# 大学数学

## 下册

陈仲　栗熙

南京大学出版社

# 大学数学

## 下册

陈仲　粟熙

阜阳师范学院图书馆
藏书

南京大学出版社
1999·南京

## 内 容 简 介

本书是综合大学本科物理、计算机、电子等系科“大学数学”课程的教材.它符合国家教委1989年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和教育部1998年制定的“全国硕士研究生人学统一考试数学考试大纲”的要求.本书分上、下册.上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分;下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程.

本书将“微积分”、“微分方程”和“线性代数”三部分内容统筹布局,循序渐进.全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,并适当地运用现代数学的观点和方法,将部分经典内容优化或深化,有些定理给出了编者自己的新证明.本书例题和习题丰富,有利于提高读者的分析能力.书末附有习题答案与提示.

本书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材.也可供工程技术人员阅读.

大 学 数 学
下 册
陈 仲 栗 熙
*
南京大学出版社出版
(南京大学校内　邮政编码:210093)
南京展望照排印刷有限公司排版
扬中市印刷厂印刷
江苏省新华书店发行
*
开本 787×1092　1/16　印张 22.25　字数 554 千
1998年12月第1版　1999年4月第2次印刷
印数 2001～4000
ISBN 7－305－03035－X/O・214
定价:25.50元

# 前　　言

本书是为综合大学本科物理、计算机、电子、天文、大气科学等系科“大学数学”课程编写的教材. 它符合国家教委 1989 年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和教育部 1998 年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求.

本书分上、下册. 上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分；下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程. 书末有 4 个附录. 本书可分三个学期讲授，总学时 288.

本书是我们多年从事“大学数学”课程教学的产物. 在编写过程中，我们力求做到：

1. 强化数学基础. 我们的教学对象是理科中对大学数学要求较高的系科，其教学任务除使学生获得大学数学的基本概念、基本理论和基本方法外，还要使学生受到良好的科学训练，受到数学思想方法、逻辑推理能力的培养. 因此，全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性，其中大部分定理给出简洁、严格的证明，旨在培养学生一定的数学素养，为学习专业课打下基础.

2. 改革课程体系.“微积分”、“微分方程”和“线性代数”在一些高等学校是作为三门课程独立开设的. 这次我们将这三部分内容统筹布局，略有交叉，互有渗透，但保持各章的相对独立. 例如：在“极限”之后介绍“级数的基本概念”，在“不定积分”之后增加一节“简单的微分方程”，在“定积分”之后讲授“广义积分”的基本概念，而对于这些概念的深入研究，留在后面的专列章节中讲授. 又如：在“空间解析几何”之前增加一章“线性代数初步”，将矩阵、向量和行列式的知识提前讲授；在下册中将“线性代数”安排在“微分方程”之前等. 我们的思想是将“大学数学”作为一个整体，由浅入深，循序渐进，并把线性代数的方法引入微积分和微分方程，这对于简化分析运算、提高数学水平很有好处. 我们感到，这样的课程体系具有科学性和适用性.

3. 更新教学内容. 一是将部分经典内容优化或深化，对部分经典定理给出新证明. 例如：在导数部分建立“取对数求导公式”；在广义积分部分建立“广义牛顿-莱布尼兹公式”，两类广义积分敛散性判别统一处理；对于空间曲线弧长计算公

式、曲线积分计算公式、正交曲线坐标系下的散度与旋度公式等都给出了我们自己的新证明.二是增加了差分方程,动力系统和外微分等知识的介绍.

4. 渗透现代数学知识.我们在介绍经典数学内容的同时,注意渗透现代数学的观点和方法,适当地运用现代数学的术语和符号,为学生以后学习现代数学提供了“接口”.

本书在编写中还十分注重对学生解题技巧和演算能力的培养,选编了大量具有启发性、典型性的例题和习题,并注重一题多解,前后呼应.习题分A,B两组,A组为基本要求,B组为较高要求.书末附有习题答案与提示.

书中用“*”标出的内容供教师选用,一般留给学生课外阅读.

本书在编写中,重点参考了由陈仲、姚天行合编的《微积分学引论》一书(南京大学出版社出版,1991年版),选用了该书的部分习题.

本书第十章由粟熙编写,其余各章由陈仲编写.

本书在编写过程中,得到南京大学数学系佟文廷、陆文钊、姜东平、许绍溥、姚天行等老师的大力支持和帮助,由他们组成的专家组对本书的教学大纲进行评审,提出了许多有益的建议;特别得到我们的老师叶彦谦教授的指导,他担任我们“大学数学”课程建设的顾问,并仔细审阅本书初稿,提出许多宝贵的意见;在本书出版前的4年中,王现、丁南庆、丁德成、孙建华、曹荣美、周如海、林成森、何炳生、马传渔、尹会成、张明生、王芳贵、朱乃谦、江惠坤、范克新、黄卫华、杨兴州、华茂芬、曹苏平、程健、邵荣、黄振友、李耀文、金其年等24位老师曾先后使用本书的讲义进行教学,并提出许多改进意见;本书的出版还得到南京大学教务处、南京大学出版社的大力支持.编者谨此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中缺点和不足难免,诚恳期待专家和读者不吝赐教.



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

# 目　　录

## 第八章　线积分 面积分 场论



## 第九章　级数　广义积分学

## 第十章 线性代数

## 第十一章 微 分 方 程

# 第八章　线积分 面积分 场论

这一章研究多元函数沿着曲线与曲面积分的问题.研究的方法仍然是“分割取近似,求和取极限”.最后介绍场论基本知识.

## §8.1　线 积 分

多元函数沿着空间曲线的积分为线积分,它有第一型与第二型两种类型.作为预备知识,我们首先引进空间曲线弧长的概念.

### 8.1.1　空间曲线的弧长

**定义 8.1.1**　(曲线的弧长)　设 $\Gamma\subset\mathbf{R}^3$ 为连续曲线,端点为 $A,B$,顺次用分点 $A=A_0$, $A_1,\cdots,A_n=B$ 将曲线 $\Gamma$ 分割为 $n$ 个小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$,设弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的直径为 $d_i$,令

$$\lambda=\max\{d_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\},$$

称 $\lambda$ 为**分割的模**.用线段顺次连接 $A_0,A_1,\cdots,A_n$,得到折线 $A_0A_1\cdots A_n$(图 8.1),该折线的长度为

$$\sum_{i=1}^{n}|A_{i-1}A_i|,$$

若 $\lambda\to0$ 时,此和式有有限极限,即

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}|A_{i-1}A_i|=l,$$

其中 $l$ 为有限数,则称曲线 $\Gamma$ **可求长**,称 $l$ 为**曲线 $\Gamma$ 的弧长**.

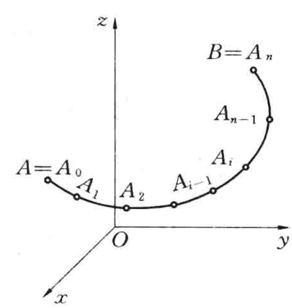


图 8.1

**定理 8.1.1**　设 $\Gamma\subset\mathbf{R}^3$ 为连续曲线,端点为 $A,B$,其参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

$\Gamma$ 与 $[\alpha,\beta]$ 的点一一对应,函数 $\varphi,\psi,\omega:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ 连续可导,则曲线 $\Gamma$ 可求长,且弧长为

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t.\tag{8.1}$$

为了证明此定理,我们先证明一个引理.

**引理 8.1.2**　设一元函数 $x_j=f_j(t)$ $(j=1,2,3)$皆在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续,记

$$G=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_j\in f_j([\alpha,\beta]),\ j=1,2,3\},$$

设函数 $F(x_1,x_2,x_3)$在区域 $G$ 上连续,将区间 $[\alpha,\beta]$ 任意地分割为 $n$ 个小区间,分点为 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$,令

$$\lambda^*=\max\{\Delta t_i\,|\,\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n\},$$

则对于任意的 $\xi_1^i,\xi_2^i,\xi_3^i\in[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$,有



试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$$\lim_{\lambda^*\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(f_1(\xi_1^i),f_2(\xi_2^i),f_3(\xi_3^i))\Delta t_i=\int_\alpha^\beta F(f_1(t),f_2(t),f_3(t))\mathrm{d}t.$$

*证 令 $F(t)=F(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$，则 $F(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，因而在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，于是 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，当 $\lambda^*<\delta_1$ 时有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}F(\tau_i)\Delta t_i-\int_\alpha^\beta F(t)\mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

另一方面，函数 $F(x_1,x_2,x_3)$ 在闭域 $G$ 上连续，必定一致连续. 于是，对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta_2>0$，当

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(f_j(\xi_j^i)-f_j(\tau_i)]^2}<\delta_2$$

时，对一切 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$|F(f_1(\xi_1^i),f_2(\xi_2^i),f_3(\xi_3^i))-F(f_1(\tau_i),f_2(\tau_i),f_3(\tau_i))|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}.$$

又由于函数 $f_j(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致连续，所以对上述 $\delta_2>0$，$\exists\ \delta_3>0$，当 $\lambda^*<\delta_3$ 时，对一切 $i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,3$，有

$$|f_j(\xi_j^i)-f_j(\tau_i)|<\frac{\delta_2}{\sqrt{3}},$$

于是有

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{3}[f_j(\xi_j^i)-f_j(\tau_i)]^2}\leqslant\sqrt{3\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\delta_2,$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_3)$，则当 $\lambda^*<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}F(f_1(\xi_1^i),f_2(\xi_2^i),f_3(\xi_3^i))\Delta t_i-\int_\alpha^\beta F(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}F(f_1(\xi_1^i),f_2(\xi_2^i),f_3(\xi_3^i))\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}F(f_1(\tau_i),f_2(\tau_i),f_3(\tau_i))\Delta t_i\right|\\ &\quad+\left|\sum_{i=1}^{n}F(\tau_i)\Delta t_i-\int_\alpha^\beta F(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{n}|F(f_1(\xi_1^i),f_2(\xi_2^i),f_3(\xi_3^i))-F(f_1(\tau_i),f_2(\tau_i),f_3(\tau_i))|\Delta t_i+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此引理得证. □

**定理 8.1.1 的证明** 顺次用分点 $A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$ 将曲线 $\Gamma$ 分割为 $n$ 个小弧段，与此对应的有区间 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割(不妨设 $A$ 点对应于参数 $\alpha$，$B$ 点对应于参数 $\beta$)：

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,$$

使得点 $A_i$ 的坐标为 $(\varphi(t_i),\psi(t_i),\omega(t_i))$ $(i=0,1,\cdots,n)$，设弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的直径为 $d_i$，令

$$\lambda=\max\{d_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\},\quad \lambda^*=\max\{\Delta t_i\,|\,\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n\},$$

当曲线 $\Gamma$ 与 $[\alpha,\beta]$ 的点一一对应时，可以证明 $\lambda\to 0 \Leftrightarrow \lambda^*\to 0$①. 记

$$\Delta\varphi(t_i)=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}),$$
$$\Delta\psi(t_i)=\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}),$$
$$\Delta\omega(t_i)=\omega(t_i)-\omega(t_{i-1}),$$

由于 $\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 皆连续可导，据微分中值定理，必存在 $\xi_1^i,\ \xi_2^i,\ \xi_3^i\in(t_{i-1},t_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\Delta\varphi(t_i)=\varphi'(\xi_1^i)\Delta t_i,\quad \Delta\psi(t_i)=\psi'(\xi_2^i)\Delta t_i,\quad \Delta\omega(t_i)=\omega'(\xi_3^i)\Delta t_i,$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|A_{i-1}A_i|&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[\Delta\varphi(t_i)]^2+[\Delta\psi(t_i)]^2+[\Delta\omega(t_i)]^2}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_1^i)+\psi'^2(\xi_2^i)+\omega'^2(\xi_3^i)}\Delta t_i.\end{aligned}$$

因为函数 $x_1=\varphi'(t),\ x_2=\psi'(t),\ x_3=\omega'(t)$ 皆在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，$F=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ 在 $G=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1\in\varphi([\alpha,\beta]),\ x_2\in\psi([\alpha,\beta]),\ x_3\in\omega([\alpha,\beta])\}$ 上连续，由引理 8.1.2 可得

$$\begin{aligned}l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|A_{i-1}A_i|&=\lim_{\lambda^*\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\xi_1^i)+\psi'^2(\xi_2^i)+\omega'^2(\xi_3^i)}\Delta t_i.\\&=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

存在. 这就证明了曲线 $\Gamma$ 可求长，同时证明了计算弧长的公式. □

**注** 任取点 $M\in$ 曲线 $\Gamma$，设点 $A$ 对应于参数 $\alpha$，点 $M$ 对应于参数 $t$，若弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的弧长为 $l(t)$，则

$$l(t)=\int_\alpha^t\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

于是

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2},\tag{8.2}$$

或

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2.$$

我们称 $\mathrm{d}l$ 为**弧长微元**，它是平面上的弧长微元 $\mathrm{d}l=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ 在空间的推广.

### 8.1.2 第一型线积分

设有质量线密度为 $\mu(x,y,z)$ 的空间曲线 $\Gamma$，欲求曲线 $\Gamma$ 的质量.

顺次用分点 $A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$ 将曲线 $\Gamma$ 分割为 $n$ 个小弧段(图 8.1)，设弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 $\Delta l_i$，弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的直径为 $d_i$，令

$$\lambda=\max\{d_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\},$$

称 $\lambda$ 为**分割的模**. 在弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，则曲线 $\Gamma$ 的质量

$$m(\Gamma)\approx\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i,$$

① 参阅 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册 P160.

令 $\lambda \to 0$，取极限即得

$$m(\Gamma) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i.$$

抽去上述例子的物理背景有

**定义 8.1.2** （第一型线积分） 设 $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为可求长的连续曲线，函数 $f: \Gamma \to \mathbf{R}$. 将 $\Gamma$ 任意地分割为 $n$ 个小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 $\Delta l_i$，在弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

若分割的模 $\lambda \to 0$时，此和式有有限极限（此极限值与 $\Gamma$ 的分割无关，与点 $M_i$ 的取法无关），则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$沿曲线 $\Gamma$ 的**第一型线积分**（或称**对弧长的线积分**），记为

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z) \mathrm{d}l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i, \text{①} \tag{8.3}$$

称 $f(x,y,z)$为**被积函数**，称 $\Gamma$ 为**积分路线**，称 $\mathrm{d}l$ 为**弧长微元**.

据此定义，曲线 $\Gamma$ 的质量为

$$m(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mu(x,y,z) \mathrm{d}l.$$

由定义可以看到，第一型线积分与沿着曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 从 $A$ 到 $B$，或从 $B$ 到 $A$ 的方向无关. 即有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z) \mathrm{d}l = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y,z) \mathrm{d}l.$$

这是第一型线积分与定积分的重要区别，除此之外，第一型线积分有与定积分类似的性质（参见 3.3.3），由读者自己复述.

下面研究第一型线积分的计算.

**定理 8.1.3** 假设

i) $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$为连续曲线，其参数方程为

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{8.4}$$

$\Gamma$ 与 $[\alpha, \beta]$ 的点一一对应，函数 $\varphi, \psi, \omega: [\alpha, \beta] \to \mathrm{R}$ 连续可导；

ii) 函数 $f: \Gamma \to \mathbf{R}$ 连续，

则函数 $f(x,y,z)$沿曲线 $\Gamma$ 的第一型线积分存在，且有

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z) \mathrm{d}l = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} \mathrm{d}t, \tag{8.5}$$

**证** 设曲线 $\Gamma$ 以弧长 $l$ 为参数的方程为

$$x=x(l), \quad y=y(l), \quad z=z(l) \quad (0 \leqslant l \leqslant h),$$

由于函数 $F(l) \xlongequal{\text{def}} f(x(l), y(l), z(l))$在 $[0,h]$ 上连续，故 $F(l)$在 $[0,h]$ 上可积. 据定义 8.1.2 即得函数 $f$ 沿曲线 $\Gamma$ 的第一型线积分存在，且有

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z) \mathrm{d}l = \int_{0}^{h} f(x(l), y(l), z(l)) \mathrm{d}l. \tag{8.6}$$

对此式右端的定积分作换元变换，以参数方程 (8.4) 中的变量 $t$ 作为新的积分变量. 由于

---

① 有些教科书将第一型线积分记为$\int_{\Gamma} f(x,y,z) \mathrm{d}s$，弧长微元记为 $\mathrm{d}s$.

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)},$$

故

$$\int_0^h f(x(l),y(l),z(l))\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

因此(8.5)式得证. □

**注 1** 在应用公式(8.5)计算线积分时,此式右端定积分的下限应小于上限.

**注 2** 当曲线 $\Gamma\subset\mathbf{R}^2$ 为平面曲线时,与之对应的第一型线积分 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}l$ 及其计算公式可作为(8.5)式的特殊情况处理(取 $z=0$).

**例 1** 计算 $\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}l$, 这里 $\Gamma$ 是 $xy$ 平面上以 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$ 为顶点的三角形的边界.

**解** $\Gamma$ 的图形如图 8.2,线段 $\overline{OA}$ 的方程为

$$y=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

线段 $\overline{AB}$ 的方程为

$$y=1-x\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

线段 $\overline{OB}$ 的方程为

$$x=0\quad(0\leqslant y\leqslant 1),$$

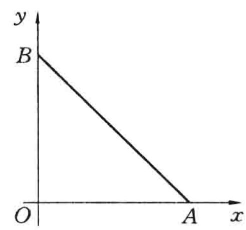

图 8.2

则

$$\begin{aligned}原式&=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{OB}}(x+y)\mathrm{d}l\\&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 1\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 y\,\mathrm{d}y=1+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

**例 2** 计算 $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$, 这里 $\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$.

**解** 取 $\Gamma$ 的参数方程为

$$x=\rho(\theta)\cos\theta=a\sin\theta\cos\theta,\quad y=\rho(\theta)\sin\theta=a\sin^2\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

则

$$\begin{aligned}原式&=\int_0^\pi\sqrt{a^2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi a\sin\theta\cdot\sqrt{a^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^2.\end{aligned}$$

**注** 在例 2 中若取 $\Gamma$ 的参数方程为 $x=\frac{a}{2}\cos\theta$, $y=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 也可,但计算将复杂些.

**例3** 求柱面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 界于 $xy$ 平面与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 之间的第一卦限部分曲面 $\Sigma$ 的面积.

**解** 曲面 $\Sigma$ 如图 8.3,设 $\Sigma$ 与 $xy$ 平面的交线为 $\Gamma$,$\Gamma$ 的方程为

$$\begin{cases}x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1,\\z=0.\end{cases}$$

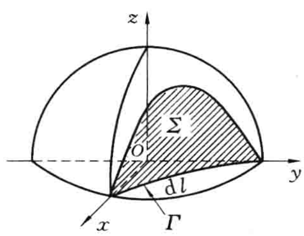


图 8.3

在 $\Gamma$ 上取弧长微元 $\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}l$ 上方曲面 $\Sigma$ 的部分面积为 $z\mathrm{d}l$，沿 $\Gamma$ 无限累加得曲面 $\Sigma$ 的面积为

$$S=\int_{\Gamma} z\,\mathrm{d}l=\int_{\Gamma}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}l.$$

取 $\Gamma$ 的参数方程为 $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^6\theta-\sin^6\theta}\cdot\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\cdot 3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{3}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{16}\sqrt{3}\,\pi.\end{aligned}$$

### 8.1.3 第二型线积分

在物理中还常常遇到另一类线积分问题. 例如一质点在变力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿着空间曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 从 $A$ 运动到 $B$，欲求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

力 $\boldsymbol{F}$ 的数值和方向作为点的函数是已知的，可表示为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，这里 $F_x,F_y,F_z$ 分别是力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的射影. 顺次用分点

$$A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$$

将曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 分为 $n$ 个小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$（图 8.4），设弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 $\Delta l_i$，直径为 $d_i$，令

$$\lambda=\max\{d_i\,|\,i=1,\cdots,n\},$$

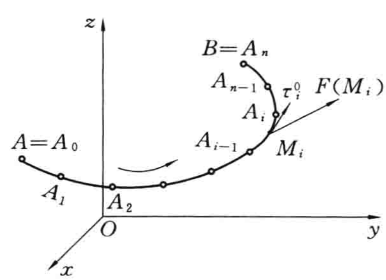


图 8.4

称 $\lambda$ 为**分割的模**. 在弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取点 $M_i$，记曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 在点 $M_i$ 的单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}_i^0$（方向与 $\overset{\frown}{AB}$ 上从 $A$ 到 $B$ 的方向一致，称为 $\overset{\frown}{AB}$**顺向的切向量**），则力 $\boldsymbol{F}$ 将质点沿曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 从 $A$ 到 $B$ 所作的功

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i^0\,\Delta l_i,$$

令 $\lambda\to0$，取极限即得

$$W=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i^0\,\Delta l_i.$$

抽去上述例子的物理背景，我们有

**定义 8.1.3** （第二型线积分） 设 $\Gamma\subset\mathbf{R}^3$ 为光滑曲线，起点为 $A$，终点为 $B$，$\Gamma$ 顺向的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau}^0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma),$$

函数 $P,Q,R:\Gamma\to\mathbf{R}$，记 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$. 将 $\Gamma$ 任意地分割为 $n$ 个小弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,\cdots,n)$，设弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 $\Delta l_i$，$\lambda$ 为分割的模，在弧段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取点 $M_i$，记

$$\boldsymbol{\tau}_i^0=\boldsymbol{\tau}^0(M_i)=(\cos\alpha_i,\ \cos\beta_i,\ \cos\gamma_i),$$

$$\Delta x_i=\cos\alpha_i\ \Delta l_i,\quad \Delta y_i=\cos\beta_i\ \Delta l_i,\quad \Delta z_i=\cos\gamma_i\ \Delta l_i,$$

作和式

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(M_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i^0\ \Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}Q(M_i)\Delta y_i+\sum_{i=1}^{n}R(M_i)\Delta z_i,$$

若 $\lambda\to 0$ 时,上式右边三个和式皆有有限极限(与 $\Gamma$ 的分割无关,与点 $M_i$ 的选取无关),则称此三个极限值的和为函数 $P,Q,R$ 沿曲线 $\Gamma$ 从 $A$ 到 $B$ 的**第二型线积分(或称对坐标的线积分)**,记为

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z&=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}^0\mathrm{d}l\\&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(M_i)\Delta y_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(M_i)\Delta z_i.\end{aligned}$$

据此定义,变力 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ 沿 $\Gamma$ 从 $A$ 到 $B$ 所作的功为

$$W=\int_{\widehat{AB}}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z.$$

**定理 8.1.4** 第二型线积分有下列性质(假设其中的线积分皆存在):

1° $\int_{\widehat{BA}}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=-\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$

2° $\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\widehat{AC}}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z+\int_{\widehat{CB}}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$

(这里点 $C\in$ 曲线 $\widehat{AB}$ ).

3° $\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_{\widehat{AB}}P\,\mathrm{d}x+\int_{\widehat{AB}}Q\,\mathrm{d}y+\int_{\widehat{AB}}R\,\mathrm{d}z.$

这些性质可由定义直接证明,这里从略.

下面研究第二型线积分的计算.

首先由第二型线积分的定义过程不难看出,第二型线积分总可以化为第一型线积分.

**定理 8.1.5** 假设

i) $\Gamma\subset\mathbf{R}^3$ 为光滑曲线,起点为 $A$,终点为 $B$,顺向的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau}^0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma);$$

ii) 函数 $P,Q,R:\Gamma\to\mathbf{R}$ 连续,

则 $P,Q,R$ 沿 $\Gamma$ 从 $A$ 到 $B$ 的第二型线积分存在,且有

$$\int_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_{\Gamma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}l.\tag{8.7}$$

**定理 8.1.6** 假设

i) $\Gamma\subset\mathbf{R}^3$ 为光滑曲线,起点为 $A$,终点为 $B$,其参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

$\Gamma$ 与 $[\alpha,\beta]$ 的点一一对应. 函数 $\varphi,\psi,\omega:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ 连续可微;

ii) 函数 $P,Q,R:\Gamma\to\mathbf{R}$ 连续,

则 $P,Q,R$ 沿 $\Gamma$ 从 $A$ 到 $B$ 的第二型线积分存在,且有

$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\begin{cases}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(P\varphi'+Q\psi'+R\omega')\mathrm{d}t, & \text{当起点 } A \text{ 对应于参数 } \alpha \text{ 时};\\ \displaystyle\int_{\beta}^{\alpha}(P\varphi'+Q\psi'+R\omega')\mathrm{d}t, & \text{当起点 } A \text{ 对应于参数 } \beta \text{ 时},\end{cases}\tag{8.8}$$

这里右端函数 $P,Q,R$ 中的 $x,y,z$ 用其 $t$ 的表示式代入.



试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com