M

国家自然科学基金（11061008）
广西科学研究与技术开发计划（桂科攻0993002-4）

模糊数学理论及其应用

刘合香　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍了模糊数学的基本理论和基本方法，着重介绍基于模糊理论的数学建模方法，并给出了具体的应用实例. 基本理论涉及模糊集的基本概念、模糊集的基本定理、模糊关系和模糊矩阵、模糊图等. 建模方法包括模糊聚类分析、模糊模型识别、模糊决策、模糊线性规划、模糊推理与模糊控制等.

本书可作为高校数学专业的高年级本科生和研究生的专业课教材，也可供数学建模、灾害风险分析、教育信息化综合评价、金融工程方面的科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学理论及其应用 / 刘合香编著.—北京：科学出版社，2012.8
ISBN 978-7-03-035370-2

Ⅰ.①模… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①模糊数学
Ⅳ.①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 190131 号

责任编辑：杨 岭 郝玉龙 万 羽/封面设计：陈思思

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

成都创新包装印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第 一 版 开本：787*1092 1/16
2012 年 8 月第一次印刷 印张：15.75
字数：370 千字

定价：29.00 元

前　言

从模糊集的提出到软词语计算的形成,模糊理论走过了将近半个世纪的历程,其丰硕的学术成果更是在许多学科领域得到应用.因此,很多高院都将模糊数学课程列入本科生选修和研究生的必修课程.

本书结合作者多年的教学经验和科研体会,简明扼要地介绍了模糊数学的基本理论和基本方法,并着重介绍了模糊数学在其他领域成功应用的实例,实例的选取力求能反映当前各领域研究和发展的新动态(部分实例为本人刚完成的项目研究成果).与国内外已经出版的同类书籍比较,本书叙述简明但不蜻蜓点水,重视基础但不陷入纷繁的定理推导,强调学科交叉及应用但决不敷衍拼凑.比如,注重利用模糊数学和优化理论相结合得到组合权重;注重基于因素空间理论、二维正态扩散技术和模糊近似推理方法,计算超越概率估计值等.

全书共分为 8 章,第 1 章介绍了模糊集的基本概念及性质,给出了模糊集在经济管理、教育信息化方面的应用;第 2 章介绍了模糊集的基本定理以及相关应用;第 3、4 章分别介绍了模糊关系、模糊矩阵、模糊图和模糊聚类分析方法,着重讲述了模糊聚类分析方法在教育信息化和热带气旋灾害分析方面的应用;第 5 章介绍了模糊模式识别的基本原则,及其在洪涝灾害风险分析中的应用;第 6 章系统介绍了模糊预测与模糊决策和基本方法,特别介绍了多种权重与信息扩散相结合的灾害风险预测模型;第 7 章介绍了模糊线性规划模型及应用;第 8 章介绍了模糊推理与模糊控制的基本原理,用基于因素空间理论的模糊近似推理进行了灾情估计;通过实行模糊近似推理,对信息技术与学科课程整合进行了模糊综合评价.

本书的出版得到了国家自然科学基金项目(11061008)和广西科学研究与技术开发计划项目(桂科攻 0993002－4)的资助.本书内容包含了作者近十年来主持项目的部分研究成果.在此期间,张大林教授、黄鹄教授、隆广庆教授、邓天炎副教授、陆莎副教授,徐庆娟讲师和陈建伟讲师先后参与了相关课题的研究工作.作者的研究生罗彦丽、汤鑫、安佳菲分别参与了本书相关内容的图表制作、文字输入和校对工作.本书的撰写参阅了很多文献资料,文献资料的作者付出了辛勤的劳动,作者在此一并表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,书中难免存在一些错误和纰漏,敬请各位专家、读者批评指正.

刘合香

2012 年 6 月 28 日

目　　录

第 1 章　模糊集的基本概念

19 世纪末，德国数学家 G. Cantor 首创集合论. 随后，该理论迅速渗透到各个数学分支，对模糊数学基础的奠定做出了重大贡献. 1965 年，美国计算与控制论专家 L. A. Zadeh 第一次提出了模糊集概念，对 Cantor 集合理论做了有益的推广，并受到广泛重视. 迄今，模糊集已形成一个较为完善的数学分支，并在很多领域中获得了应用. 特别是以模糊推理为核心的人工智能技术，在许多领域取得了明显的成果和经济效益.

模糊集合（又称模糊集）是模糊数学的基础，模糊数学则是研究和处理模糊性现象的数学方法. 本章着重介绍模糊集的基本概念、运算法则和简单的应用.

1.1　经典集合及特征函数

1.1.1　经典集合

1. 集合及其表示

集合是现代数学的一个基本概念，一些不同对象的全体称为集合，简称为集，常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在这里，集合也称为经典集合，这是为了区别于模糊集合. 集合内的每个对象称为集合的元素，常用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 元素与集合之间具有从属的关系，“a 属于 A”记为 $a\in A$，“a 不属于 A”记为 $a\notin A$.

我们把不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$.

只含有有限个元素的集合，称为有限集，有限集所含元素的个数称为集合的基数. 包含无限个元素的集合称为无限集. 以集合作为元素所组成的集合称为集合族. 所谓论域是指所论及对象的全体，它也是一个集合，也称为全集，常用大写英文字母 $X,Y,U,V,\cdots$ 表示.

集合的表示法主要有两种：

(1)列举法　例如，由 20 以内的质数组成的集合可表示为

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\},$$

自然数集可表示为

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

(2)描述法　使 $P(x)$成立的一切 x 组成的集合可表示为$\{x\mid P(x)\}$. 如实数集可表示为$\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，简记为$\mathbb{R}$；$B=\{x\mid x^2-1=0,x\in\mathbb{R}\}$实际上是由元素 -1 和 1 组成的集合.

经典集合具有两条最基本的属性：集合中元素的互异性，即元素彼此相异，范围边界分明；集合中元素的确定性，也就是说，一个元素 x 与集合 A 的关系是，要么 $x\in A$，要么 $x\notin A$，二者必居其一.

2. 集合的包含

集合的包含概念是集合之间的一种重要关系.

定义 1.1.1　设有集合 A 和 B,若集合 A 的每个元素都属于集合 B,即 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作"A 包含于 B 中"或"B 包含 A".

显然 $A\subseteq A$. 空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subseteq A$. 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

定义 1.1.2　设集合 A 和 B,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$.

定义 1.1.3　设集合 U,对于任意集合 A,总有 $A\subseteq U$,则称 U 为全集.

全集是一个具有相对性的概念. 例如,实数集对于整数集、有理数集而言是全集,而整数集对于偶数集、奇数集而言是全集.

定义 1.1.4　设有集合 A,A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集,记为 $\mathscr{P}(A)$,即 $\mathscr{P}(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$.

例 1.1.1　设 $A=\{a,b,c\}$,则 $\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

3. 集合的运算

定义 1.1.5　设 $A,B\in\mathscr{P}(U)$,U 是论域,规定:

$A\cup B\triangleq\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的并集;

$A\cap B\triangleq\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$,称为 A 与 B 的交集;

$A^C\triangleq\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$,称为 A 的余集.

以上各式中的符号"$\triangleq$"表示"被定义为".

4. 集合运算(并、交、余)的性质

定理 1.1.1　设 $A,B,C\in\mathscr{P}(U)$,U 是论域,则有

(1)幂等律　$A\cup A=A,A\cap A=A$;

(2)交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(3)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4)吸收律　$A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$;

(5)分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(6)0-1 律　$A\cup U=U,A\cap U=A,A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$;

(7)还原律　$(A^C)^C=A$;

(8)对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$;

(9)排中律　$A\cup A^C=U,A\cap A^C=\varnothing$.

这些性质均可由并、交、余的定义直接推出. 上述两个集合的并、交运算可推广到任意多个集合的并、交运算.

5. 集合的直积

在日常生活中,许多事物是成对出现的,且具有一定的顺序,例如上、下,左、右,平面上点的坐标等. 任意两个元素 x 与 y 配成一个有序的对 (x,y),称为 x 与 y 的序对. 有序是指 $x\neq y$ 时,$(x,y)\neq(y,x)$,$(x,y)=(x',y')\Leftrightarrow x=x',y=y'$.

定义 1.1.6　设 X,Y 是两个集合,由 X 的元素与 Y 的元素配成的全体序对组成一个

集合,称为 X 与 Y 的直积[或笛卡尔积(Descartes)积],记作 $X\times Y$,即 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$.

例 1.1.2 设 $X=\{1,2\}$,$Y=\{0,2\}$,则

$$X\times Y=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\},Y\times X=\{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)\}.$$

一般地,$X\times Y\neq Y\times X$.

1.1.2 映射

定义 1.1.7 设 X 与 Y 是两个非空集,若存在一个对应规则 f,使得对于任一元素 $x\in X$,有唯一元素 $y\in Y$ 与之对应,则称 f 是从 X 到 Y 的映射,记为

$$f:X\to Y,$$
$$x\mapsto f(x)=y\in Y.$$

y 称为 x 在映射 f 下的像,x 称为原像.

集 X 称为映射 f 的定义域,记为 $D(f)$. 集 $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ 称为映射 f 的值域,记为 $R(f)$. 一般地,$f(X)\subseteq Y$. 若 $f(X)=Y$,则称 f 是从 X 到 Y 上的映射或从 X 到 Y 的满映射.

映射的概念是函数概念的推广. 微积分中定义在区间 $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ 上的一元函数 $f(x)$,就是从 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射,即 $f:[a,b]\to\mathbb{R},x\mapsto f(x)=y$.

定义 1.1.8 如果映射 $f:X\to Y$,$\forall x_1,x_2\in X$,满足 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是从 X 到 Y 是 1-1 的映射. 如果 $f:X\to Y$ 是 1-1 的满映射,则称 f 为从 X 到 Y 的 1-1 对应.

例 1.1.3 设映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\sin x$,则 f 不是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的满映射,而是 $\mathbb{R}$ 到区间 $[-1,1]$ 的满射;设 $C[a,b]$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实连续函数集. 定义 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个映射

$$f:\varphi(x)\to\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}(x),\varphi(x)\in C[a,b]$$

这是一个满映射,但不是 1-1 映射;设 $X=\{a,b,c,d\}$,$Y=\{1,2,3,4\}$,f 是从 X 到 Y 的映射,$f=\{(a,1),(b,3),(c,4),(d,2)\}$,则 f 是满映射,又是 1-1 映射,所以 f 是 1-1 对应.

1.1.3 特征函数

定义 1.1.9 设 $A\in\mathscr{P}(U)$,U 是论域,具有如下性质的映射

$$\chi_A:U\to\{0,1\},$$
$$x\mapsto\chi_A(x)=\begin{cases}1,x\in A,\\0,x\notin A;\end{cases}$$

$\chi_A(x)$ 称为集合 A 的特征函数(如图 1-1).

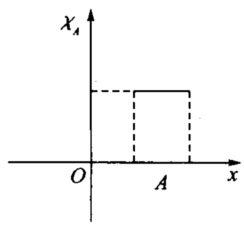


图 1-1

由定义 1.1.9 可知,集合 A 由特征函数 $\chi_A(x)$ 唯一确定. 例如,论域 U 为实数集,则集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$ 的特征函数如图 1-2 所示,为

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1.\end{cases}$$

由此看出,特征函数与集合是互相决定的,是对一个事物从不同角度给出的描述. 下面

是特征函数与集合之间的几个基本关系：

(1) $A=U \Leftrightarrow \chi_A(x)=1, A=\varnothing \Leftrightarrow \chi_A(x)=0$；

(2) $A\subseteq B\in \mathscr{P}(U) \Leftrightarrow \chi_A(x)\leqslant \chi_B(x)$；

(3) $A=B\in \mathscr{P}(U) \Leftrightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x)$.

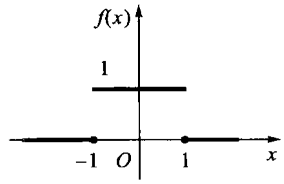


图 1-2

基本关系(3)表明，U 的任一子集 A 完全由它的特征函数确定.

特征函数还具有下列运算性质：

$\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)\vee \chi_B(x)$，

$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\wedge \chi_B(x)$，

$\chi_{A^C}(x)=1-\chi_A(x)$.

此处“$\vee$”、“$\wedge$”分别是取大、取小运算，即

$$a\vee b=\max(a,b), a\wedge b=\min(a,b).$$

上述性质表明，应用特征函数同样可以方便地讨论集合间的关系和运算.

设 χ_1,χ_2 和 χ 都是论域 U 上的特征函数，则

(1)若 $\forall x\in U$，都有 $\chi_1(x)\leqslant\chi_2(x)$，则记 $\chi_1\leqslant\chi_2$；

(2)若 $\chi_1\leqslant\chi_2$，且 $\chi_2\leqslant\chi_1$，则记 $\chi_1=\chi_2$；

(3)若 $\forall x\in U$，都有 $\chi(x)=\chi_1(x)\vee\chi_2(x)$，则记 $\chi=\chi_1\vee\chi_2$；

(4)若 $\forall x\in U$，都有 $\chi(x)=\chi_1(x)\wedge\chi_2(x)$，则记 $\chi=\chi_1\wedge\chi_2$；

(5)若 $\forall x\in U$，都有 $\chi_2(x)=1-\chi_1(x)$，则记 $\chi_2=\bar{\chi}_1$.

显然，$\chi_1=\chi_2$ 当且仅当 $\forall x\in U, \chi_1(x)=\chi_2(x)$.

定理 1.1.2　若 $U\neq\varnothing$，则 U 的幂集 $\mathscr{P}(U)$ 与 U 的全体特征函数集 CH(U)之间，存在 1-1 的满射.

今后，对 $\forall A\in\mathscr{P}(U)$ 总用 χ_A 表示 A 的特征函数. 特别地，用 1 和 0 分别表示 U 和 $\varnothing$ 的特征函数，如，$1(x)\equiv1, \forall x\in U; 0(x)\equiv0, \forall x\in U$.

定理 1.1.3　若 $A,B\in\mathscr{P}(U)$，则 $\chi_A\vee\chi_B, \chi_A\wedge\chi_B, \bar{\chi}_A$ 分别是 $A\cup B, A\cup B, A^C$ 的特征函数.

1.2　模糊集合与隶属函数

在数学上，概念的外延可以通过“集合”来表达. 然而日常生活中涉及的众多的概念常含有内涵的“模糊性”，这必然导致外延的“不清晰性”. 例如，对于“高个子男人”这个概念，如果说 1.80 m 以上的男人都算高个子，那么 1.79 m 仅 1 cm 之差，肉眼是很难辨别的. 因此，“高个子男人”的外延不应有清晰的边界. 然而“经典集合”必定是“清晰的”，即对集合 A 和某具体对象 a，$a\in A$ 与 $a\notin A$ 仅有一个成立. 这说明不能用经典集合去刻画模糊概念的外延，从而 Zadeh 提出了模糊集合的概念.

设 U 是论域，所谓 U 上的模糊集合 $\widetilde{A}$，是指对 $\forall x\in U$，x 常以某个程度 μ ($\mu\in[0,1]$)

属于 $\widetilde{A}$，而非 $x\in\widetilde{A}$ 或 $x\notin\widetilde{A}$. 例如，若确定 1.80 m 以上的男人都是“高个子”（即以 1＝100％的程度属于“高个子”），而 1.79 m 的男人则可以略低于 1（例如 0.99 即 99％）的程度属于“高个子”.

若 U 是论域，则 $\mathscr{P}(U)$ 与 CH(U)一一对应，且 $\mathscr{P}(U)$ 与 CH(U)中的元素 A 与 $\chi_{\bar{A}}$ 可不加区分，$\mathscr{P}(U)$ 与 CH(U)中的运算：$\cup$与 $\vee$，$\cap$与 $\wedge$，$\cdot^{C}$ 与 $\bar{\cdot}$ 也可以不加区分. 据此，Zadeh 引入了隶属函数，并让 U 上的隶属函数全体与 U 上的模糊集合全体一一对应，以此建立模糊集合概念.

设 U 是论域，$\mu:U\to[0,1]$，称 μ 是 U 上的隶属函数，记 U 上隶属函数的全体为 SH(U). 又记 U 上模糊集合的全体为 $\mathscr{F}(U)$，令 SH(U)与 $\mathscr{F}(U)$一一对应. 于是，对 $\forall\mu\in$ SH(U)，有唯一 U 上的模糊集合 $\widetilde{A}\in\mathscr{F}(U)$与之对应. 记此 μ 为 $\mu_{\widetilde{A}}$，称 $\mu_{\widetilde{A}}$ 为 $\widetilde{A}$ 的隶属函数；对 $\forall x\in U$，称 $\mu_{\widetilde{A}}$ 为 x 对 $\widetilde{A}$ 的隶属度.

例 1.2.1 $\{0,1\}\subseteq[0,1]$，而经典集 A 的特征函数 $\chi_A:U\to\{0,1\}$，故 χ_A 也是隶属函数，从而经典集 A 也可视为模糊集合. 也就是说，经典集 A 与特征函数 χ_A 分别是模糊集合与隶属函数的特例；而模糊集合 $\widetilde{A}$ 与隶属函数 $\mu_{\widetilde{A}}$ 分别是经典集与特征函数的推广.

1.2.1 模糊集合的表示方法

论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是有限集，U 上的任一模糊集合 $\widetilde{A}$，其隶属函数为$\{\widetilde{A}(x_i)\}(i=1,2,\cdots,n)$.

（1）扎德表示法：

$$\widetilde{A}=\frac{\widetilde{A}(x_1)}{x_1}+\frac{\widetilde{A}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\widetilde{A}(x_n)}{x_n}.$$

这里$\dfrac{\widetilde{A}(x_i)}{x_i}$不是分数；＋也不表示求和，只有符号意义，它表示点 x_i 对模糊集合 $\widetilde{A}$ 的隶属度是 $\widetilde{A}(x_i)$.

（2）序偶表示法：

$$\widetilde{A}=\{(x_1,\widetilde{A}(x_1)),(x_2,\widetilde{A}(x_2)),\cdots,(x_n,\widetilde{A}(x_n))\}.$$

（3）向量表示法：

$$\widetilde{A}=(\widetilde{A}(x_1),\widetilde{A}(x_2),\cdots,\widetilde{A}(x_n)).$$

一般地，若 $0\leqslant a_i\leqslant 1$，$i=1,2,\cdots,n$，则称 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为模糊向量. 由此可知，模糊向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$可以表示论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的模糊集 $\widetilde{A}$.

例 1.2.2 $\widetilde{A}$＝“高个子”可表示为

$$\widetilde{A}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{1}{x_6},$$

或者

$$\widetilde{A}=(0,0.1,0.4,0.5,0.8,1).$$

又如，论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$表示 n 个企业，若以 a_i 记企业 x_i 的生产成本中劳动力所占比重，则 $\widetilde{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$就是表示劳动密集型企业的模糊集合.

注意 经典集合也可用扎德方法表示，例如，论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$可表示为

$$U=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}.$$

这表明 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 绝对地属于 U，即 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对 U 的隶属度为 1.

论域 U 是无限集时，U 上的模糊集 $\widetilde{A}$ 表示为

$$\widetilde{A}=\int_{x\in U}\frac{\widetilde{A}(x)}{x},$$

这里 $\int$ 不是积分符号，$\frac{\widetilde{A}(x)}{x}$ 也不是分数.

例 1.2.3　令 $U=\{a,b,c,d\}$ 或等价地写为 $U=a+b+c+d$. 在这种情况下，U 的模糊子集 $\widetilde{A}$ 可以明确地表达为 $\widetilde{A}=0.3a+b+0.9c+0.5d$.

另一方面，若 $U=1+2+\cdots+100$，则写为 $\widetilde{A}=0.3/25+0.9/3$，以免混淆.

例 1.2.4　在由整数 1,2,…,10 组成的论域 $U=1+2+\cdots+100$ 中，"几个"这一模糊子集可以定义为

$$\text{"几个"}=0.5/3+0.8/4+1/5+1/6+0.8/7+0.5/8.$$

例 1.2.5　若 $U=a+b+c+d$ 并且

$$\widetilde{A}=0.5a+0.8b+0.3d,\widetilde{B}=0.7a+b+0.3c+d,$$

则 $\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$.

1.2.2　隶属函数的确定

前面曾经指出过，隶属程度的思想是模糊数学的基本思想. 元素属于模糊集合的隶属度是主观臆造的，还是客观存在的，这是本节首要讨论的一个问题. 应用模糊数学方法的关键在于建立符合实际的隶属函数，然而，这是至今尚未完全解决的问题. 我国学者汪培庄教授提出的随机集落影理论，对于相当一部分模糊集合的隶属函数的客观实在性给出了满意的解释，基于这一理论的模糊统计方法是确定一类模糊集合的隶属度的有效方法. 为了使读者便于操作，本节主要介绍确定隶属度与隶属函数所常用的方法.

一、隶属度的客观存在性

对于隶属度的确定有不同的观点与处理方法. 为了说明隶属度的客观存在性，先介绍模糊统计试验.

1. 模糊统计实验

所谓模糊统计试验包含四个要素：

(1)论域 U；

(2)U 中的一个固定元素 u_0；

(3)U 中的一个随机运动集合 A^*（经典集合）；

(4)U 中的一个以 A^* 作为弹性边界的模糊子集 $\widetilde{A}$，制约着 A^* 的运动. A^* 可以覆盖 u_0，也可以不覆盖 u_0，因而 u_0 对 $\widetilde{A}$ 的隶属关系不确定.

模糊统计试验特点是：在各次试验中，u_0 是固定的，而 A^* 在随机变动.

2. 隶属度的客观存在性

在模糊统计试验中，u_0 是固定的，A^* 是变动的，A^* 是对 $\widetilde{A}$ 的一次近似. A^* 可以覆盖住 u_0，也可以不覆盖住 u_0，这就使得 u_0 对 A 的隶属关系是不确定的. 这种不确定性，正是由于 $\widetilde{A}$ 的模糊性产生的.

设做 n 次试验，可算出 A^* 覆盖 u_0 的次数，即

$$u_0 \text{ 对 } \widetilde{A} \text{ 的隶属频率} = \frac{u_0 \in A^* \text{ 的次数}}{n}.$$

实践证明，随着 n 的增大，隶属频率呈现出稳定性，频率稳定值称为 u_0 对 A 的隶属度，即

$$\widetilde{A}(u_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_0 \in A^* \text{ 的次数}}{n}.$$

这里隶属频率呈现出的稳定性正表明了隶属度的客观存在性.

二、隶属函数的确定方法

1. 模糊统计方法

为了便于操作，下面通过实例说明模糊统计方法.

例 1.2.6（模糊统计） 为了建立模糊集 $\widetilde{A}$ =“青年人”的隶属函数，以及 $u_0=27$ 岁属于模糊集 $\widetilde{A}$（青年人）的隶属度. 以年龄作论域 $U=[0,100]$，张楠纶等进行过一次较大的模糊统计实验，他们在武汉某高校进行抽样调查，要求被抽取的大学生在独立认真考虑了“青年人”的含义后，给出“青年人”的年龄区间，随机地抽取了 129 人，相应得到了“青年人”的 129 个年龄区间（见表 1-1）.

表 1-1

18～25	17～30	17～28	18～25	16～35	14～25	18～30
18～35	18～35	16～25	15～30	18～35	17～30	18～25
18～35	20～30	18～30	16～30	20～35	18～30	18～25
18～35	15～25	18～30	15～28	16～28	18～30	18～30
16～30	18～35	18～25	18～30	16～28	18～30	16～30
16～28	18～35	18～35	17～27	16～28	15～28	18～25
19～28	15～30	15～26	17～25	15～36	18～30	17～30
18～35	16～35	16～30	15～25	18～28	16～30	15～28
18～35	18～30	17～28	18～35	15～28	15～25	15～25
15～25	18～30	16～24	15～25	16～32	15～27	18～35
16～25	18～30	16～28	18～30	18～35	18～30	18～30
17～30	18～30	18～35	16～30	18～28	17～25	15～30
18～25	17～30	14～25	18～26	18～29	18～35	18～28
18～35	18～25	16～35	17～29	18～25	17～30	16～28
18～30	16～28	15～30	18～30	16～30	20～30	20～30
16～25	17～30	15～30	18～30	16～30	18～28	15～35
16～30	15～30	18～35	18～35	18～30	17～30	16～35
17～30	15～25	18～35	15～30	15～25	15～30	18～30
17～25	18～29	18～28				

为了确定 $u_0=27$ 岁属于模糊集 $\widetilde{A}$（青年人）的隶属度，对 $u_0=27$ 作统计处理，结果如表 1-2 所示. 其中 n 表示样本总数，m 为样本区间盖住 27 的频数，而 $f=\frac{m}{n}$ 为隶属频率. 以 n 为横坐标，隶属频率 f 为纵坐标，绘制图形（如图 1-3 所示）.

表 1-2

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	129
m	6	14	23	31	39	47	53	62	68	76	85	95	101
f	0.60	0.70	0.77	0.78	0.78	0.78	0.76	0.78	0.76	0.76	0.77	0.79	0.78

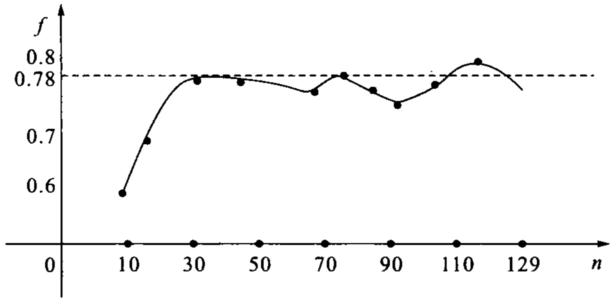


图 1-3

统计结果表明，27 的隶属度稳定在 0.78 附近，因此 $\widetilde{A}(27)=0.78$.

为了作出 $\widetilde{A}$(青年人)的隶属函数 $\widetilde{A}(x)$，采用“方框图法”. 由表 1-1 可知，最小数据是 14，最大数据是 36. 于是，以 13.5 岁为起点，36.5 岁为终点，以 1 为长度，作 23 个区间的划分，数据如表 1-3 所示.

表 1-3

序号	年龄分组	频数	相对频数
1	13.5～14.5	2	0.0155
2	14.5～15.5	27	0.2093
3	15.5～16.5	51	0.3953
4	16.5～17.5	67	0.5194
5	17.5～18.5	124	0.9612
6	18.5～19.5	125	0.9690
7	19.5～20.5	129	1
8	20.5～21.5	129	1
9	21.5～22.5	129	1
10	22.5～23.5	129	1
11	23.5～24.5	129	1
12	24.5～25.5	128	0.9922
13	25.5～26.5	103	0.7984
14	26.5～27.5	101	0.7829
15	27.5～28.5	99	0.7674
16	28.5～29.5	80	0.6202
17	29.5～30.5	77	0.5969
18	30.5～31.5	27	0.2093
19	31.5～32.5	27	0.2093
20	32.5～33.5	26	0.2016
21	33.5～34.5	26	0.2016

续表

序号	年龄分组	频数	相对频数
22	34.5～35.5	26	0.2016
23	35.5～36.5	1	0.0078
$\sum$		129	13.6589

以年龄为横坐标,相对频率为纵坐标,绘出$\widetilde{A}(x)$的曲线,如图 1-4 所示. 由此可以求出,$\widetilde{A}(27)=0.78$. 这表明 27 岁对于$\widetilde{A}$(青年人)的隶属度是 0.78.

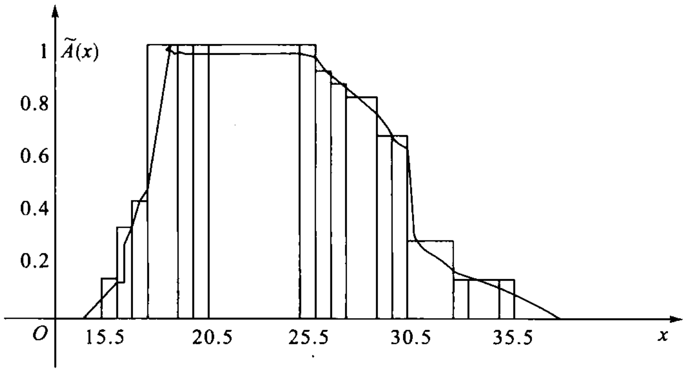


图 1-4

模糊统计与概率统计的区别是:若把概率统计比喻为“变动的点”是否落在“不动的圈”内[如图 1-5(a),试验 A 固定,w 随机变化],则可将模糊统计比喻为“变动的圈”是否盖住“不动的点”[如图 1-5(b),试验 u_0 固定,A^* 随机变化].

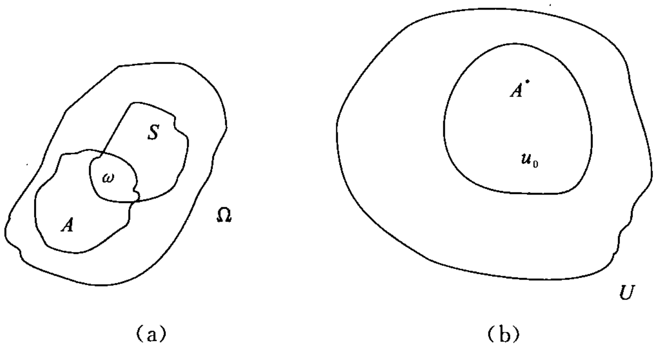
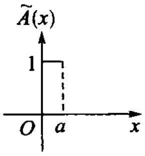
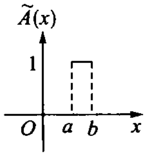
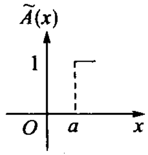
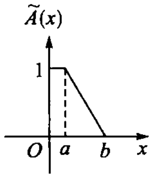
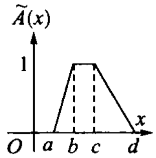
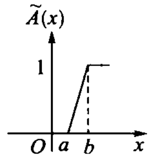
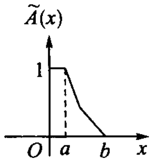
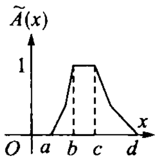
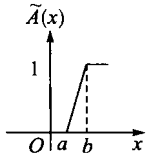
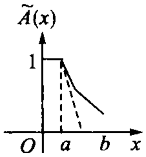
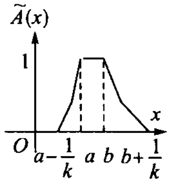
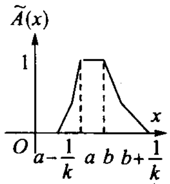
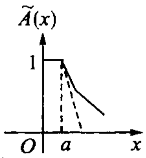
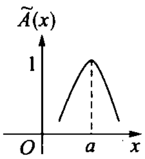
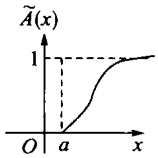


图 1-5

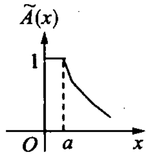
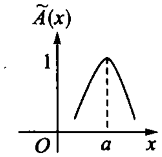
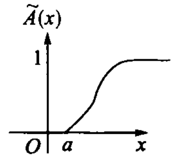
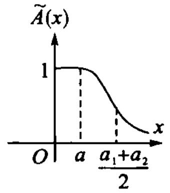
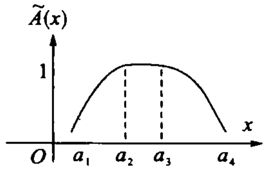
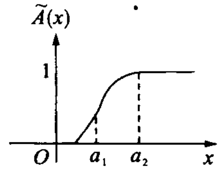
2. 指派方法

指派隶属函数的方法普遍被认为是一种主观的方法,它可以把人们的实践经验考虑进去. 若模糊集定义在实数域ℝ上,则模糊集的隶属函数便称为模糊分布. 所谓指派方法,就是根据问题的性质,套用现成的某些形式的模糊分布,然后根据测量数据确定分布中所含的参数. 常用的模糊分布如表 1-4 所示.

表 1-4

模糊分布 \ 类型	偏小型	中间型	偏大型
矩形分布	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, x\leqslant a,\\ 0, x>a.\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, x<a \text{ 或 } x>b,\\ 1, a\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ 1, x\geqslant a.\end{cases}$ 
梯形分布	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ \frac{b-x}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x\geqslant b.\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & b\leqslant x<c,\\ \frac{d-x}{d-c}, & c\leqslant x\leqslant d,\\ 0, & x\geqslant d.\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$ 
k 次抛物分布	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x\geqslant b.\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & b\leqslant x<c,\\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^k, & c\leqslant x\leqslant d,\\ 0, & x\geqslant d.\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$ 
T 分布	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ e^{-k(x-a)}, & x\geqslant a\ (k>0)\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x<a,\\ e^{-k(x-a)}, & x\geqslant a\ (k>0)\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}e^{k(x-a)}, & x<a,\\ 1, & a\leqslant x\leqslant b, (k>0),\\ e^{-k(x-b)}, & x\geqslant d.\end{cases}$ 
正态分布	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x>a,\end{cases}$ 	$\tilde{A}(x)=e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}$ 	$\tilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ 1-e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, & x>a,\end{cases}$ 

续表

模糊分布 \ 类型	偏小型	中间型	偏大型
柯西分布	$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}, & x>a,\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 	$\widetilde{A}(x)=\dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{\beta}}$ $(\alpha>0,\beta$ 为正偶数). 	$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{-\beta}}, & x>a,\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 
岭形分布	$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}1, x\leqslant a,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_2+a_1}{2}\right),\\ \quad a_1<x\leqslant a_2,\\ 0, x>a_2.\end{cases}$ 	$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}0, x\leqslant a_1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_2+a_1}{2}\right),\\ 1, a_1<x\leqslant a_2,\\ \quad a_2\leqslant x<a_3,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_4-a_3}\left(x-\dfrac{a_3+a_4}{2}\right),\\ \quad a_3\leqslant x<a_4,\\ 0, x\geqslant a_4.\end{cases}$ 	$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}0, x\leqslant a_1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{a_2-a_1}\left(x-\dfrac{a_2+a_1}{2}\right),\\ \quad a_1<x\leqslant a_2,\\ 1, x>a_2.\end{cases}$ 

为了便于读者操作,根据实际描述的对象,在这里给出指派(或选择)的大致方向.

偏小型模糊分布适合描述像"小"、"冷"、"青年"以及颜色的"淡"等偏向小的一方的模糊现象,其隶属函数的一般形式为

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ f(x), & x>a.\end{cases}$$

其中,a 为常数,而 $f(x)$是非增函数.

偏大型模糊分布适合描述像"大"、"热"、"老年"以及颜色的"浓"等偏向大的一方的模糊现象,其隶属函数的一般形式为

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ f(x), & x>a.\end{cases}$$

其中,a 为常数,而 $f(x)$是非减函数.

中间型模糊分布适合描述像"中"、"暖和"、"中年"等处于中间状态的模糊现象,其隶属函数可以通过中间型模糊分布表示.

需要指出的是,确定模糊集的隶属函数的方法是多样的,但这些方法所给出的隶属函数只是近似的,因此需要在实践中不断地通过学习,加以修改,使之逐步完善. 例如,在论域 $U=\{1,2,\cdots,9\}$上确定 $\widetilde{A}=$"靠近 5 的数"的隶属函数,用指派方法易知,选用中间型 $\widetilde{A}(x)$

$=\dfrac{1}{1+(x-5)^2}$,容易算得

$$\widetilde{A}(x)=\frac{0.06}{1}+\frac{0.1}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.5}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0.1}{8}+\frac{0.06}{9}.$$

$\widetilde{A}(4)=\widetilde{A}(6)=0.5$,不符合实际.

若将其隶属函数修改为 $\widetilde{A}(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}(x-5)^2}$,则

$$\widetilde{A}(x)=\frac{0.24}{1}+\frac{0.36}{2}+\frac{0.56}{3}+\frac{0.83}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.83}{6}+\frac{0.56}{7}+\frac{0.36}{8}+\frac{0.24}{9},$$

这表明修改后的隶属函数有所改善.

若再次修改为 $\widetilde{A}(x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{10}(x-5)^2}$,则

$$\widetilde{A}(x)=\frac{0.38}{1}+\frac{0.53}{2}+\frac{0.71}{3}+\frac{0.91}{4}+\frac{1}{5}+\frac{0.91}{6}+\frac{0.71}{7}+\frac{0.53}{8}+\frac{0.38}{9},$$

表明再次修改后的隶属函数比较符合实际. 因此,$\widetilde{A}$ =“靠近 5 的数”的隶属函数可确定为

$$\widetilde{A}(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{10}(x-5)^2},$$

即使最后确定了一个隶属函数,它也仍是近似的,只是近似程度要好些.

例 1.2.7(隶属函数)　设论域 $U=[0,100]$(分数),在 U 上建立评价学生成绩的三个模糊集 $\widetilde{A}$ =“优”, $\widetilde{B}$ =“良”,$\widetilde{C}$ =“差”. 用指派方法,它们分别是偏大型、中间型、偏小型,采用梯形分布,容易从表 1-4 中选出模糊集 $\widetilde{A}$,$\widetilde{B}$,$\widetilde{C}$ 的隶属函数,如图 1-6 所示.

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 85,\\ \dfrac{x-85}{10}, & 85<x\leqslant 95,\\ 1, & 95<x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$\widetilde{B}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-70}{10}, & 70<x\leqslant 80,\\ 1, & 80<x\leqslant 85,\\ \dfrac{95-x}{10}, & 85<x\leqslant 95,\\ 0, & 95<x\leqslant 100;\end{cases}$$

$$\widetilde{C}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 70,\\ \dfrac{80-x}{10}, & 70<x\leqslant 80,\\ 0, & 80<x\leqslant 100.\end{cases}$$

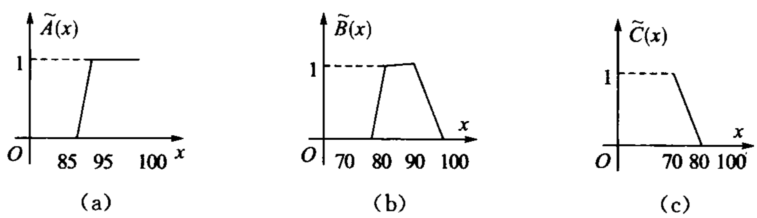


图 1-6