

工程数学习题解答

(下 册)

(积分变换、数理方程、概率统计部分)

上海市业余工业大学高等数学教研室编

前 言

为配合电视大学师生的教学需要,我们编写了一套工程数学习题解答,取材主要根据中央广播电视大学的选用教材同时辅以一定数量的补充题。本书为下册,内容包括“积分变换”、“数学物理方程与特殊函数”、“概率统计”等三部分。因各本教材的编目不同,所以各部分的编目也不同,请读者鉴谅。

由于时间仓促,加上编者水平有限,错误和不妥之处一定不少,欢迎广大读者批评指正。

编 者

目 录

第一部分 积分变换

第一章 傅里叶变换	1
习题一	1
习题二	4
习题三	22
习题四	25
补充习题	35
附录 傅氏变换简表推导	75
第二章 拉普拉斯变换	93
习题一	93
习题二	98
习题三	119
习题四	138
习题五	147
补充习题	167
附录 拉氏变换简表推导	201

第二部分 数学物理方程与特殊函数

第一章 一些典型方程和定解条件的推导	222
习题一	222
第二章 分离变量法	229
习题二	229
第三章 行波法与积分变换法	265
习题三	265

第四章 拉普拉斯方程的格林函数法	278
习题四	278
第五章 数理方程求解中出现的几个特殊类型的常微 分方程	284
习题五	284
第六章 贝塞尔函数	287
习题六	287
第七章 勒让德多项式	303
习题七	303
第八章 数理方程的差分解法	313
习题八	313

第三部分 概 率 统 计

第一章 概率的基本概念	317
§ 1 随机事件及其概率	317
§ 2 古典概率	317
§ 3 事件的运算及概率的加法公式	320
补充习题	324
§ 4 集合与事件	326
§ 5 条件概率、乘法公式、独立性	326
补充习题	330
§ 6 全概率公式与逆概公式	332
补充习题	334
§ 7 独立试验序列概型	336
补充习题	339
第二章 随机变量及其分布	341
§ 1 随机变量	341
§ 2 离散型随机变量	341
补充习题	343

§ 3 连续型随机变量	344
§ 4 分布函数与随机变量函数的分布	344
补充习题	350
第三章 随机变量的数字特征	355
§ 1 离散型随机变量的期望	355
§ 2 连续型随机变量的期望	355
§ 3 期望的初步性质及随机变量函数的期望公式	355
§ 4 方差及其初等性质	355
§ 5 其它	355
补充习题	366
第四章 多维随机向量	369
§ 1 随机向量的(联合)分布与边缘分布	369
§ 2 两个随机变量的函数的分布	375
补充习题	382
§ 3 随机向量的数字特征	386
§ 4 关于 n 维随机向量	393
第五章 随机抽样法与参数估计	399
§ 1 总体与样本	399
§ 2 分布密度(分布函数的近似求法)	399
§ 3 最大似然估计法	399
§ 4 期望与方差的点估计	399
§ 5 期望的置信区间	399
§ 6 方差的置信区间	399
第六章 假设检验	407
§ 1 问题的提法	407
§ 2 一个正态母体的假设检验	407
§ 3 两个正态母体的假设检验	407
§ 4 总体的分布函数的假设检验	407
补充习题	415
第七章 回归分析法	417
补充习题	417

第一部分

积分变换

第一章 傅里叶变换

习 题 一

1. 试证: 若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

【证】 由傅里叶积分定理知

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + j \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right] d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega t \cos \omega \tau d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega t \sin \omega \tau d\tau \right] d\omega \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] \cos \omega t d\omega \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] \sin \omega t d\omega \\
&= \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,
\end{aligned}$$

其中

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

2. 试证: 若 $f(t)$ 满足傅氏积分定理的条件, 当 $f(t)$ 为奇函数时, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau;$$

当 $f(t)$ 为偶函数时, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

【证】 因为由上题知

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

所以当 $f(t)$ 是奇函数时, $f(\tau) \cos \omega \tau$ 是 τ 的奇函数, $f(\tau) \sin \omega \tau$ 是 τ 的偶函数, 故由奇、偶函数在对称区间上积分性质知

$$a(\omega) = 0, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

从而有
$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中
$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

同理, 当 $f(t)$ 是偶函数时, 有

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$b(\omega) = 0.$$

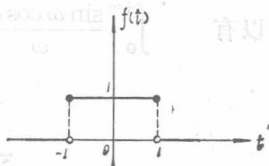
故
$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

其中
$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

3. 在题 2 中, 设

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |t| \leq 1; \\ 0, & \text{当 } |t| > 1, \end{cases}$$

试算出 $a(\omega)$ 并推证



$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < 1; \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

【解】 因为 $f(t)$ 是偶函数, 所以由题 2 知

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \omega \tau d\tau$$

$$= \frac{2}{\pi \omega} \sin \omega,$$

$$\text{故 } f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi \omega} \sin \omega \cos \omega t d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} f(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot 1, & |t| < 1; \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} \\ \quad = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(-1^+) + f(-1^-)}{2} \right], & |t| = 1; \\ \frac{\pi}{2} \cdot 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

$$\text{所以有 } \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & |t| < 1; \\ \frac{\pi}{4}, & |t| = 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

习 题 二

1. 求矩形脉冲函数

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

的傅氏变换.

【解】 由傅氏变换定义知

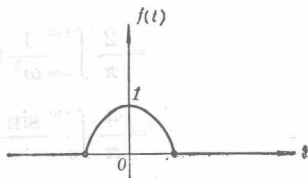
$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} A e^{-j\omega t} dt$$

$$= A \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_0^{\tau} = \frac{A(1 - e^{-j\omega\tau})}{j\omega}.$$

2. 求下列函数的傅氏积分:

$$(1) f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & t^2 < 1; \\ 0, & t^2 > 1. \end{cases}$$

【解法一】 因为 $f(t)$ 是偶函数, 所以根据习题一的题 2 有



$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

其中

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2) \cos \omega t dt \\ &= \frac{4}{\pi \omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \cos \omega t d\omega. \end{aligned}$$

又右端积分当 $t = \pm 1$ 时为 0.

【解法二】 由傅氏变换定义, 知

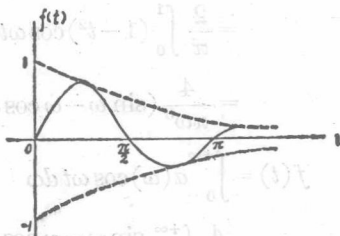
$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^1 (1-t^2) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= 2 \int_0^1 (1-t^2) \cos \omega t dt = \frac{4}{\omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega). \end{aligned}$$

再根据傅氏逆变换定义可得到

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^3} (\sin \omega - \omega \cos \omega) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^3} \cos \omega t d\omega.
 \end{aligned}$$

又右端积分当 $t = \pm 1$ 时为 0.

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t} \sin 2t, & t \geq 0. \end{cases}$$

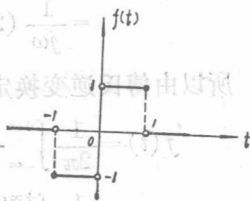


【解】 由傅氏变换定义, 知

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin 2t e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(1+j\omega)t} \sin 2t dt \\
 &= \frac{e^{-(1+j\omega)t} [-(1+j\omega) \sin 2t - 2 \cos 2t]}{[-(1+j\omega)]^2 + 2^2} \Big|_0^{+\infty} \\
 &= \frac{2}{(1+j\omega)^2 + 4} = \frac{2}{5 + 2j\omega - \omega^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } f(t) &= F^{-1}[G(\omega)] = F^{-1}\left[\frac{2}{5+j\omega-\omega^2}\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{j\omega t}}{5+j\omega-\omega^2} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-\omega^2-2j\omega)(\cos \omega t + j \sin \omega t)}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-\omega^2)\cos \omega t + 2\omega \sin \omega t}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega \\
 &\quad + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(5-\omega^2)\sin \omega t - 2\omega \cos \omega t}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(5-\omega^2)\cos \omega t + 2\omega \sin \omega t}{25-6\omega^2+\omega^4} d\omega.
 \end{aligned}$$

$$(3) f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -1; \\ -1, & -1 < t < 0; \\ 1, & 0 < t < 1; \\ 0, & 1 < t < +\infty. \end{cases}$$



【解法一】 因为 $f(t)$ 是奇函数，
所以由习题一的题 2 知

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

而
$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \omega t dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi \omega} (1 - \cos \omega).$$

故
$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi \omega} (1 - \cos \omega) \sin \omega t d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

$$\text{又, 右端积分} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{当 } t = -1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } t = 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } t = 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

【解法二】 由傅氏变换定义, 知

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1}^0 -e^{-j\omega t} dt + \int_0^1 e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{j\omega} - \frac{e^{j\omega}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \\ &= \frac{1}{j\omega} (2 - 2\cos \omega) = -\frac{2j}{\omega} (1 - \cos \omega), \end{aligned}$$

所以由傅氏逆变换定义, 得

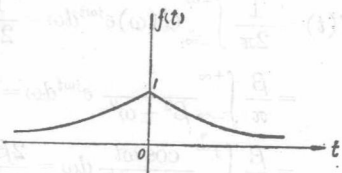
$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{2j}{\omega} (1 - \cos \omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{2j}{\omega} (1 - \cos \omega) \right] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{2j}{\omega} (1 - \cos \omega) \right] j \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t d\omega. \end{aligned}$$

$$\text{又, 右端积分} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{当 } t = -1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } t = 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } t = 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

3. 求下列函数的傅氏变换, 并推证下列积分结果:

(1) $f(t) = e^{-\beta|t|}$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}.$$



【解法一】 因为 $f(t)$ 是偶函数, 所以根据习题一的题 2 有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

从而

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \omega t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-\beta t} (\omega \sin \omega t - \beta \cos \omega t)}{\omega^2 + \beta^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{2\beta}{\pi(\omega^2 + \beta^2)}. \end{aligned}$$

又

$$G(\omega) = \pi a(\omega) = \frac{2\beta}{\omega^2 + \beta^2}.$$

而

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} \cos \omega t d\omega,$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^2 + \beta^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} f(t) = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}.$$

【解法二】 由傅氏变换定义, 知

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(\beta-j\omega)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{\beta-j\omega} e^{(\beta-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(\beta+j\omega)} e^{-(\beta+j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\beta-j\omega} + \frac{1}{\beta+j\omega} = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

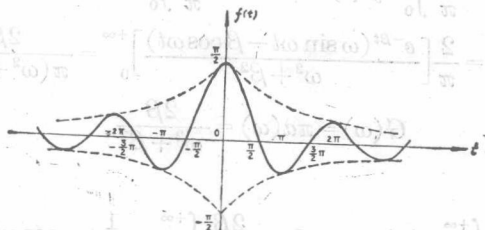
所以由傅里叶逆变换可得到

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t + j \sin \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega \\
 &= \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega.
 \end{aligned}$$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} f(t) = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}.$

(2) $f(t) = e^{-|t|} \cos t$, 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t.$$



【解法一】 因为 $f(t)$ 是偶函数, 所以根据习题一的题 2 有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

而

$$\begin{aligned}
 a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \cos \omega t dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} [\cos(1+\omega)t + \cos(1-\omega)t] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(1+\omega)t dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(1-\omega)t dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-t} [(1+\omega) \sin(1+\omega)t + (-1) \cos(1+\omega)t]}{1 + (1+\omega)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{-t}[(1-\omega) \sin(1-\omega)t - \cos(1-\omega)t]}{1+(1-\omega)^2} \Big]_0^{+\infty} \\
& = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{1+(1+\omega)^2} + \frac{1}{1+(1-\omega)^2} \right] \\
& = \frac{2(\omega^2+2)}{\pi(\omega^2+2\omega+2)(\omega^2-2\omega+2)} = \frac{2(\omega^2+2)}{\pi(\omega^4+4)}.
\end{aligned}$$

又 $G(\omega) = \pi a(\omega) = \frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}.$

而 $f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} \cos \omega t d\omega,$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} f(t) = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t.$

【解法二】由傅氏变换定义, 知

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos t e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \cos \omega t dt \\
&= \frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}.
\end{aligned}$$

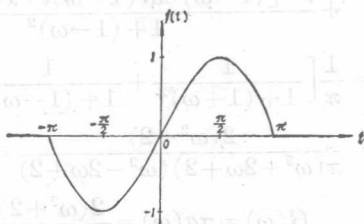
所以 $f(t) = F^{-1}[G(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4} e^{j\omega t} d\omega$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} \cos \omega t d\omega \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} \cos \omega t d\omega.
\end{aligned}$$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2+2}{\omega^4+4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t.$

(3) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$ 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi \sin \omega t}{1-\omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin t, & |t| \leq \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$



【证法一】 因为 $f(t)$ 是奇函数, 所以由习题一的题 2 知

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

从而

$$\begin{aligned} b(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin \omega t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(1-\omega)t - \cos(1+\omega)t] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega} - \frac{\sin(1+\omega)t}{1+\omega} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega} - \frac{\sin(1+\omega)\pi}{1+\omega} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \omega \pi}{1+\omega} + \frac{\sin \omega \pi}{1-\omega} \right] = \frac{2 \sin \omega \pi}{\pi(1-\omega^2)}. \end{aligned}$$

所以
$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi \sin \omega t}{1-\omega^2} d\omega.$$

故
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \pi \sin \omega t}{1-\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} f(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin t, & |t| \leq \pi; \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$$

【证法二】 由傅氏变换定义, 知