○ 大学数学系列教材

○ 总主编　辛小龙　罗新兵

高等数学（第二版）下

○ 编者　阎恩让　曹吉利
薛西峰　荔　炜

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

○ 大学数学系列教材

○ 总主编 辛小龙 罗新兵

GAODENG SHUXUE

高等数学（第二版）下

○ 编者 阎恩让 曹吉利
薛西峰 荔 炜

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是由西北大学、陕西师范大学牵头，陕西省部分高校联合编写的大学数学系列教材之一，该系列教材共包括《高等数学》（上、下）、《线性代数》及《概率论与数理统计》4 册。作者根据教学实际，对该系列教材作了修订，本书为《高等数学》（第二版）（下）。内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。

本书适合高等学校非数学类专业本专科学生作为教材使用，也可作为工程技术人员及自学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下/辛小龙，罗新兵主编；阎恩让等编. --2 版. --北京：高等教育出版社，2013. 1

ISBN 978-7-04-036567-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①辛… ②罗… ③阎… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 308500 号

策划编辑 张长虹　　责任编辑 杨 帆　　封面设计 张 志　　版式设计 余 杨
插图绘制 尹文军　　责任校对 窦丽娜　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京四季青印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×960mm　1/16		
印　张	20	版　次	2007 年 8 月第 1 版
字　数	370 千字		2013 年 1 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2013 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	29.30 元

物 料 号　36567-00

郑重声明

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879
反盗版举报传真　(010)82086060
反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn
通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部
邮政编码　100120

目　录

第7章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应，将平面上的图形和方程对应，从而用代数方法研究几何问题. 空间解析几何可以看做是平面解析几何的推广.

空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上，用代数方法讨论空间的几何图形. 本章首先建立空间直角坐标系，其次引进向量并介绍向量的运算，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴，它们都以定点 O 为原点，且取相同的长度单位，这三条数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）. 它们的正向符合右手系（以右手握住 z 轴，当右手的四个手指由 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向）. 通常将 x 轴、y 轴放置在水平面上，z 轴为铅垂线，符合右手系，这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系 $Oxyz$（图 7－1），点 O 称为坐标原点，每两条坐标轴确定的平面称为坐标面，分别是 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，称为八个卦限. 并逐个编号为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，分别称为第一卦限、第二卦限、……、第八卦限（图 7－2）.

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧（图 7－1）及正等侧（图 7－3）.

设 M 为空间的一点（图 7－4），过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R，其在相应的数轴上的坐标依次为 x,y,z，从而得到一个有序数组 (x,y,z)；反之，给定一有序数组 (x,y,z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $OP=x,OQ=y,OR=z$，然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个平面确定了唯一的交点 M. 这样，空间点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 称 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

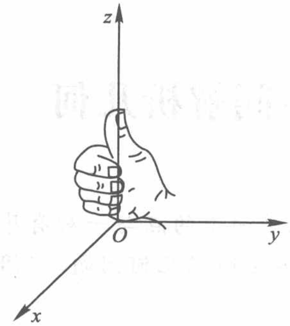

图 7－1

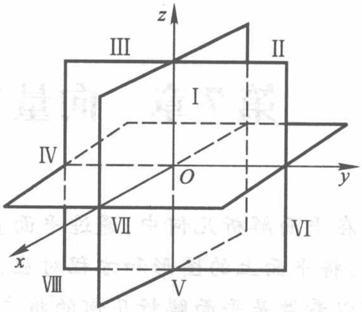

图 7－2

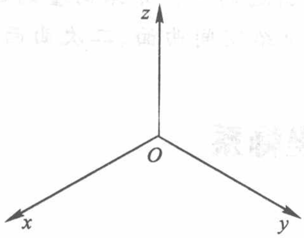

图 7－3

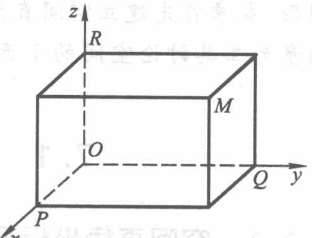

图 7－4

问题　坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征？

7.1.2　空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（图 7－5）. 因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2\\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |NM_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

这就是两点间的距离公式.

例 1　设 P 是空间内一点，其坐标为 (x,y,z)，即 $P(x,y,z)$，求

（1）点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何？

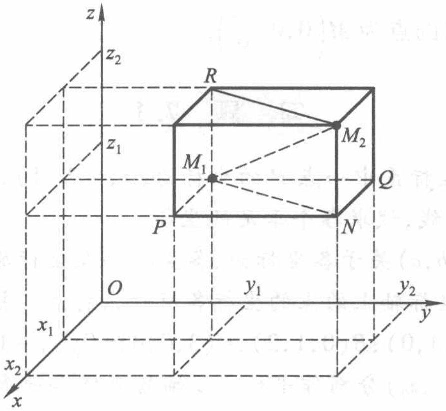

图 7-5

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何？

解 根据点与坐标的关系得：

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x,0,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0,y,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0,0,z)$.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足之坐标为 $(x,y,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足之坐标为 $(0,y,z)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 zOx 坐标面的垂足之坐标为 $(x,0,z)$.

例 2 设 $P(1,2,3)$，该点关于各坐标轴与坐标面对称点之坐标是什么？

解 根据点与坐标轴、坐标面的对称关系得：

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1,-2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1,2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1,-2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1,2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1,2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1,-2,3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$，根据题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即 $\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2} = \sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$,

化简得 $z=\frac{14}{9}$,故所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习　题　7.1

1. 设空间直角坐标系中一点 P 的坐标为 $(3,-2,1)$,从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线,试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a,b,c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点? 指出下列各点的位置.

$$A(3,4,0);B(0,1,2);C(3,0,0);D(0,-1,0).$$

4. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上,其底面的中心在坐标原点,底面的顶点在 x 轴上和 y 轴上,求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴间的距离.

7. 在 yOz 面上,求与三点 $A(3,1,2)$,$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1,2,3)$,$P_2(2,3,1)$,$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

7.2　向量及其线性运算

7.2.1　向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时,常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,将这种既有大小又有方向的量,称为向量(或矢量).

在数学上,往往用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点,M_2 为终点的有向线段所表示的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 7-6). 有时也用黑体小写字母或上面加箭头的小写字母来表示向量,如 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模(也称为向量的范数),记为 $|\cdot|$,如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$,$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量. 模为零的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{0}$,其方向可任意选取.

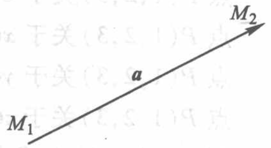

图 7-6

在这里我们只研究与起点无关的向量,即只考虑向量的大小和方向,而不论

它的起点在什么位置,这种向量称为自由向量. 由于只讨论自由向量,所以如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观上看,就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量的方向相同或相反,就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

7.2.2 向量的线性运算(加减法、数乘向量)

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连接 AC,向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 7-7(a),称作向量加法的三角形法则.

仿此,也有向量加法的平行四边形法则(图 7-7(b)).

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(图 7-7(c)).

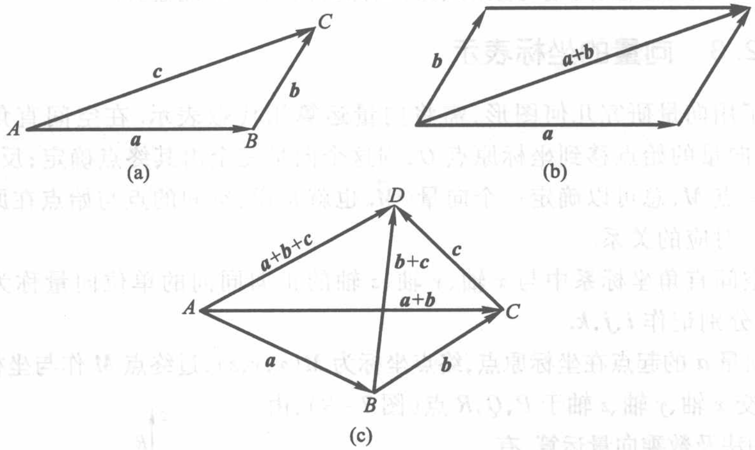

图 7-7

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$,由此,我们把 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差,记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$(图 7-8).

2. 向量与数的乘法

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量,λ 是一个非零实数,则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$;

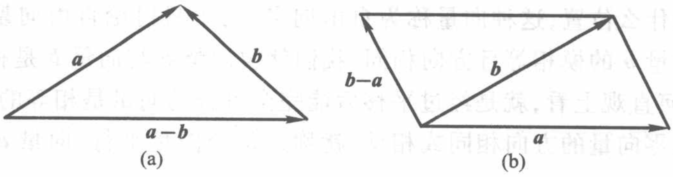

图 7－8

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证，向量与数的乘法满足以下运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ,μ 都是常数.

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，由数乘向量的规定可知，向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模等于 1，且与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，记作 $\boldsymbol{a}^0$ 或 $\boldsymbol{e}_a$，即 $\boldsymbol{e}_a=\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

7.2.3　向量的坐标表示

为了用向量研究几何图形，需将向量运算用代数表示. 在空间直角坐标系中，若将向量的始点移到坐标原点 O，则这个向量完全由其终点确定；反过来，任给空间一点 M，总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 也就是说，空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点，终点坐标为 $M(x,y,z)$，过终点 M 作与坐标轴垂直的平面，交 x 轴、y 轴、z 轴于 P,Q,R 点(图 7－9)，由向量的加法及数乘向量运算，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

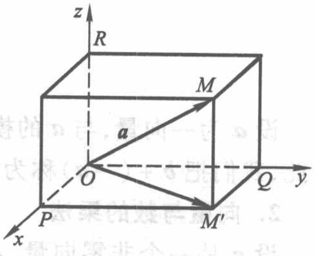

图 7－9

称(1)式为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便，亦记

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z), \tag{2}$$

称(2)式为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

将向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中,如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,根据向量的线性运算,如图 7-10,得

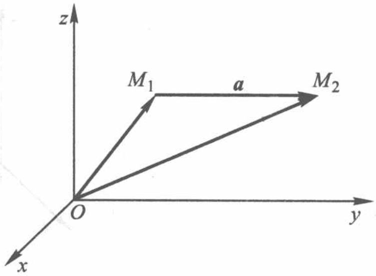

图 7-10

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

若记 $x_2-x_1=a_x,y_2-y_1=a_y,z_2-z_1=a_z$,则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量的坐标,可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z).$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},$$

即

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)(\lambda\text{ 为常数}).$$

例 1 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,证明:$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

证明 必要性.如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,根据数乘向量的规定,$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 且 $\lambda\neq0$,即有 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$,根据二向量相等有 $a_x=\lambda b_x,a_y=\lambda b_y,a_z=\lambda b_z$,从而

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

充分性.如果 $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$,设其比为 λ,于是 $a_x=\lambda b_x,a_y=\lambda b_y,a_z=\lambda b_z$,即 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,根据向量平行的含义,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

例 2 设 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 为已知两点,而在直线 AB 上的点 M 分

有向线段$\overrightarrow{AB}$为两个有向线段$\overrightarrow{AM}$和$\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于某数 $\lambda(\lambda \neq -1)$（图 7－11），即$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$，求分点 M 的坐标(x,y,z).

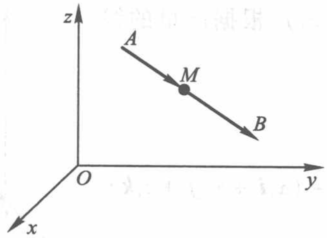

图 7－11

解　因为$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$在同一直线上（图 7－11），所以依题意有$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$，而

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此
$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}).$$

从而
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}),$$

即

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \frac{1}{1+\lambda}((x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2,y_2,z_2)) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2).\end{aligned}$$

由此即得点 M 的坐标分别为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

点 M 叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点. 当$\lambda = 1$ 时，点 M 是有向线段$\overrightarrow{AB}$的中点，其坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

7.2.4　向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示，为了应用上的

方便,有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\overrightarrow{M_1M_2}$,根据两点间距离公式

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

即

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$,我们可以用它与三个坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$来表示它的方向(图 7-12).称 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

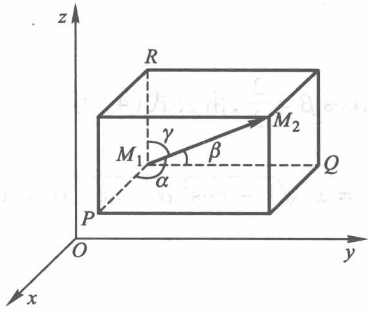

图 7-12

因为$\triangle M_1PM_2,\triangle M_1QM_2,\triangle M_1RM_2$ 都是直角三角形,所以

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

由上式易得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.\tag{4}$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则有

$$e_a = a^0 = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{|a|}(a_x, a_y, a_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

即与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量可由其方向余弦表示.

例 3　已知 $M_1(2,2,\sqrt{2})$, $M_2(1,3,0)$, 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 1, -\sqrt{2})$, $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$;

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2},\ \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi,\ \beta = \frac{\pi}{3},\ \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

例 4　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, 又 $|\boldsymbol{a}| = 6$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解　因为 $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, 由公式(4)得

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = \pm\frac{2}{3},$$

根据公式(3)得

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha = 6 \times \frac{1}{3} = 2,$$

$$a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta = 6 \times \frac{2}{3} = 4,$$

$$a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma = 6 \times \left(\pm\frac{2}{3}\right) = \pm 4.$$

所以

$$\boldsymbol{a} = (2,4,4)\ 或\ \boldsymbol{a} = (2,4,-4).$$

习　题　7.2

1. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

2. $\triangle ABC$ 的边 AB 被点 M,N 分成三等份: $|AM| = |MN| = |NB|$, 设 $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{b}$, 试求 $\overrightarrow{CM}$.

3. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G, O 为坐标原点, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{r}_3$. 证明: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}$

$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$.

4. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,试求 $4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 的坐标表示式.

5. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取 $|\overrightarrow{AB}|=34$,试求点 B 的坐标.

6. 向量 $\boldsymbol{a}=(4,-4,7)$,$\boldsymbol{a}$ 的终点 B 的坐标为 $(2,-1,7)$,求它的始点 A 的坐标及 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

7. 设 $|\boldsymbol{a}|=5$,方向余弦 $\cos\alpha=0,\cos\beta=\dfrac{1}{2},\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 试求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

8. 一向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 6,$\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴正向的夹角分别为 $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}$. 求 $\boldsymbol{a}$ 及其同向单位向量.

9. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

10. 在第一卦限内,求与坐标轴成等角的单位向量.

11. 已知三角形的三个顶点是 $A(3,6,-2),B(7,-4,3),C(-1,4,-7)$. 求其重心坐标.

7.3 数量积 向量积 *混合积

7.3.1 向量的数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,记位移 $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{s}$. 由物理学知,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 7-13),且记 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$.

从这个问题可以看出,我们有时对两个向量作上述运算,其结果为一数量.

定义 1 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模及其夹角余弦的乘积,称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称内积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\quad(0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi).\tag{1}$$

根据这个定义,上述问题中力所做的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积,即 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

定义 2 $|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影(图 7-14),记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$,即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

类似地,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.