

总人数是

$213+54+158+380+92+12+56=965$。

答：参加竞赛的学生总数是965人。

解二：用A、B、C分别表示参加数学、物理、化学各科竞赛的学生集合，则$n(A)$、$n(B)$、$n(C)$分别表示参加数学、物理、化学竞赛的人数；$n(A\cap B)$、$n(A\cap C)$、$n(B\cap C)$分别表示参加数学、物理，数学、化学，物理、化学竞赛的人数；$n(A\cap B\cap C)$表示三科都参加竞赛的人数；$n(A\cup B\cup C)$表示学生总数。

依题意，参加竞赛的学生总数是

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)\\&\quad-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\&=807+739+437-593-371-267+213\\&=965.\end{aligned}$$

答：参加竞赛的学生总数是965人。

※**例6**. 某区学生若干人参加数学竞赛，每个学生得分都是整数，总分为8250分，前三名的分数是88、85、80，最低是30分，得同一分数的学生都不超过3人。问至少有多

少学生得分不低于60（包括前三名）？

解：除了前三名外，得分只能在30——79分之中，总分为$8250-(88+85+80)=7997$。

要使及格人数少，必然不及格人数多。因此依题意可知在30——59分里每种分数的人数尽可能多（即每种分都有三人），这些人的总分应为：

$$3\times(30+31+32\cdots\cdots+59)=4005。$$

剩下的$7997-4005=3992$分应分配给得60—79分的人，假定从60—79每种分数都是三人，共60人，总分为：

$$3\times(60+61+62+\cdots\cdots+79)=4170。$$

这样一来比3992多出178分，所以应从这60人中减掉尽可能多的人数使分数够分配。如果减掉3个得60分的人，剩下57人得总分为： $4170-180=3990$。

但它比3992分又少2分，所以57人不够，60到79分之间的人数至少是58人，即把多余的2分给一个原来得58分的人让他得60分。

因此，不少于60分的学生总数（包括前三名）应不少于61人。

（乙）练习消化

1．某中学共有学生900人，其中男生528人，高中生312人，高中男生192人，团员670人，男团员336人，高中团员247人，问高中男团员有几人？ （165人）

2．有甲、乙、丙三部新电影，至少看过其中一部电影片的有18人；看过甲、乙、丙片的分别为9人、8人、11人；同时看过甲、乙片的5人，看过乙、丙片的3人，看过

甲、丙片的4人。三部电影片全都看过的几人？

（2人）

※3．40名研究生，其中36人的数学成绩不低于80分，35人的英语成绩不低于80分。若40人中每人这两科成绩都至少有一科不低于80分，问两种都不低于80分的有多少人？仅数学不低于80分的有多少人？仅英语不低于80分的有多少人？

（31人；5人；4人。）

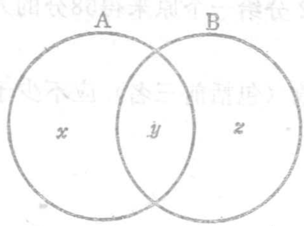
（丙）小结提高

解答集合中的应用题必须抓住两点：

第一点：分析题意，依题意画出范恩图，通过范恩图直观地理解集合之间的相互关系，从而发现解题的途径。

第二点：深刻理解下面两个公式的意义：

（1）$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。



用范恩图验证如下：

$\because\quad n(A)=x+y,$

$n(B)=y+z,$

$n(A\cap B)=y,$

$n(A\cup B)=x+y+z,$

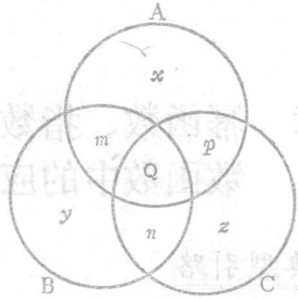
$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

（2）$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$。

用范恩图进行验证：

$\because\quad n(A)=x+m+Q+p,\ n(B)=m+y+n+Q,$

$n(C)=p+Q+n+z,$



$$n(A\cap B)=m+Q,\quad m(B\cap C)=n+Q,$$

$$n(A\cap C)=p+Q,\quad n(A\cap B\cap C)=Q。$$

$$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$$

$$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=(x+m+Q+p)+(m+y+n+Q)+(p+Q+n$$

$$+z)-(m+Q)-(p+Q)-(n+Q)+Q$$

$$=x+y+z+m+n+p+Q$$

$$=n(A\cup B\cup C)。$$