陈祖明 周家胜 编著

高等学校研究生教材

矩阵论引论（第2版）

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等学校研究生教材

矩阵论引论

(第2版)

陈祖明　周家胜　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书为工科院校硕士研究生矩阵理论教材，内容包括：矩阵的初等性质；线性代数基础；矩阵的几种重要分解；矩阵的广义逆；矩阵分析以及矩阵的 Kronecker 积。

本书叙述深入浅出，思路清晰，并配有大量习题，既可作为硕士研究生的教材，又可作为自学读物，也可作为工科院校有关专业教师的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论引论/陈祖明，周家胜编著. -- 2 版. -- 北京：北京航空航天大学出版社，2012. 10

ISBN 978 - 7 - 5124 - 0933 - 0

Ⅰ. ①矩… Ⅱ. ①陈…②周… Ⅲ. ①矩阵论—研究生—教材 Ⅳ. ①O151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 212086 号

矩阵论引论(第 2 版)

陈祖明　周家胜　编著

责任编辑　李　青　李　梅　胡衡兵

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http://www. buaapress. com. cn

发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026

读者信箱：bhpress@263. net　邮购电话：(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×1 092　1/16　印张：15　字数：384 千字

2012 年 10 月第 2 版　2012 年 10 月第 1 次印刷　印数：3 000 册

ISBN 978 - 7 - 5124 - 0933 - 0　定价：34. 00 元

再版前言

《矩阵论引论》第1版自1998年发行至今，已多次重印，主要用作我校硕士研究生“矩阵论”课程的教材和部分兄弟院校相关课程的教学参考。由于在该书的使用过程中发现了不少印刷错误，也由于矩阵理论近十多年来的长足发展，使该书的有些内容已落后于时代，于是决定再版。

这次再版，仍保留第1版的风格。主要在以下几方面进行了修改：

1. 修正了所有印刷错误；
2. 改写了部分内容的论述和定理的证明方法，使之更清晰简明；
3. 对部分不必要的内容和习题做了删改；
4. 加强了某些定理的结论。

做以上修改的目的是使本书更具科学性，并能在教学中发挥更好的作用。尽管作者努力要达到上述目的，但由于水平所限，书中难免还有不足之处，还望专家不吝指正。

陈祖明

2012年3月

于北京航空航天大学

前　言

由于在近代数学、工程技术、经济理论及管理科学中，大量地涉及矩阵理论的知识，因此，矩阵理论自然就是学习和研究上述学科必不可少的基础之一。

另一方面，矩阵理论发展到今天，已经形成了一整套的理论和方法，内容非常丰富，文献和专著浩如瀚海。这就给在专门科技领域中工作而又必须用到矩阵知识的人们，特别是工程技术人员带来了许多困难。本书的编写目的就是想为上述各类人员架设一座通向矩阵理论的桥梁，并通过这座桥梁使读者能尽快地得到各自需要的矩阵知识。

编写中所遇到的最大困难恐怕算是材料的取舍了。期望编写一本适合各种专业需要的教材当然是不明智的，也是作者能力所不及的。即使勉强写了出来，恐怕其结果要么显得冗长，要么形如蜻蜓点水，令人抓不着要领。这当然不是人们所期望的。因此，我们的编写原则是：重点突出点儿，起点高一点儿，论述详细点儿，联系实际点儿。而为选材得当，我们又广泛征求了各有关专业人员的意见。按照这些意见和作者多年来从事矩阵论教学的体会，同时依照国家教委关于工科硕士研究生“矩阵理论”教学大纲的规定，最后选定了矩阵的初等理论、线性空间、矩阵分解、矩阵分析、广义逆矩阵及矩阵的拉直运算等为本书基本内容。我们认为，这些内容在矩阵理论中既有基本理论意义，又有重要应用价值。

学习本书的读者只须具备工科院校本科生必需的线性代数、高等数学和少量复变函数知识就可以了。为了检验读者对各章节内容理解的程度，同时也为了扩大读者的知识面，我们在各节后面大都安排了一些习题，其中带“*”号的题目要求读者有一定的创造力才能完成。读者应力求完成不带“*”号的题目，而对带“*”号的则应量力而行，不可强求。

本书共分 6 章，前 3 章由陈祖明副教授执笔，后 3 章由周家胜副教授执笔。由于我们的水平有限，书中错误和疏漏之处在所难免，敬祈有关专家和读者不吝指正。

在本书的编写过程中得到北京航空航天大学柳重堪教授、王纪文教授、陆震教授、程鹏教授等的无私帮助。本书脱稿后，又承蒙史荣昌教授、杨刚副教授审阅全稿，并提出许多中肯的修改意见，在此一并表示衷心的感谢！

陈祖明、周家胜

1997 年 9 月

符 号 说 明

$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore - Penrose 广义逆
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左逆
$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右逆
$\boldsymbol{O}$	所有元素为 0 的矩阵
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵,对角线元素为 1,其余元素为零的矩阵
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第(i,j)元素
$\sigma(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱,$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值集合
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径,$\max\{\lvert\lambda\rvert \mid \lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间,$\boldsymbol{A}$ 的核
$\mathbf{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域,$\boldsymbol{A}$ 的列空间
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数
$\det\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹,$\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和
$\mathbf{R}$	实数的集合,实直线
$\mathbf{R}^{n}$	n 维实坐标向量空间
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m\times n$ 阶实矩阵空间
$\mathbf{R}_{r}^{m\times n}$	所有秩为 r 的 $m\times n$ 阶实矩阵集合
$\mathbf{C}$	复数集,复平面
$\mathbf{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 阶复矩阵空间
$\mathrm{Re}\,\lambda$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}\,\lambda$	复数 λ 的虚部
$\mathbf{E}^{n}$	n 维欧氏空间
X^{C}	子空间 X 的代数补
$X^{\perp}$	集合 X 的正交补
$(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y})$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$(\cdot\mid\cdot)$	内积
$\dot{+}$	直和
$\otimes$	直积
$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交、垂直
$X\cap Y$	集合 X 与 Y 的交集
$X\dot{+}Y$	子空间 X 与 Y 的直和
$\boldsymbol{X}\dot{+}\boldsymbol{Y}$ 或 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的直和
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的直积,Kronecker 积

$L(X,Y)$	从空间 X 到 Y 的线性变换空间
$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\dim X$	空间 X 的维数
$\mathrm{null}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 或线性算子 $\boldsymbol{A}$ 的零度
$\mathrm{Span}[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]$	向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 张成的线性子空间，张空间
$P_{L,M}$	沿空间 M 向空间 L 的投影
$\vec{\mathbf{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的拉直
$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$	矩阵 $\mathbf{Y}$ 关于矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的微分
$\max\limits_{x\in S} f(x)$	$f(x)$在 S 上的最大值
$\min\limits_{x\in S} f(x)$	$f(x)$在 S 上的最小值
$\inf\limits_{x\in S} f(x)$	$f(x)$在 S 上的下确界
$\sup\limits_{x\in S} f(x)$	$f(x)$在 S 上的上确界
$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为对角元的 $n\times n$ 阶对角矩阵
$\mathbf{R}(T)$	线性变换 T 的值空间
$N(T)$	线性变换 T 的零空间或核
$m_A(\lambda)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式
$m_T(\lambda)$	线性变换 T 的最小多项式
$\boldsymbol{A}^{(i)}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(i)-逆
$\boldsymbol{A}\{i\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(i)-逆的集合
$\boldsymbol{A}^{\{i,j,\cdots,k\}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,\cdots,k\}$-逆
$\boldsymbol{A}\{i,j,\cdots,k\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i,j,\cdots,k\}$-逆的集合
$\mathscr{B}_X$	空间 X 的基底
$m_{\mathscr{B}_X,\mathscr{B}_Y}(T)$	线性变换 $T\in L(X,Y)$关于基底偶$(\mathscr{B}_X,\mathscr{B}_Y)$的矩阵表示
$m_{\mathscr{B}_X}(T)$	线性变换 $T\in L(X,Y)$关于基底 $\mathscr{B}_X$ 的矩阵表示
$\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^n$	实数域上 n 元复坐标向量所形成的线性空间
$\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{m\times n}$	实数域上 $m\times n$ 阶复矩数所形成的线性空间
$\mathbf{C}[x]_n$	复系数 n 次多项式空间
$\mathbf{R}[x]_n$	实系数 n 次多项式空间
$\mathbf{C}[x]$	复系数多项式空间
$\mathbf{R}[x]$	实系数多项式空间
$p(x)\mid q(x)$	多项式 $q(x)$可被多项式 $p(x)$整除
$\mathbf{E}(\lambda)$	特征值 λ 的特征子空间
$\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似
$X\simeq Y$	空间 X 与空间 Y 同构
$\mathbf{C}^n$	n 维复坐标向量空间
L－S 解	方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解
L－N 解	方程组 $Ax=b$ 的最小范数解
L－S－N 解	方程组 $Ax=b$ 的最小二乘最小范数解

目　　录

第 1 章　矩阵的初等性质

本章的目的是对工科院校本科学生必备的矩阵知识，特别是矩阵的数值特征（秩、行列式、迹等）方面的知识加以复习和提高，对大部分结论将不加证明。这一方面是因为这些证明在几乎所有的线性代数教材中都可以找到；另一方面是为了避免使本书篇幅过大。

1.1　矩阵及其初等运算

1.1.1　矩阵和向量

$m\times n$ 个元素排成的矩形阵称为矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}\stackrel{\mathrm{d}}{=}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\tag{1.1}$$

或

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$$

其元素 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$一般取自某特定的域*，但本书仅考虑其元素取自复（或实）数域。符号 $m\times n$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的阶。$n\times n$ 阶矩阵称为n 阶正方矩阵或n 阶方阵或n 阶矩阵。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，意味着它们的阶相同且对应元素相等。矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\stackrel{\mathrm{d}}{=}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\tag{1.2}$$

和矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\stackrel{\mathrm{d}}{=}\begin{bmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1}\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn}\end{bmatrix}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\tag{1.3}$$

分别称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵和共轭转置矩阵，其中 $\bar{a}$ 表示复数 a 的共轭复数。

满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵；满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为共轭对称矩阵，也称为Hermite 矩阵；满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反对称矩阵，满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为反 Hermite 矩阵。它们显然都是正方矩阵。

---

* 域的概念可参看谢邦杰编《线性代数》（1978 年版）第 277 页或本书定义 2.1.1。

一个形如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

的矩阵,即其第 j 列中的第 j 行位置上的元素为 1,其余元素为零($j=1,2,\cdots,n$)的 $n\times n$ 阶矩阵称为 $n\times n$ 阶单位矩阵,记为 $\boldsymbol{I}_n$,或简记为 $\boldsymbol{I}$。

今后我们以大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\cdots$ 表示矩阵;而以小写希腊字母 $\alpha,\beta,\cdots$ 表示数字;又以 $\mathbf{R}$ 表示全体实数所组成的集合;以 $\mathbf{C}$ 表示全体复数所组成的集合。全体 $m\times n$ 阶、元素为实数的矩阵所组成的集合记成 $\mathbf{R}^{m\times n}$,即

$$\mathbf{R}^{m\times n} = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} = [a_{ij}], a_{ij} \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n\} \tag{1.5}$$

类似地可定义记号 $\mathbf{C}^{m\times n}$。显然 $\mathbf{R}^{m\times n}\subset\mathbf{C}^{m\times n}$。

设 $\boldsymbol{A}=[a_{i,j}]\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\alpha\in\mathbf{C}$,下列矩阵

$$\boldsymbol{G} = [a_{ij} + b_{ij}] = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{D} = [\alpha a_{ij}] = \alpha\boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

分别称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和及 $\boldsymbol{A}$ 与 α 的积。

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbf{C}^{n\times p}$,称矩阵

$$\boldsymbol{F} = \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big]_{m\times p} \overset{\mathrm{d}}{=} \boldsymbol{AB} \tag{1.8}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 的积。显然要使 $\boldsymbol{AB}$ 有意义,必须且只须 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。其次要注意,一般来说 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$。如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 成立,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是(关于乘法运算)可交换矩阵。如果 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 且存在 $\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵或可逆矩阵,并称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆;否则便称 $\boldsymbol{A}$ 是一个奇异矩阵或不可逆矩阵。若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$。可逆矩阵的逆是唯一的。

命题 1.1.1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{G} \in \mathbf{C}^{m\times n}$,$\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{C}$,则有

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; (2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{G})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{G}$;

(3) $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})= \alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$; (4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$;

(5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$; (6) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$。

命题 1.1.2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{m\times n}$;$\boldsymbol{G},\boldsymbol{D} \in \mathbf{C}^{n\times p}$,$\alpha,\beta \in \mathbf{C}$,则有

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{D})=\boldsymbol{AG}+\boldsymbol{AD}$; (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{G}=\boldsymbol{AG}+\boldsymbol{BG}$;

(3) $\alpha(\beta\boldsymbol{A})=(\alpha\beta)\boldsymbol{A}$ (4) $\alpha(\boldsymbol{AG})=(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{G}$;

(5) $(\boldsymbol{AG})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$; (6) $(\boldsymbol{AG})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$;

(7) $\boldsymbol{AI}_n=\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$; (8) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{DF})=(\boldsymbol{AD})\boldsymbol{F}$,但 $\boldsymbol{F}\in\mathbf{C}^{p\times q}$。

命题 1.1.3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ 均为可逆矩阵,则有

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1}$;

(4) $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 均可逆,且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \qquad (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

由 m 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 组成的有序组

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m) \tag{1.9}$$

或

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

称为m 元坐标向量，简称为 m 元向量或向量。元素 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$称为向量的分量。

有时为了区别起见，又称形如式(1.9)的向量为行向量，而称形如式(1.10)的向量为列向量。显然，向量(1.9)可以看成 $1\times m$ 阶矩阵，而向量(1.10)可以看作 $m\times 1$ 阶矩阵。

一个列向量(1.10)有时又记作

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$$

若 $a_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,m)$，则记形如式(1.10)的向量全体为 $\mathbf{R}^m$；若 $a_i\in\mathbf{C}(i=1,2,\cdots,m)$，则记之为 $\mathbf{C}^m$。

今后我们将用小写英文字母 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\cdots$来表示向量。

注 1　由于向量是矩阵的特殊形式，因此命题 1.1.1 和命题 1.1.2 对向量也适用。

注 2　各个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$均为 0 的矩阵称为 $m\times n$ 阶零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或简记为 $\boldsymbol{O}$，它在矩阵运算中的地位相当于数 0 在数的运算中的地位。

注 3　今后和式 $\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}$ 都简写成 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，并称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差。

习　题　1.1

一

1. 设 $\boldsymbol{x}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，试计算(1) $\boldsymbol{xy}$；(2) $\boldsymbol{yx}$；(3) $(\boldsymbol{xy})^2\overset{\mathrm{d}}{=}(\boldsymbol{xy})(\boldsymbol{xy})$。

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 k 阶正方矩阵，定义 $\boldsymbol{A}^n=\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}^{n\text{个}}$，试计算

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n$$

3. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

试计算$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)$。

4. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$称为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素。如果 $\boldsymbol{A}$ 的非主对角线上的元素均为 0，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对角矩阵。证明：

(1) 两个 n 阶对角矩阵之和与积仍为 n 阶对角矩阵；数乘一个对角矩阵也是一个对角

矩阵。

(2) 如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素互不相同,则凡与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵必为对角矩阵。

5. 如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的所有元素都等于同一数 α,则 $\boldsymbol{A}$ 叫做一个纯量矩阵。证明:一个 n 阶矩阵能与一切 n 阶方阵可交换的充要条件是它为一个 n 阶纯量矩阵。

二

1. 证明:对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,恒有 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq \boldsymbol{I}_n$。
2. 证明:如果 $\boldsymbol{A}$ 非奇异,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 亦然,且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}}$。
3. 证明:$(\boldsymbol{AB}\cdots\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;$(\boldsymbol{AB}\cdots\boldsymbol{C})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\cdots\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$。
4. 证明:对任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{H}}$ 恒有意义且为一个 Hermite 矩阵。
5. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有性质 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}_{n\times n}$,则 $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$ 必为非奇异矩阵,并且 $(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$。其中 k 为正整数。
6. 如果非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素的和均为一常数 α,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 每行元素之和必均为 α^{-1}。

1.1.2 矩阵的分块乘法与初等变换

定义 1.1.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,$\boldsymbol{A}$ 的第 i_1 行,i_2 行,…,i_r 行和第 j_1 列,j_2 列,…,j_s 列交叉处的元素所排成的 $r\times s$ 阶矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $r\times s$ 阶子块,记为

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix} \tag{1.11}$$

以后总假定 $i_1<i_2<\cdots<i_r$,$j_1<j_2<\cdots<j_s$,故有

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s} \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

特别地,由 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行($1\leqslant r\leqslant n$)所组成的子块为

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{i_11} & a_{i_12} & \cdots & a_{i_1n} \\ a_{i_21} & a_{i_22} & \cdots & a_{i_2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r1} & a_{i_r2} & \cdots & a_{i_rn} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

并被简记为

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \hline & & & \end{Bmatrix} \tag{1.14}$$

由第 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列($1\leqslant j\leqslant s$)所组成的子块为

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_s} \\ a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_s} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

并被简记为

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\rule{4em}{0.4pt}} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix} \tag{1.16}$$

而 A 本身也可以看作是一个子块，

$$A = \mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} \rule{3em}{0.4pt} \\ \rule{3em}{0.4pt} \end{Bmatrix}$$

按矩阵乘法的定义知 AB 的第 i 行第 j 列的元素是由 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素相乘之和得到，由此可得

命题 1.1.5　$\mathrm{BL}_{AB}\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix}=$

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \multicolumn{4}{c}{\rule{4em}{0.4pt}} \end{Bmatrix}\cdot \mathrm{BL}_B\begin{Bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\rule{4em}{0.4pt}} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix} \tag{1.17}$$

特别地，AB 的第 i 行为

$$\mathrm{BL}_{AB}\begin{Bmatrix} i \\ — \end{Bmatrix}= \mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i \\ — \end{Bmatrix}\mathrm{BL}_B\begin{Bmatrix} — \\ — \end{Bmatrix}= \mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i \\ — \end{Bmatrix}\cdot B \tag{1.18}$$

AB 的第 j 行为

$$\mathrm{BL}_{AB}\begin{Bmatrix} — \\ j \end{Bmatrix}= \mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} — \\ — \end{Bmatrix}\mathrm{BL}_B\begin{Bmatrix} — \\ j \end{Bmatrix}= A\cdot \mathrm{BL}_B\begin{Bmatrix} — \\ j \end{Bmatrix} \tag{1.19}$$

进一步有

命题 1.1.6　$\mathrm{BL}_{AB\cdots HK}\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix}=$

$$\mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ \multicolumn{4}{c}{\rule{4em}{0.4pt}} \end{Bmatrix}\cdot B\cdots H\cdot \mathrm{BL}_K\begin{Bmatrix} \multicolumn{4}{c}{\rule{4em}{0.4pt}} \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

特别地有

$$\mathrm{BL}_{AB\cdots HK}\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}= \mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i \\ — \end{Bmatrix}\cdot B\cdots H\cdot \mathrm{BL}_K\begin{Bmatrix} — \\ j \end{Bmatrix} \tag{1.21}$$

$$\mathrm{BL}_{AB\cdots HK}\begin{Bmatrix} i \\ — \end{Bmatrix}= \mathrm{BL}_A\begin{Bmatrix} i \\ — \end{Bmatrix}\cdot B\cdots HK \tag{1.22}$$

$$\mathrm{BL}_{AB\cdots HK}\begin{Bmatrix} — \\ j \end{Bmatrix}= AB\cdots H\cdot \mathrm{BL}_K\begin{Bmatrix} — \\ j \end{Bmatrix} \tag{1.23}$$

下面介绍矩阵的分块乘法。

设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，将 A，B 分成一些子块如下：

$$
\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{A} = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\
\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{r} m_l = m \\
&\sum_{i=1}^{s} n_s = n \\
&\sum_{j=1}^{t} p_j = p
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{B} = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\
\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}
$$

分块时,只作这样一点限制,即对 $\boldsymbol{A}$ 的列的分法必须与对 $\boldsymbol{B}$ 的行的分法一致。在上面,矩阵右边的数 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 和 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 分别表示其左边子块的行数;矩阵上面的数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 和 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 分别表示其下面子块的列数。在这样分块以后,可以形式地把子块看作一个元素,从而 $\boldsymbol{A}$ 就形式地成为一个 $r\times s$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 就形式地成为一个 $s\times t$ 阶矩阵。然后按矩阵的乘法规则求出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的形式乘积 $\boldsymbol{C}$ 如下:

$$
\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{C} = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \cdots & p_t \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t} \\
\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2t} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{C}_{r1} & \boldsymbol{C}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}
$$

其中 $\boldsymbol{C}_{hk} = \sum\limits_{l=1}^{s} \boldsymbol{A}_{hl}\boldsymbol{B}_{lk}(h=1,2,\cdots,r;k=1,2,\cdots,t)$。由于分块时作了上述一点限制,所以这里的等式不仅是形式上的,而且子块 $\boldsymbol{A}_{hl},\boldsymbol{B}_{lk}$ 作为矩阵$(l=1,2,\cdots,s)$真的可以相乘,其积 $\boldsymbol{A}_{hl}\boldsymbol{B}_{lk}$ 又都是 $m_h\times p_k$ 阶矩阵$(i=1,2,\cdots,s)$,故又可以相加,其和 $\boldsymbol{C}_{hk}$ 自然就是一个 $m_h\times p_k$ 矩阵,也就是说等式 $\boldsymbol{C}_{hk} = \sum\limits_{l=1}^{s} \boldsymbol{A}_{hl}\boldsymbol{B}_{lk}$ 真是一个矩阵的等式。进一步,我们可以证明(证明见谢邦杰编《线性代数》,1978 年版 P63)。

定理 1.1.7 两个可以相乘的矩阵按上述一点限制分块后,得出的形式乘积等于真积。

例 1 设正方矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为正方矩阵且均有逆。证明 $\boldsymbol{A}$ 必有逆,其逆为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix}$$

证明 显然,如果能求出 $\boldsymbol{A}$ 的逆,则证明了 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的存在。在此,设

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{W} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 分别与 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 同阶。于是由逆的定义有