工程数学习题解答

（下　册）

（积分变换、数理方程、概率统计部分）

上海市业余工业大学高等数学教研室编

前　　言

为配合电视大学师生的教学需要，我们编写了一套工程数学习题解答，取材主要根据中央广播电视大学的选用教材同时辅以一定数量的补充题。本书为下册，内容包括“积分变换”、“数学物理方程与特殊函数”、“概率统计”等三部分．因各本教材的编目不同，所以各部分的编目也不同，请读者鉴谅．

由于时间仓促，加上编者水平有限，错误和不妥之处一定不少，欢迎广大读者批评指正．

编　　者

目录

第一部分 积 分 变 换

第二部分 数学物理方程与特殊函数

第三部分　概　率　统　计

第一部分

积分变换

第一章 傅里叶变换

习题一

1. 试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega,$$

其中
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau.$$

【证】 由傅里叶积分定理知

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right]e^{j\omega t}\,d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau\right]d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right.\\
&\qquad\left.+j\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega t\cos\omega\tau\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega t\sin\omega\tau\, d\tau\right]d\omega$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau\right]\cos\omega t\, d\omega + \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau\right]\sin\omega t\, d\omega$$

$$=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\, d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\, d\omega,$$

其中
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau,$$
$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau.$$

2. 试证：若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件，当 $f(t)$ 为奇函数时，则有
$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\, d\omega,$$
其中
$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau;$$
当 $f(t)$ 为偶函数时，则有
$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\, d\omega,$$
其中
$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

【证】 因为由上题知
$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\, d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\, d\omega,$$
其中
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau.$$

所以当 $f(t)$ 是奇函数时，$f(\tau)\cos\omega\tau$ 是 τ 的奇函数，$f(\tau)\sin\omega\tau$ 是 τ 的偶函数，故由奇、偶函数在对称区间上积分性质知

$$a(\omega)=0,\quad b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau.$$

从而有
$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega,$$

其中
$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau.$$

同理，当 $f(t)$ 是偶函数时，有

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,$$

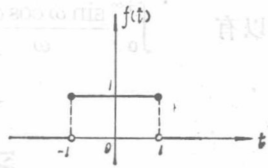
$$b(\omega)=0.$$

故
$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega\tau\,d\tau,$$

其中
$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau.$$

3. 在题 2 中，设

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } |t|\leqslant 1;\\ 0, & \text{当 } |t|>1,\end{cases}$$



试算出 $a(\omega)$ 并推证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1;\\[2mm] \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1;\\[2mm] 0, & |t|>1.\end{cases}$$

【解】 因为 $f(t)$ 是偶函数，所以由题 2 知

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos\omega\tau\,d\tau$$

$$=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega,$$

故 $$f(t)=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega\cos\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega.$$

即 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cdot 1, & |t|<1;\\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{f(1^+)+f(1^-)}{2} \\ \quad=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\left[=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{f(-1^+)+f(-1^-)}{2}\right], & |t|=1;\\ \dfrac{\pi}{2}\cdot 0, & |t|>1.\end{cases}$$

所以有 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1;\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

习　题　二

1. 求矩形脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}A, & 0\leqslant t\leqslant\tau;\\ 0, & 其它\end{cases}$$

的傅氏变换.

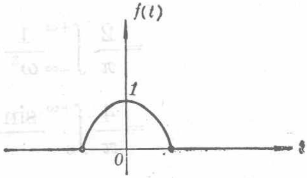
【解】 由傅氏变换定义知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_0^{\tau} Ae^{-j\omega t}dt$$

$$=A\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_0^{\tau}=\frac{A(1-e^{-j\omega\tau})}{j\omega}.$$

2. 求下列函数的傅氏积分:

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1;\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$



【解法一】 因为 $f(t)$ 是偶函数,所以根据习题一的题 2 有

$$f(t)=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t\,d\omega,$$

其中
$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t^2)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{4}{\pi\omega^3}(\sin\omega-\omega\cos\omega).$$

故
$$f(t)=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\,d\omega.$$

又右端积分当 $t=\pm1$ 时为 0.

【解法二】 由傅氏变换定义,知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-t^2)(\cos\omega t-j\sin\omega t)dt$$

$$=2\int_0^1(1-t^2)\cos\omega t\,dt=\frac{4}{\omega^3}(\sin\omega-\omega\cos\omega).$$

再根据傅氏逆变换定义可得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

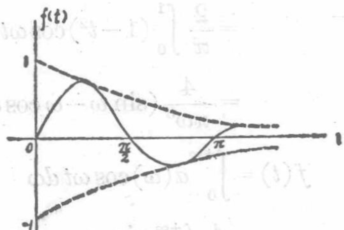
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{\omega^3}(\sin\omega-\omega\cos\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^3}(\sin\omega-\omega\cos\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\,d\omega.$$

又右端积分当 $t=\pm1$ 时为 0.

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-t}\sin 2t, & t\geqslant 0.\end{cases}$



【解】 由傅氏变换定义,知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\sin 2te^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-(1+j\omega)t}\sin 2t\,dt$$

$$=\frac{e^{-(1+j\omega)t}[-(1+j\omega)\sin 2t-2\cos 2t]}{[-(1+j\omega)]^2+2^2}\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{(1+j\omega)^2+4}=\frac{2}{5+2j\omega-\omega^2},$$

所以 $f(t)=F^{-1}[G(\omega)]=F^{-1}\left[\dfrac{2}{5+2j\omega-\omega^2}\right]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2e^{j\omega t}}{5+2j\omega-\omega^2}dt$$

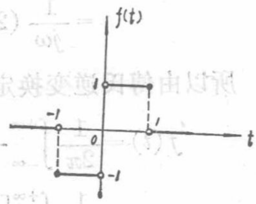
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2-2j\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

$$+j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\sin\omega t-2\omega\cos\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega.$$

(3) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1;\\ -1, & -1<t<0;\\ 1, & 0<t<1;\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$



【解法一】 因为 $f(t)$ 是奇函数，所以由习题一的题 2 知

$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega,$$

而 $b(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=\dfrac{2}{\pi}\int_0^1\sin\omega t\,dt$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right]_0^1=\frac{2}{\pi\omega}(1-\cos\omega).$$

故 $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi\omega}(1-\cos\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega.$$

$$\text{又，右端积分}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } t=-1 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } t=0 \text{ 时；}\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } t=1 \text{ 时。}\end{cases}$$

【解法二】 由傅氏变换定义，知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0} -e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{j\omega}-\frac{e^{j\omega}}{j\omega}-\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}+\frac{1}{j\omega}$$

$$=\frac{1}{j\omega}(2-2\cos\omega)=-\frac{2j}{\omega}(1-\cos\omega),$$

所以由傅氏逆变换定义，得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-\frac{2j}{\omega}(1-\cos\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{2j}{\omega}(1-\cos\omega)\right](\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega$$

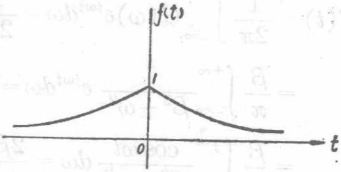
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{2j}{\omega}(1-\cos\omega)\right]j\sin\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega.$$

$$\text{又，右端积分}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } t=-1 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } t=0 \text{ 时；}\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } t=1 \text{ 时。}\end{cases}$$

3．求下列函数的傅氏变换，并推证下列积分结果：



(1) $f(t)=e^{-\beta|t|}$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}.$$

【解法一】 因为$f(t)$是偶函数，所以根据习题一的题2有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega.$$

从而

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-\beta t}(\omega\sin\omega t-\beta\cos\omega t)}{\omega^2+\beta^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{2\beta}{\pi(\omega^2+\beta^2)}.$$

又
$$G(\omega)=\pi a(\omega)=\frac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}.$$

而

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega^2+\beta^2}\cos\omega t\,d\omega,$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}f(t)=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}.$$

【解法二】 由傅氏变换定义，知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|t|}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{(\beta-j\omega)t}dt+\int_0^{+\infty}e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{\beta-j\omega}e^{(\beta-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-(\beta+j\omega)}e^{-(\beta+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\beta-j\omega}+\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}.$$

所以由傅里叶逆变换可得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}d\omega$$

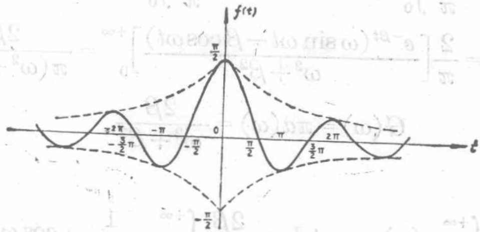
$$=\frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}\,e^{j\omega t}d\omega=\frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t+j\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{2\beta}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2\beta}f(t)=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}.$$

(2) $f(t)=e^{-|t|}\cos t$, 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$



【解法一】 因为$f(t)$是偶函数,所以根据习题一的题2有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega.$$

而

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t}[\cos(1+\omega)t+\cos(1-\omega)t]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(1+\omega)t\,dt+\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(1-\omega)t\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-t}[(1+\omega)\sin(1+\omega)t+(-1)\cos(1+\omega)t]}{1+(1+\omega)^2}\right.$$

$$+\frac{e^{-t}[(1-\omega)\sin(1-\omega)t-\cos(1-\omega)t]}{1+(1-\omega)^2}\Bigg]_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1+(1+\omega)^2}+\frac{1}{1+(1-\omega)^2}\right]$$

$$=\frac{2(\omega^2+2)}{\pi(\omega^2+2\omega+2)(\omega^2-2\omega+2)}=\frac{2(\omega^2+2)}{\pi(\omega^4+4)}.$$

又 $$G(\omega)=\pi a(\omega)=\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}.$$

而 $$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega,$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

【解法二】 由傅氏变换定义,知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\cos t\,e^{-j\omega t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}.$$

所以 $$f(t)=F^{-1}[G(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}(\cos\omega t+j\sin\omega t)d\omega$$

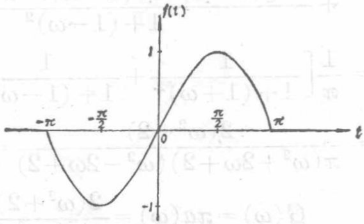
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega.$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

(3) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$



【证法一】 因为$f(t)$是奇函数，所以由习题一的题2知

$$f(t)=\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

从而

$$\begin{aligned}
b(\omega)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\,dt\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1-\omega)t-\cos(1+\omega)t]\,dt\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega}-\frac{\sin(1+\omega)t}{1+\omega}\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega}-\frac{\sin(1+\omega)\pi}{1+\omega}\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\omega\pi}{1+\omega}+\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega}\right]=\frac{2\sin\omega\pi}{\pi(1-\omega^2)}.
\end{aligned}$$

所以 $$f(t)=\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\,d\omega.$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

【证法二】 由傅氏变换定义，知