21世纪高等学校本专科规划课改教材

线性代数

曾 华 刘雁鸣 熊德之 主编

科学出版社

21世纪高等学校本专科规划课改教材

线性代数

曾　华　刘雁鸣　熊德之　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部21世纪大学数学（理工类和经管类）线性代数课程的基本要求和全国研究生入学考试大纲，为普通高等院校非数学专业本科生编写的. 全书分6章，前3章为基础篇，介绍行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组；后3章为应用提高篇，介绍矩阵相似对角化、二次型及线性空间与线性变换的基础知识.

本书在编写时遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，充分考虑了学生的自身特点和对本课程的要求，在编写上由浅入深，力求直观性和科学性相结合，使读者容易入门. 为学习方便，本书附有习题参考答案.

本书适合普通高等学校理工类、经管类各专业本科学生作为教材使用，也可作为其他各类高校师生和相关科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/曾华，刘雁鸣，熊德之主编. —北京：科学出版社，2013.2

21世纪高等学校本专科规划课改教材

ISBN 978-7-03-036647-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①曾…②刘…③熊… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第022394号

责任编辑：曾　莉 / 责任校对：蔡　莹

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2013年2月第一版　印张：15

2013年2月第一次印刷　字数：295 000

定价：26.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

线性代数是大学理工科经管类学生的一门重要课程，也是考研数学的基本内容之一．它能很好地培养学生的计算能力和抽象思维能力，其理论和方法在工程技术、科学研究以及经济、管理中也有着广泛的应用．编者本着教育要面向世界、面向未来、面向现代化的宗旨，针对学生实际，参照大学线性代数课程的教学基本要求，根据教育部21世纪大学数学（理工类和经管类）线性代数课程的基本要求和全国研究生入学考试大纲，编写了本书．

本书在编写时遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴进实际应用的原则，充分考虑了线性代数课程教学时数减少的趋势，并结合了学生的自身特点和对本课程的要求．本书起点较低，读者容易入门，在编写上由浅入深，力求直观性和科学性相结合，在保持传统教材优点的基础上，对教材内容、教材体系进行了适当的调整和优化．在内容上包含了理工、经管学科中的基本内容和研究生入学考试要求等．

本书共6章，其中第1章至第5章为必修内容，建议用40课时左右；第6章为选修，用“*”标出，建议用10学时左右．主要内容如下：

第1章为行列式，把行列式作为方阵的一种特定数值运算，介绍了行列式的定义、性质及计算方法，还介绍了行列式的应用——克拉默法则．

第2章介绍了矩阵及其运算，由实例引出，并对分块矩阵、逆矩阵、初等矩阵等内容展开讨论．

第3章为向量的线性相关性，首先对向量组的线性相关性、向量的秩展开讨论，并通过行秩、列秩给出矩阵的秩的定义，为确定方程组的解的结构做了一个较好的铺垫．

第4章为线性方程组，讨论了线性方程组的可解性及解的结构．

第5章为相似矩阵与二次型，介绍了方阵的特征值与特征向量，并对矩阵的相似及二次型进行了讨论．

第6章为线性空间与线性变换．本章为选修内容，介绍了线性空间与线性变换理论．学习本章内容是为了将前面章节的理论在后续课程及更广泛的领域里得到应用．

为了方便广大读者阅读，本书在每一节内容后配有习题，在每一章内容后配有本章复习题，并且在附录部分提供了这些习题的参考答案．

本书是为理工类、经济管理类本科学生编写的教材，可供这些类别的大学生考

研时参考，也可作为其他各级各类大学生的参考用书.

本书由曾华、刘雁鸣、熊德之主编，各章的具体编写如下：第 1 章和第 2 章由熊德之编写；第 3 章和第 6 章由曾华编写；第 4 章和第 5 章由刘雁鸣编写. 李健、孙艳军等参与了大纲拟定、习题整理、校正工作. 全书由曾华统稿.

由于时间紧迫并且作者的水平有限，书中一定存在不妥之处，希望得到专家、学者的批评指正，也希望使用本书的老师和学生提出宝贵意见，使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2012 年 9 月

目　录

基　础　篇

应用提高篇

基 础 篇

第 1 章　行　列　式

行列式的研究起源于对线性方程组的研究，它是线性代数中的一个重要概念. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中，x_1，x_2 为未知量；a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为未知量系数；b_1，b_2 为常数项. 用消元法解方程组(1.1.1)，得

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{aligned}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得到方程组(1.1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

(1.1.2)式中的分子、分母都是由四个数分两对相乘再相减而得. 为了叙述和记忆的方便，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1.3}$$

定义 1.1.1　称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**，简记为 $D = \det(a_{ij})$.

数 a_{ij} $(i=1, 2;\ j=1, 2)$ 称为行列式 D 的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表示该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表示该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用**对角线法则**来记忆(图 1.1).

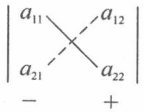

图 1.1

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线. 二阶行列式便是主对角线上两元素之积与副对角线上两元素之积的代数和，其中主对角线上元素乘积冠以正号，副对角线上元素乘积冠以负号.

利用二阶行列式的概念，(1.1.2)式中的分子也可用二阶行列式表示. 若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21},$$

则有

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \qquad (1.1.4)$$

注意 (1.1.4)式的分母是由方程组(1.1.1)的系数保持相应的位置顺序所确定的二阶行列式，称为**系数行列式**. x_i $(i = 1, 2)$ 的分子 D_i 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中的第 i 列 (即方程组中 x_i 的系数 a_{1i}，a_{2i})所得的二阶行列式. 这样，通过计算三个二阶行列式，可以求解二元一次线性方程组.

例 1.1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ x_1 + 4x_2 = -2. \end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-3) \times 1 = 11,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - (-3) \times (-2) = 22,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 7 \times 1 = -11.$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{22}{11} = 2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{11} = -1.$$

1.1.2 三阶行列式

类似二阶行列式的定义，可以定义三阶行列式.

定义 1.1.2 若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \qquad (1.1.5)$$

则称(1.1.5)式为**三阶行列式**.

上述定义表明三阶行列式是六个乘积项的代数和，每项的三个因子均为不同行不同列的三个元素的乘积. 也可以用对角线法则来表示三阶行列式的规律(图 1.2)：图中三条实线看成平行于主对角线的连线，三条虚线看成平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积前面带"＋"号，虚线上三元素的乘积前面带"－"号.

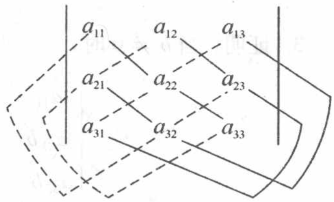

图 1.2

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 2\times1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times4 + 1\times2\times(-2) \\ &\quad -1\times1\times4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times2\times(-3) \\ &= -6+32-4-4-8-24 = -14. \end{aligned}$$

例 1.1.3 由三阶行列式对角线法则，容易得到以下结果：

(1) $\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ * & b & 0 \\ * & * & c \end{vmatrix} = abc$；

(2) $\begin{vmatrix} * & * & a \\ * & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & * \\ c & * & * \end{vmatrix} = -abc.$

其中,“ * ”表示这些位置上的元素可以任意取值.

习题 1.1

1. 求下列二阶、三阶行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$;　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;　(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$.

2. 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 证明:当 $b \neq 0$ 时,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{21}b & a_{22} & a_{23}b^{-1} \\ a_{32}b^2 & a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. 在下列各题中,求 a 的取值范围:

(1) $\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$;　(2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} < 0$.

1.2 逆序与对换

上一节用对角线法则计算二阶与三阶行列式,直观方便,但对于四阶或更高阶行列式,对角线法则就不合适了,因此需将二阶、三阶行列式的概念进行推广.本节介绍有关预备知识.

1.2.1 全排列与逆序数

定义 1.2.1 由 1, 2, …, n 这 n 个数按一定次序排成一排,称为一个 **n 元排列**,记为 $p_1 p_2 \cdots p_n$. 排列中的每个数称为**元素**.

例如,4231 是一个四元排列,54321 是一个五元排列.

n 元排列的总数是

$$n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

例如，1，2，3 共有 3！个排列，它们是

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

显然，$123\cdots n$ 是一个 n 元排列，它具有自然顺序（按递增的顺序排列），我们规定自然顺序为**标准次序**.

定义 1.2.2　在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果某两个数的先后次序与标准次序不同，则称有一个**逆序**，一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，四元排列 4231 中出现的所有逆序是 42，43，41，21，31，所以 $\tau(4231)=5$.

定义 1.2.3　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面讨论排列逆序数的计算方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的一个排列，逐个考察元素 $p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说元素 p_i 的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数之和就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

例 1.2.1　求下列排列的逆序数：

(1) 32514；　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) 在排列 32514 中，

3 排在首位，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有 1 个（数 3），故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有 3 个（数 3，2，5），故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有 1 个（数 5），故逆序数为 1.

于是 $\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$，是奇排列.

(2) 在排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中，$n,\ n-1,\ \cdots,\ 2,\ 1$ 的逆序数分别是 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-2,\ n-1$，于是

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

1.2.2　对换

定义 1.2.4　将一个排列中两个元素的位置互换，其余元素不动，这种作出新排列的手续称为**对换**. 将相邻两个元素对换，称为**相邻对换**.

关于对换,有下面的定理和推论.

定理 1.2.1 一个排列中任意两个元素进行一次对换,排列改变奇偶性.

推论 1.2.1 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

推论 1.2.2 全体 n $(n>1)$ 元排列的集合中,奇排列与偶排列的个数各占一半.

以上定理与推论证明从略.

例如,32514 是奇排列,元素 5 与 1 作对换,排列变为 32154,是偶排列.

又如,由 1, 2, 3 构成的排列有 6 个,其中 123, 231, 312 是偶排列,132, 213, 321 是奇排列,奇偶排列各占一半.

习题 1.2

1. 填空题:

(1) 当 $i=$ ________, $k=$ ________ 时,排列 $1274i56k9$ 为偶排列.

(2) $2n$ 元排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$ 的逆序数为________.

(3) 排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n-2)(2n)$ 的逆序数为________.

2. 按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4;　　(2) 4 1 3 2;　　(3) 3 4 2 1;　　(4) 2 4 1 3;

(5) 3 2 1 5 4;　　(6) 6 4 3 8 7.

1.3 n 阶行列式的定义

首先考察二阶和三阶行列式的结构,然后推广引出 n 阶行列式定义.

二阶和三阶行列式分别定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{23}a_{32} \\ -a_{13}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以看出:

(1) 行列式的每一项都是由不同行不同列的数作乘积,二阶行列式是两个数作乘积,三阶行列式是三个数作乘积.

(2) 二阶行列式有 $2=2!$ 项,三阶行列式有 $6=3!$ 项,因此,行列式是 $n!$ $(n=2, 3)$ 个乘积项的代数和.

(3) 当行列式的每一项的行标排成标准次序时，该项的正负号由列标排列的奇偶性决定. 奇排列取“$-$”号，偶排列取“$+$”号.

以三阶行列式为例，带正号的三项列标排列是 123，231，312；带负号的三项列标排列是 132，213，321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，后三个排列都是奇排列，因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

于是，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中，$\sum$ 表示对 1，2，3 的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此可以将行列式推广到一般情形.

定义 1.3.1　将 n^2 个数 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列，在其左右两侧加竖线，按照下式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.3.1}$$

表示的所有 $n!$ 项的代数和称为 **n 阶行列式**，简记为 $D = \det(a_{ij})$，其中，$\sum$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列取和；a_{ij} 称为 D 的**元素**.

(1.3.1)式右边的每一乘积项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 中 n 个因子取自于 D 中不同行不同列的元素；行标成标准排列，相应的列标是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$. 若它是偶排列，则对应项带正号；若它是奇排列，则对应项带负号，用 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$ 统一表示.

当 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时，按定义 1.3.1 所定义的就是二阶和三阶行列式，它们与 1.1 节中用对角线法则定义的二阶和三阶行列式是一致的. 当 $n = 1$ 时，则有一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$，注意这里 $|a_{11}|$ 不是表示 a_{11} 的绝对值.

例 1.3.1　证明上三角形行列式(主对角线以下的元素都是 0)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 对于 D 中的元素，当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} 的下标应满足 $p_i>i$，即

$$p_1\geqslant 1,\ p_2\geqslant 2,\ \cdots,\ p_n\geqslant n.$$

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，而 $\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可证，下三角形行列式(主对角线以上的元素都是 0)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对于对角行列式 Λ(主对角线以外未写出的元素都是 0)，有

$$\Lambda=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

最后，再来讨论行列式定义的另一种表示法. 对于 n 阶行列中的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

把因子位置调整，使得列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经过 N 次对换后变成自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$，相应的行标排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 也经过 N 次对换，变成了排列 $q_1q_2\cdots q_n$，显然排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定. 因此

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

由推论 1.2.1，N 与 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 有相同的奇偶性，而 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 与 N 也有相同的奇偶性，故 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 与 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 的奇偶性相同. 因此

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

由此可得

定理 1.3.1 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n},$$