数学分析选讲

主　编　张学军
副主编　王仙桃　徐景实

湖南师范大学出版社

数学分析选讲

●主　编　张学军

●副主编　王仙桃　徐景实

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学分析选讲 / 张学军主编．—长沙：湖南师范大学出版社，2011. 10
ISBN 978 -7 -5648 -0574 -6

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①数学分析　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 217616 号

数学分析选讲

◇**主　　编：张学军**

◇责任编辑：颜李朝
◇责任校对：蒋旭东
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731. 88853867　88872751　传真/0731. 88872636
网址/http：//press. hunnu. edu. cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：国防科技大学印刷厂
◇开本：730 mm × 960 mm　1/16
◇印张：17. 75
◇字数：275 千字
◇版次：2012 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978 -7 -5648 -0574 -6
◇定价：32. 00 元

编者的话

本书是作者在一直从事本科生数学分析、分析学选讲教学及多年从事考研和大学生数学竞赛培训基础上编写而成的．本书的基本内容是湖南师范大学数学专业分析学选讲的主要内容以及从2002年开始的本校考研助学培训内容，其中有一定难度的内容是从2006年开始的湖南省大学生数学竞赛本校竞赛队的一些培训内容．

从考研方面而言，在数学专业考研的课程中，数学分析可以说是最重要且难度最大的必考课程之一，而且该课程是数学工作者走上数学研究之路的基石．众所周知，如果一个数学研究者没有扎实的数学分析功底，许多研究将会寸步难行．数学分析考研的难度主要在于不同学校的考题可能千差万别，没有太多的共同性且复习内容广泛、参考题量宏大、知识点很难把握等．数学分析知识上的难度主要是综合运用和技巧处理方面的难度．通过复习后也许大多数人都知道一些主要定义和定理，但有的人碰到具体问题后往往不会解决，主要问题就是综合运用能力或处理技巧上存在问题．看过多所院校数学分析考研题目的同学就会知道，要想在该科考出一个好成绩或者使该科在总分中至少不拖其他科目的后腿，首先必须牢牢掌握数学分析中的基本概念和基本定理，但有时仅仅掌握大学本科课堂上所学的基础知识是不够的，所以在复习过程中除了熟练掌握基础知识外还要掌握大量典型题目的处理方法、重要知识点的结合与灵活运用等．本书首先按知识板块将数学分析分为极限论、单变量微分学、单变量积分学、级数论、多变量微分学和参变量积分、多元积分学共六部分，在每一部分都列举一些例题和练习题，这些题目

有难有易，希望能够丰富和拓宽读者解决问题的思路；接着引进六个专题，就分析中一些有趣的知识点作几个专题讲座；同时为了开阔大家的视野，在最后列出了部分高校往届的一些考研试题供读者赏鉴.

读者知道，数学分析知识是一个整体知识，这些板块中例题或者练习题所给出的处理方法不一定是该题唯一的处理方法，所涉及的知识也不一定全部是该板块或者前面板块的知识，可能用到数学分析整个知识中的任何一部分，所以大家看到诸如导数中的题可能用级数论中的知识来解决也不必奇怪. 只有把握了数学分析知识的全局，各个部分知识的运用才会融会贯通.

另外，每个板块的最后有些例题和练习可能超出了一般高校考研的试题难度. 但通过这部分例题或练习的解题思路，一方面可以让读者开阔视野，争取把数学分析学得更好，应用得更好，另一方面可以让那些准备参加各自省里或者全国大学生数学竞赛的本科生有所收获，所以本书除了可以作为数学专业大学四年级分析学选讲的教材和考研复习参考书外，也可以作为竞赛参考书或者数学分析教学参考书.

本书在编写过程中可能会有这样或那样的缺点及毛病，真诚地希望读者批评指正！

编者

2011年8月于长沙

目　　录

第一章　极限论

第二章　单变量微分学

第三章　单变量积分学

第四章 级数论

第五章 多变量微分学和参变量积分

第六章 多元积分学

第七章 六个专题

第一章　极限论

本部分主要弄清楚：①各种极限的计算；②单调有界收敛原理、致密性定理、确界原理、Cauchy收敛原理等实数基本理论的灵活应用；③连续函数特别是闭区间上连续函数性质的运用；④极限定义的熟练掌握等.

一、基本定理和重要结论

确界原理： 任何非空有上界的实数集必有上确界.

单调收敛原理： 单调有界数列必收敛.

Cauchy收敛原理： 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是：对任意$\varepsilon > 0$，存在正整数N，当$n > N$时，$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$对一切正整数$p$成立，即$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{p\in\{1,2,3,\cdots\}} |x_{n+p} - x_n| = 0$.

致密性定理： 任何有界数列必有收敛子列.

有限覆盖定理： 有界闭区间的任何开覆盖都存在有限子覆盖.

区间套定理： 若$\{[a_n, b_n]\}$是区间长度趋于0的递缩区间列，则这些区间必有唯一公共点.

夹逼定理： (1) n充分大，$x_n \le y_n \le z_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则$\{y_n\}$也收敛于$a$； (2) 若在$x_0$点某去心邻域内有$f(x) \le g(x) \le h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$，则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

收敛判定： 数列$\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

子列定理： $\{x_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n-1}\}$收敛于同一数.

有界性定理： 有界闭区间上的连续函数必有界.

最值定理： 有界闭区间上的连续函数必有最大值和最小值.

Contor定理： 有界闭区间上的连续函数必定一致连续.

一致连续判定： $f(x)$在有限开区间(a,b)上一致连续的充要条件是 $f(a+0)$和$f(b-0)$都存在.

注： 当 $a=-\infty$ 或 $b=+\infty$ 时，结论不成立.

界值定理： 如果$f(x)$在区间I上连续，x_1和x_2是I上任两点，若$f(x_1)\neq f(x_2)$，则对于$f(x_1)$和$f(x_2)$之间任何数 c，必定存在x_1和x_2 之间的点 ξ 使得$f(\xi)=c$.

极限存在条件： (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$存在的充要条件是

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A .$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

函数极限和数列极限的关系： $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$的充要条件是：对任意收敛于$a$但每项都不等于$a$的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

从该命题可知，若有两个收敛于a但每项都不等于a的数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$ 使$\{f(x_n)\}$和$\{f(y_n)\}$有不同的极限，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)$必定不存在.

连续条件： $f(x)$在a点连续的充要条件是

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) .$$

两个重要极限： (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

两个重要不等式： (1) 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|\sin x|\le|x|$；

(2) 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x<\tan x$.

二、例题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+c|x|\right)$存在，求常数 c 的值以及常数 a 和 b 之间满足的关系.

解： 本题主要考查函数极限存在的条件.

因 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}+cx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-c^2)x+(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{ab}{x^2}}-c}$

存在 $\Rightarrow\ 1-c^2=0$ 且 $1-c\neq 0\ \Rightarrow\ c=-1$ 且

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=\frac{a+b}{2}.$$

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{-1-\sqrt{1+\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{ab}{x^2}}}=-\frac{a+b}{2},$$

根据 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-|x|)$存在，知：

$$\frac{a+b}{2}=-\frac{a+b}{2}\ \Rightarrow\ a+b=0.$$

2. 已知 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}$.

解： 本题主要考查重要不等式$|\sin x|\leq|x|$ 及处理技巧 .

由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x}$

$$=2\sum_{k=1}^{n}a_k\cos\frac{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}{2}\ \sin\frac{k}{2(\sqrt{x+k}+\sqrt{x}\ )} \quad\Rightarrow$$

$$\left|\ \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k}\ \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \frac{k}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}} \quad\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \sin\sqrt{x+k} = 0.$$

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\ n^2\ [\ \cos\pi\sqrt{1+n^2}-(-1)^n\ ]$.

解： 本题主要考查重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$以及处理技巧.

因为 $(-1)^n n^2\ [\ \cos\pi\sqrt{1+n^2}-(-1)^n\ ]$

$= -n^2\ [\ 1-\cos\pi(\sqrt{1+n^2}-n)\ ]$

$$= -n^2\left[1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{1+n^2}+n}\right] = -2n^2\sin^2\frac{\pi}{2(\sqrt{1+n^2}+n)}$$

$$= \left[\frac{\sin\dfrac{\pi}{2(\sqrt{1+n^2}+n)}}{\dfrac{\pi}{2(\sqrt{1+n^2}+n)}}\right]^2 \times \frac{-\pi^2 n^2}{2(\sqrt{1+n^2}+n)^2} \quad\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n^2\ [\ \cos\pi\sqrt{1+n^2}-(-1)^n\ ] = -\frac{\pi^2}{8}.$$

4. 求 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^{n^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,b,c>0)$.

解： 本题主要考查重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$和$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

(1) 当 $a=0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^{n^2}=1$；当 $a\neq 0$时，

$$\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=\left[\left(1-2\sin^2\frac{a}{2n}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{a}{2n}}}\right]^{-2n^2\sin^2\frac{a}{2n}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{a}{2n}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{a}{2n}}}=\mathrm{e}$,

$$\lim_{n\to\infty}-2n^2\sin^2\frac{a}{2n}=-\frac{a^2}{2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}.$$

(2)　由于 $\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\left[\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}}\right]^{\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}},\ 而$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}\ .$$

5. (1)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$　$(0<\alpha<1)$;

(2)　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解: 本题主要考查夹逼定理.

(1)　由于 $0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]$

$$<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}=0$，由夹逼定理 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=0$.

(2) 由于 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$,

由夹逼定理有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

6. (1) 已知 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 的存在性；

(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，讨论 $f(x)$ 间断点的类型.

解：本题主要考查极限存在条件、间断点分类和重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\ .$$

(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+2^{-\frac{1}{x}}}{1-2^{-\frac{1}{x}}}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=-1 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

(2) 因为 $x\ne k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，

$$\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\left[\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}$$，故

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}$ 存在，故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；由于 $\lim\limits_{x\to k\pi+0} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to k\pi-0} f(x)$中有一个为$+\infty$，故 $x = k\pi \quad (k = \pm1, \pm2, \cdots)$为$f(x)$的第二类间断点.

7. (1) 设 $x_1 > a > 0$，$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$；

(2) 设 $a_1 = c > 0$，$a_{n+1} = c + \dfrac{1}{a_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$；

(3) 设 $0 < a_1 < b_1$，$a_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$，$b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$，求证: $\{a_n\}$ 和$\{b_n\}$ 收敛于同一数.

解：本题主要考查单调收敛原理.

(1) 因 $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a^2} = \sqrt{(x_n - a)^2 + a^2} \geq a$，从而 $n = 2, 3, \cdots$时，$x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2a(a - x_n) \leq 0$.

这意味着从第二项开始，$\{x_n\}$ 递减有下界，由单调收敛原理知$\{x_n\}$ 收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，对 $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2ax_n + 2a^2}$ 两边取极限得

$b = \sqrt{b^2 - 2ab + 2a^2}$ ，从而 $b = a$.

(2) 本数列不是单调数列，不能直接利用单调收敛原理，但可以从两个子列考虑.

由于 $a_3 - a_1 = \dfrac{1}{a_2} > 0$，

$$a_4 - a_2 = c + \frac{c^2 + 1}{c^3 + 2c} - \left(c + \frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{c^3 + 2c} < 0 \text{ 以及}$$

$$a_{2n+1} - a_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n-2}} = -\frac{a_{2n} - a_{2n-2}}{a_{2n}a_{2n-2}} \quad (n = 2, 3, \cdots)\text{和}$$

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{a_{2n+1}} - \frac{1}{a_{2n-1}} = -\frac{a_{2n+1} - a_{2n-1}}{a_{2n+1}a_{2n-1}} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

由归纳法知$\{a_{2n}\}$递减和$\{a_{2n-1}\}$递增，又 $c \le a_n \le c+\frac{1}{c}$，由单调收敛原理知$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}=b$ 都存在，且 $a \ge c > 0$ 和 $b \ge c > 0$． 由 $a_{2n}=c+\frac{1}{a_{2n-1}}$ 和 $a_{2n+1}=c+\frac{1}{a_{2n}}$ 得 $a=c+\frac{1}{b}$ 和 $b=c+\frac{1}{a} \Rightarrow ab \ne 1$，从而 $a=b=\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{c+\sqrt{c^2+4}}{2}$.

(3) 由 $a_k+b_k \ge 2\sqrt{a_kb_k} \Rightarrow a_{k+1}=\frac{2a_kb_k}{a_k+b_k} \le \sqrt{a_kb_k}=b_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots) \Rightarrow 0<b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n} \le \sqrt{b_nb_n}=b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，由单调收敛原理知$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b \ge a_1>0$存在.

又 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{1+\frac{a_n}{b_n}} \ge 1$，且 $a_n \le b_n \le b_1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$存在，由 $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ 得 $b=\sqrt{ab}$，又 $b \ne 0 \Rightarrow a=b$.

8. (Stolz公式$\frac{\otimes}{\infty}$型) 若对所有正整数n都有
$y_n<y_{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$ (l 有限或$\pm\infty$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$.

证明： 本题主要考查数列极限的定义和处理技巧.

当 l 有限时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$ 和 $y_{n+1}-y_n>0$ 知，对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数N，当 $n \ge N$ 时，$(l-\varepsilon)(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(l+\varepsilon)(y_{n+1}-y_n) \Rightarrow$ 当 $n>N$时，$(l-\varepsilon)(y_n-y_N)<x_n-x_N<(l+\varepsilon)(y_n-y_N) \Rightarrow$

$$\frac{x_N}{y_n}+(l-\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)<\frac{x_n}{y_n}<\frac{x_N}{y_n}+(l+\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right).$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x_N}{y_n}+(l\pm\varepsilon)\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\right]=l\pm\varepsilon$，则有正整数$N'>N$,

当 $n > N'$时，$l - 2\varepsilon < \dfrac{x_n}{y_n} < l + 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l.$

当 $l = +\infty$ 有限时，由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$ 和 $y_{n+1} - y_n > 0$知，对任意 $G > 0$，有正整数N，当 $n \geq N$时，$x_{n+1} - x_n > G\ (y_{n+1} - y_n) \quad \Rightarrow \quad$ 当 $n > N$时，$x_n - x_N > G\ (y_n - y_N) \quad \Rightarrow$ $\dfrac{x_n}{y_n} > \dfrac{x_N}{y_n} + G\left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x_N}{y_n} + G\left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)\right] = G$，则存在正整数$N' > N$，当 $n > N'$时，$\dfrac{x_n}{y_n} > \dfrac{G}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty.$

同理可证 $l = -\infty$ 时的结论.

注：l为一般的∞时命题不成立，如 $x_n = (-1)^n n$ 和 $y_n = n$.

9. 设 $x_1 > 0$，$\dfrac{x_{n+1}}{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)\ (n = 1, 2, \cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解：本题主要考查Stolz公式的应用.

令 $y_n = \dfrac{x_n}{n}$，则 $0 < y_{n+1} = \ln(1 + y_n) < y_n$，由单调收敛原理知$\{y_n\}$收敛. 设$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，则 $a = \ln(1 + a)$，故 $a = 0$.

由Stolz公式知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\dfrac{1}{y_{n+1}} - \dfrac{1}{y_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{\ln(1 + y_n)} - \dfrac{1}{y_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{y_n \ln(1 + y_n)}{y_n - \ln(1 + y_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2}{y_n - [y_n - \dfrac{y_n^2}{2} + o(y_n^2)]} = 2.$$

如果不直接用Stolz公式，可采用如下解法.

推导$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$相同，后面解法为：

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{y_{n+1}} - \dfrac{1}{y_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\ln(1 + y_n)} - \dfrac{1}{y_n}\right]$