高等代数思想方法解析

GAODENG DAISHU SIXIANGFANGFA JIEXI

郭龙先　黄茂来　刘　秀◎著

四川大学出版社

昭通师范高等专科学校学术著作出版基金资助

高等代数思想方法解析

GAODENG DAISHU SIXIANGFANGFA JIEXI

郭龙先　黄茂来　刘　秀◎著

四川大学出版社

责任编辑：黄文龙
责任校对：唐　飞
封面设计：墨创文化
责任印制：李　平

图书在版编目(CIP)数据

高等代数思想方法解析 / 郭龙先，黄茂来，刘秀著．—成都：四川大学出版社，2012．3
ISBN 978－7－5614－5745－0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①郭…②黄…③刘…　Ⅲ．①高等代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 055134 号

书名　高等代数思想方法解析

著　　者	郭龙先　黄茂来　刘　秀
出　　版	四川大学出版社
地　　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行	四川大学出版社
书　　号	ISBN 978－7－5614－5745-
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	170 mm×240 mm
印　　张	16．25
字　　数	317 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 8 月第 1 次印刷
定　　价	32．00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：http://www.scup.cn

序

数学中每一个独立的分支都有自己特殊的理论. 高等代数中蕴含着符号化、公理化、形式化、模型化、结构化等代数学特有的思想和方法，它们是高等代数的核心和灵魂. 高等代数的发展与人类社会的经济文化背景紧密相连，许多重要成果都是通过解决一个个理论难题或某些实际问题而在历史的长河中逐渐形成的. 而教科书上总是从定义、定理到证明，然后是大量的习题，论述严谨，使许多人望而却步. 本书试图通过对代数学思想史的简单回顾，让读者在更宽广的文化视野下看待数学的发展，从而更好地理解高等代数的思想方法.

高等代数作为大学数学专业的主干基础课，是初等代数的延伸和拓广. 相对初等数学而言，它的研究对象经过多次推广和抽象，可以是非特定的任意元素集合以及定义在这些元素之间的、满足若干条件或公理的代数运算. 也就是说，它以各种代数结构(或称系统)的性质的研究为中心问题. 高等代数的很多内容缺乏直观的几何背景，大多数学生在学习过程中反映高等代数抽象难懂，对基本概念以及定理结论的理解感到困难，具体解题时缺乏思路. 为了帮助学生尽快掌握高等代数的基本理论和方法，综合运用各种解题技巧，提高分析问题和解决问题的能力，著者根据多年的教学实践，从许多高等代数教程及研究生考题中收集整理出具有典型性、代表性的问题和习题编撰本书，希望通过对大量实例的详尽解析，帮助学生理解高等代数的思想与方法，促进知识的增长和能力的提高. 就数学的统一性而论，数学分析和高等代数依然有着密切的联系，如果能在教学中做到融会贯通，将会收到触类旁通、事半功倍的效果. 因此，充分利用数学分析的语言和方法辅助分析高等代数概念的本质，揭示定理的内涵，也是本书追求的目标和特色之一. 高等代数解题方法灵活多样，若能从不同的角度思考，做到一题多解，举一反三，也不失为一种锻炼思维能力的有效途径.

全书由两部分构成：思想方法和问题解析. 第一部分主要对代数学，尤其是高等代数中涉及的基本思想和方法进行分析，阐述高等代数深广的发展背景，开阔视野，加强高等代数知识的内部联系. 其内容相对独立，不影响对第

二部分的阅读和理解，读者可以略读或跳过，在学习高等代数期间选择所学内容. 第二部分主要是对多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、向量空间、线性变换、欧氏空间中的基本概念和理论进行归纳，并对其中的典型习题进行解析.

本书作为云南省高等代数精品课程建设成果之一，是对高等代数理论的深化和拓广. 本书可作为郭龙先、张毅敏、何建琼编写的《高等代数》的教学参考书，也可以为张禾瑞、郝鈵新编写的《高等代数》(第五版) 以及北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编写的《高等代数》(第三版)提供参考. 本书的写作和出版得到学校领导的关心和大力支持，在此深表谢意.

郭龙先

2012 年 3 月

目　　录

上篇——思想方法

下篇——问题解析

上篇——思想方法

数学思想方法是处理数学问题的指导思想和基本策略，是数学的灵魂. 它以数学内容为载体，是基于数学知识，又高于数学知识的一种隐性知识. 一种数学的观点和方法，要在长期的学习过程中反复思考体验，才能认识、感悟、理解、掌握和运用. 纵观数学的发展史，我们清楚地看到，数学的发展绝不仅仅是材料事实、知识的积累和增加，必须有新思想方法的参与，才会有创造和发明，从而推动数学向前发展. 正如希尔伯特所言："数学中的每一步真正的进展都与更有力的工具和方法的发现密切联系着，这些工具和方法同时会有助于理解已有的理论，并把陈旧的、复杂的东西抛到一边. 数学科学发展的这种特点是根深蒂固的."日本数学教育家米山国藏认为，思想和方法是数学创造与发展的源泉，是数学教育目的的集中表现. 数学的知识可以记忆一时，但数学精神、思想与方法却永远发挥作用，使人终身受益.

高等代数是数学专业的一门核心基础课程，是初等代数的延伸和拓广，具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和广泛的应用性. 它的理论、方法和思想已渗透到数学与科学的各个领域. 随着通信与计算机科学的迅速发展，高等代数作为描述离散对象的各学科的重要基础，其地位和作用与日俱增. 高等代数中蕴含着符号化、公理化、形式化、模型化、结构化等代数学特有的思想方法，承担着培养学生逻辑思维能力、计算能力与数学运用能力的重任. 在高等代数的学习中，我们不仅要掌握具体的概念、公式、法则、性质、定理，而且更应该注重对理论的整体分析，揭示各种代数结构之间的内在联系，掌握有关的思想、语言和方法.

第 1 章　符号化思想

数学的一个重要特征是拥有独特的符号语言，包括最简单的数字符号和由现代数理逻辑研究所发展起来的完整的符号系统. 美国数学史家 M·克莱因指出："数学的另一个重要特征是它的符号语言. 如同音乐利用符号来代表和传播声音一样，数学也用符号表示数量关系和空间形式. 与日常讲话用的语言不同，日常语言是习俗的产物，也是社会和政治运动的产物，而数学语言则是慎重的、有意的，而且是精心设计的. 凭借数学语言的严密性和简洁性，数学家们就可以表达和研究数学思想. 这些思想如果用普通语言表达出来，就会显得冗长不堪."[①]数学简洁的符号语言有助于提高思维的效率.

数学符号语言的掌握被看成是数学水平提高的重要标志—— 代数语言的掌握标志着由小学到中学的发展，极限语言的掌握标志着由常量数学上升到变量数学的水平，集合论语言的普遍使用则是数学现代发展的一个重要标志.

古希腊之前直到丢番图(Diophantine，约公元 250 年至 275 年)时代，代数学处于最初的文字叙述阶段，算术或代数尚未形成任何简化的符号表示法，代数的运算法则都是采用通常的语言叙述方式来表达，因而代数推理也都是用直观的方法处理. 缺乏符号运算的代数是相当原始和笨拙的代数. 5000 多年前的美索不达米亚人的数学问题文本，往往是由一个或多个问题组成，其表述方式为：首先陈述问题，其次一步一步地描绘算法或解法，最后给出问题的答案. 他们的算法中没有"等号"或其他简洁符号，而是由一个个简练的短语或句子组成，因此，他们在解题时遇到了诸多困难. 又如，在中国古代数学著作《九章算术》中有这样一道题：

今有上禾(指上等稻子)三秉(指捆)，中禾二秉，下禾一秉，实(指谷子)三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何?

《九章算术》的方程式(解法)是这样的：把方程组的系数和常数项从上至下

① 邓东皋，孙小礼，张祖贵. 数学与文化. 北京：北京大学出版社，1990 年，第 42 页.

摆成三列(从右到左)，运算采用“遍乘直除”的方法，就是把某一列系数全部乘一个适当的倍数，然后再直接减去另一列的若干倍，一直算到每一列上只剩下分别与三个未知数对应的系数. 反复执行这种“遍乘直除”算法，就可以解出方程. 其实所谓的“遍乘直除”就是我们现在求解多元一次方程组时采用的加减消元法.

该问题是用文字表述的，解法也是用文字叙述的. 今天，我们只用三个变量的关系式就能将其表示出来. 令 x，y，z 分别代表一捆上、中、下稻禾可得稻谷的斗数，则有

$$\begin{aligned} 3x+2y+z&=39, \\ 2x+3y+z&=34, \\ x+2y+3z&=26. \end{aligned}$$

解之得，$x=9\frac{1}{4}$，$y=4\frac{1}{4}$，$z=2\frac{3}{4}$. 这并不是一个特别难解的题，但在编写《九章算术》的那个年代，只有专家才能解答.

我国在辛亥革命前也未能采用国际通用的数学符号体系. 如在 1906 年京师大学堂适用的教科书上就用“天、地、人、元”等来表示未知数，用符号“$\perp$”、“$\mid$”表示加、减，分数则自上往下读，如多项式

$$\frac{w^2}{5}-\frac{z^3}{3}+\frac{x^2y^4}{27},$$

被写成

$$\frac{\text{五}}{\text{元}^{\text{二}}} \Bigg| \frac{\text{三}}{\text{人}^{\text{三}}} \perp \frac{\text{二七}}{\text{天}^{\text{二}}\text{地}^{\text{四}}}.$$

如果要表示一元二次方程的解的公式则需要几页的篇幅. 由此可见，落后的表达方式阻碍了数学的交流与发展.

1.1　符号化

随着人类文明的不断进步，符号从无到有，从简单到复杂，从具体到抽象. 在现实生活中，符号无处不在，没有符号，人们表达思想、交流感情将困难重重，可以说，现实世界是一个符号化的世界. 人类社会的发展离不开符号.

德国著名哲学家卡西尔(Cassirer，1874—1945 年)认为：符号是人们共同约定用来表示一定对象的标志物，它可以包括以任何形式通过感觉来显示意义的全部现象. 符号是信息的外在形式或物质载体，是信息表达和传播中不可缺少的一种基本要素. 符号通常可分成语言符号和非语言符号两大类，这两大类

符号在传播过程中通常是结合在一起的. 无论是语言符号还是非语言符号，在人类社会传播中都能起到指代功能和交流功能. 符号一般指文学、语言、电码、数学符号、化学符号、交通标志等. 但符号学里的符号范围要广泛得多，社会生活中如打招呼的动作、仪式、游戏、文学、艺术、神话等的构成要素都是符号. 总之，能够作为某一事物标志的，都有可能称为符号.

符号伴随着人类的各种活动，人类社会和人类文化就是借助于符号才能得以形成的. 数学符号是人类在数学的产生、发展、研究和应用过程中共同约定用来表示一定对象的标志物. 数学符号产生于数学概念、演算、公式、命题、推理和逻辑关系等整个数学过程中，是为使数学思维过程更加准确、概括、简明、直观和易于揭示数学对象的本质而形成的特殊的数学语言. 数学符号是数学科学专门使用的特殊符号，是一种含义高度概括、形体高度浓缩的抽象的科学语言. 如 $F[x]$在高等代数中表示数域 F 上所有一元多项式做成的集合，并在其中定义了加法和乘法运算，因此称 $F[x]$为 F 上的一元多项式环. 还有诸如行列式、矩阵、二次型、向量、向量空间等都是具有确定数学含义的符号. 可以说，数学的发展史就是数学符号的产生和发展的历史，数学符号的使用和创新推动了数学的向前发展.

数学的符号化思想就是将研究对象进行抽象，利用数学符号加以表示，并进行运算、推理，或利用规律、规则来解决数学问题的思想. 具体表现在下列三个方面：

(1)人们有意识地、普遍地运用符号去概括、表述、研究数学.

(2)反复改良和筛选出科学的、恰当的数学符号，以便能清晰、准确、简洁地表达数学概念、思想方法和逻辑关系.

(3)数学符号经数学家们筛选和改造，形成一种约定的、规范化的、形式化的系统.

数学符号是数学的抽象语言，是文字的缩写，是数学家们交流、传达和记录数学思维信息的简明语句. 数学史家梁宗巨认为："一套合适的符号，绝不仅仅是起速记、节省时间的作用，它能精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系. 一个较复杂的公式，如果不用符号而用日常的语言来叙述，往往十分冗长而且含混不清."①如果高等代数没有一套独立的符号体系，那么对其理论的研究将是非常困难甚至是不可能的. 行列式、矩阵等概念，如果用文字语言来叙述，那么对其研究的艰难程度是不难想象的. 行列式和矩阵的引入，使得代数研究达到了更高的抽象程度. 塞尔维斯特指出："它是代数上的代数，这是一

① 梁宗巨. 世界数学史简编. 沈阳：辽宁教育出版社，1981 年，第 134 页.

种使我们能够把代数运算组合起来并预言结果的演算."然而，对于行列式和矩阵的研究则又必须引进适当的符号作为必要的前提，如数码的排列等.

数学符号化对数学发展具有重要的理论价值. 数学符号的出现是数学诞生与发展的一个重要标志；标准的统一化的数学符号的使用，便于世界不同国家、不同地区、不同民族之间的数学交流与沟通，符号化便于计算、逻辑推理，符号化是数学抽象化的必然结果，新的数学符号的出现往往是新的数学领域的先导. 可以说，没有数学的符号化，就没有数学的抽象化和形式化，也就不会有数学的公理化. 怀特黑德写道："由于大量的数学符号，往往使得数学被认为是一门难懂而又神秘的科学. 当然，如果我不了解符号的含义，那就什么也不知道. 而且对于一个符号，如果我们只是一知半解地使用它，则也是无法掌握和运用自如的. 实际上，对于各行各业的技术术语而言，同样都要训练有素才能灵活应用. 但是，不能认为这些术语和符号的引入，增加了这些理论的难度. 相反地，这些术语或符号的引入，往往是为了理论的易于表述和解决问题. 特别是在数学中，只要细加分析，即可发现符号化给数学理论的表述和论证带来极大的方便，甚至是必不可少的."①

皮亚诺在其所著《形式数学》一书的前言中写道："在数学中一切进步都是引入符号(表意符号)后的反响……符号方法的基本用途是使运算简化."他断言一切数学都可以用符号加以形式地表述. 布洛亨姆写道："数学语言对任何人来说，不仅是最简单明了的语言，而且也是最严格的语言."②德国数学家 F·克莱因也说："代数学上的进步是引进了较好的符号体系，这对它本身和分析的发展比 16 世纪技术上的进展远为重要. 事实上，采取了这一步，才使代数有可能成为一门科学."

1.2　代数学中的符号化历程

每一个数学符号系统要得到普遍采纳和使用都需要经历漫长的岁月. 比如，现在世界上最完善的阿拉伯记数法，是人类花费了四千余年的时间和精力才取得的伟大成就，远比任何其他计数方法来得简易和严密. 它不仅对数学发展具有重大的意义，而且对科学与技术的进步有着深远的影响. 科技史权威辛格指出："这项发明对于技术的重要性几乎是无法言过其实的. 我们对这项发明已习以为常，以至于认为是理所当然的."

---

① 〔美〕莫里兹. 数学的本性. 朱剑英，译. 大连：大连理工大学出版社，2008 年，第 108 页.

② 〔美〕莫里兹. 数学的本性. 朱剑英，译. 大连：大连理工大学出版社，2008 年，第 105 页.

最先向欧洲人介绍印度数码的是意大利数学家斐波那契(Leonardo Fibonacci，约1170—1250年)，他在《算盘书》中写到："这是印度的九个数码：987654321，还有一个阿拉伯人称之为零的符号，任何数都可以表示出来."从那时起，又经过数百年的改进，到16世纪，终于形成了今天世界通用的数码. 对于斐波那契将阿拉伯数字引入欧洲所产生的重要意义，辛格在其主编的巨著《技术史》第二卷中这样写道："这部著作可谓自古代以来西方对数学的重要贡献. 当时在讲着阿拉伯语的工匠和商人那里沿用已久的数字体系首次被一位拉丁基督徒就其在西方技术和商业方面的应用进行了详尽的阐述……它的采用是科学兴起的一个重要因素，而且在确定16世纪和17世纪科学与技术的关系方面不无作用."①

在欧洲人的印象中，这些数码来自阿拉伯国家，所以称之为"阿拉伯数字". 它比中国数字、罗马字符都简单易学. 与之相比，其他一切的记数系统都黯然失色. 阿拉伯数字最终超越国界，成为世界人民的共同财富，它在全球的普及程度是其他任何一种语言和符号都望尘莫及的.

据说15世纪德国大学的数学课程还只限于教授加法和减法，学乘法和除法就得去意大利留学了！由此可见，中世纪欧洲算术的发展是何等之缓慢. 这也正是当时人们对计算感到莫大敬畏的原因. 对此，辛格曾写道："在古代，所有建筑、工程、测量和许多其他技术活动都遇到一个我们并不熟知的障碍，这就是笨拙的数字记号使得通常的算术运算法则难以直接应用. 实际上，天文学家能够使用从早期巴比伦时代开始沿用下来的60进制的数字系统. 这就使得运算便利，无需用符号表示任何一个大于60的数字. 在日常生活中，普通的算术运算，特别是乘法和除法，都相当费力，需要借助算盘或其他运算设备. 并非每一个聪明人，即使是受过教育的阶层，都能够进行这些初等计算……"②

卡兹指出："比数的符号形式更重要的是数的位值制."正是中国的十进位值制与印度—阿拉伯数码的完美结合，才创造了现代最简洁的数码系统. 柯朗说："像这种科学进步对日常生活有如此深刻的影响，并带来极大方便的例子还不是很多." 马克思在其《数学手稿》中称赞阿拉伯数字表示的十进位值制为"最妙的发明之一". 法国天文学家拉普拉斯站在西方人的立场上，说过一段经常被引用的经典名言："用十个记号来表示一切的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值，这种巧妙的方法出自印度. 这是一个深远而又重要的思想，

① 查尔斯·辛格. 技术史第二卷. 潜伟. 译. 上海：上海科技教育出版社，2004年，第546～547页.

② 查尔斯·辛格. 技术史第三卷. 高亮华，戴吾三. 译. 上海：上海科技教育出版社，2004年，第343页.

它今天看来如此简单，以致我们忽视了它的真正伟绩. 但恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米德和阿波罗尼的天才思想的关注时，我们更感到这成就的伟大了. ”[①]拉普拉斯充分表达了欧洲数学家对这两项因东方智慧而诞生的文明之花的崇敬之情.

高斯十分重视计算方法在科学中的地位，他那一大堆算术和天文学计算，如果没有十进制记数法是难以完成的. 据说他的许多计算都是靠心算完成的，改进方法只是为了那些天赋不够的人. 对于高斯超常的计算能力，卡约里曾这样写道："1735 年的一个天文学问题，如果运用当时现成的方法，则由几位卓越的数学家去共同解决，也至少要费时数月. 但欧拉运用他所改进的方法，仅用三天时间就解决了问题……后来高斯运用更为优越的方法，仅用三小时便解决了问题. ”

早在唐开元年间，阿拉伯数字就曾随历书传入过中国. 但印度天文算法突出的优点，与中国传统的历算体系难以协调，因而未被当时的中国学者采用. 数学史家严敦杰(1917—1988 年)认为中国没有率先接受印度数码的原因有四：①中国算筹已具备位置制原则；②表示中国数字的一、二、三、四……九个文字笔画简单，即已便利；③中国很早产生多种计数符号，如暗码、会计体等，效果与外来数码异曲同工；④19 世纪末期和 20 世纪初期，大量翻译欧美和日本数学书，使用阿拉伯数码已为大势所趋. [②]

数学符号是数学的语言单位，是人们进行计算、推理、证明以及解决问题的工具. 在代数学长期的发展演变过程中，数学家们创造性地提炼出一套代数学独特的符号体系. 如数字：1，2，3，…；字母：一般指英文字母、希腊字母等；约定符号：如 π，e 等；方程：一元一次方程"$ax=b$"，一元二次方程"$ax^2+bx+c=0$，…"，指数方程，对数方程，三角方程，线性方程组，矩阵方程等；关系符号：等号"$=$"，约等号"$\approx$"，小于"$<$"，不等于"$\neq$"等；运算符号：代数运算，如加"$+$"，减"$-$"，乘"$\times$"，除"$\div$"，乘方"a^n"($n\in N$)，开方"$\sqrt[n]{a}$"($n\in N$，当 n 为偶数时 $a\geqslant 0$)；指数运算"a^x($a>0$，$x\in\mathbf{R}$)"；对数运算"$\log_a b$(a，$b>0$，$a\neq 1$)"；阶乘"$n!$"；组合数"C_n^m"；排列数"P_n^m"；求和符号"$\sum a_i$"；求积符号"$\prod a_i$"等. 高等代数中常用的符号，如一般数域"F"，有理数域"$\mathbf{Q}$"，实数域"$\mathbf{R}$"，复数域"$\mathbf{C}$"，数域 F 上的一元多项式环"$F[x]$"，行列式"$|a_{ij}|$"，矩阵"$\mathbf{A}=(a_{ij})$"，二次型，向

① 〔法〕皮埃尔·西蒙·拉普拉斯. 宇宙体系论. 李珩，译. 上海：上海世纪出版集团，2001 年，第 356 页.

② 转引自：徐品方，张红. 数学符号史. 北京：科学出版社，2006 年，第 75 页.

量空间，欧氏空间等等.

16 世纪以前，符号化思想处于低级阶段，代数的表达方式都是文字式的，只有一些简单地与具体事物有关联的象形符号和书写符号. 17 世纪以来，数学家们逐渐有意识地在其著作中引入符号体系. 法国数学家韦达(1540—1603 年)第一次系统地用符号取代过去的缩写，用字母表示已知数和未知数及其运算，确立了符号代数的原理和方法，使代数成为世界通用的符号体系. 大数学家笛卡儿(1596—1650 年)对韦达使用的字母进行改进，用 a，b，c，…等表示已知数，用 x，y，z，…等表示未知数. 在创建微积分的过程中，莱布尼兹(1646—1716 年)对各种数学符号进行了长期的研究，他创立的许多数学符号一直沿用至今，比如我们熟悉的积分符号“$\int$”. 与此同时，牛顿也创立了另一种不同的微积分符号体系，但由于民族的偏见，英国数学家曾在相当长的时期内抵制莱布尼兹的符号体系，仍然坚持使用牛顿的符号，后来因其使用不便而被淘汰. 行列式符号“$\|$”是英国数学家凯莱 1841 年首先引用的，向量“$\vec{\gamma}$”符号是法国数学家柯西 1853 年引用的. 这些新符号的引入，为解线性方程组提供了极大的便利，尤其是矩阵的引入，使得线性方程组解的理论问题得以彻底解决，使得二次型、向量空间、欧氏空间与矩阵建立了紧密的联系，为代数学的深入研究提供了强有力的理论工具.

经过十七八世纪的发展，数学的表述才真正实现了符号化. 从 19 世纪开始，随着集合理论的形成和发展，数学符号化思想向更高层次迈进，代数学实现了抽象化、形式化以及公理化，对数学的发展产生了巨大而深远的影响.