

大学数学

下 册

陈 仲 栗 熙

南京大学出版社

大学数学

下册

陈仲 栗熙



南京大学出版社

1999 · 南京

内 容 简 介

本书是综合大学本科物理、计算机、电子等系科“大学数学”课程的教材,它符合国家教委 1989 年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和教育部 1998 年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求.本书分上、下册.上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分;下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程.

本书将“微积分”、“微分方程”和“线性代数”三部分内容统筹布局,循序渐进.全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,并适当地运用现代数学的观点和方法,将部分经典内容优化或深化,有些定理给出了编者自己的新证明.本书例题和习题丰富,有利于提高读者的分析能力.书末附有习题答案与提示.

本书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材.也可供工程技术人员阅读.

大 学 数 学

下 册

陈 仲 栗 熙

*

南京大学出版社出版

(南京大学校内 邮政编码: 210093)

南京展望照排印刷有限公司排版

扬中市印刷厂印刷

江苏省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/16 印张 22.25 字数 554 千

1998 年 12 月第 1 版 1999 年 4 月第 2 次印刷

印数 2001~4000

ISBN 7-305-03035-X/O · 214

定价: 25.50 元

前 言

本书是为综合大学本科物理、计算机、电子、天文、大气科学等系科“大学数学”课程编写的教材.它符合国家教委 1989 年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和教育部 1998 年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求.

本书分上、下册.上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分;下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程.书末有 4 个附录.本书可分三个学期讲授,总学时 288.

本书是我们多年从事“大学数学”课程教学的产物.在编写过程中,我们力求做到:

1. 强化数学基础.我们的教学对象是理科中对大学数学要求较高的系科,其教学任务除使学生获得大学数学的基本概念、基本理论和基本方法外,还要使学生受到良好的科学训练,受到数学思想方法、逻辑推理能力的培养.因此,全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,其中大部分定理给出简洁、严格的证明,旨在培养学生一定的数学素养,为学习专业课打下基础.

2. 改革课程体系.“微积分”、“微分方程”和“线性代数”在一些高等学校是作为三门课程独立开设的.这次我们将这三部分内容统筹布局,略有交叉,互有渗透,但保持各章的相对独立.例如:在“极限”之后介绍“级数的基本概念”,在“不定积分”之后增加一节“简单的微分方程”,在“定积分”之后讲授“广义积分”的基本概念,而对于这些概念的深入研究,留在后面的专列章节中讲授.又如:在“空间解析几何”之前增加一章“线性代数初步”,将矩阵、向量和行列式的知识提前讲授;在下册中将“线性代数”安排在“微分方程”之前等.我们的思想是将“大学数学”作为一个整体,由浅入深,循序渐进,并把线性代数方法引入微积分和微分方程,这对于简化分析运算、提高数学水平很有好处.我们感到,这样的课程体系具有科学性和适用性.

3. 更新教学内容.一是将部分经典内容优化或深化,对部分经典定理给出新证明.例如:在导数部分建立“取对数求导公式”;在广义积分部分建立“广义牛顿-莱布尼兹公式”,两类广义积分敛散性判别统一处理;对于空间曲线弧长计算公

式、曲线积分计算公式、正交曲线坐标系下的散度与旋度公式等都给出了我们自己的新证明. 二是增加了差分方程, 动力系统和外微分等知识的介绍.

4. 渗透现代数学知识. 我们在介绍经典数学内容的同时, 注意渗透现代数学的观点和方法, 适当地运用现代数学的术语和符号, 为学生以后学习现代数学提供了“接口”.

本书在编写中还十分注重对学生解题技巧和演算能力的培养, 选编了大量具有启发性、典型性的例题和习题, 并注重一题多解, 前后呼应. 习题分 A, B 两组, A 组为基本要求, B 组为较高要求. 书末附有习题答案与提示.

书中用“*”标出的内容供教师选用, 一般留给学生课外阅读.

本书在编写中, 重点参考了由陈仲、姚天行合编的《微积分学引论》一书(南京大学出版社出版, 1991 年版), 选用了该书的部分习题.

本书第十章由栗熙编写, 其余各章由陈仲编写.

本书在编写过程中, 得到南京大学数学系佟文廷、陆文钊、姜东平、许绍溥、姚天行等老师的大力支持和帮助, 由他们组成的专家组对本书的教学大纲进行评审, 提出了许多有益的建议; 特别得到我们的老师叶彦谦教授的指导, 他担任我们“大学数学”课程建设的顾问, 并仔细审阅本书初稿, 提出许多宝贵的意见; 在本书出版前的 4 年中, 王现、丁南庆、丁德成、孙建华、曹荣美、周如海、林成森、何炳生、马传渔、尹会成、张明生、王芳贵、朱乃谦、江惠坤、范克新、黄卫华、杨兴州、华茂芬、曹苏平、程健、邵荣、黄振友、李耀文、金其年等 24 位老师曾先后使用本书的讲义进行教学, 并提出许多改进意见; 本书的出版还得到南京大学教务处、南京大学出版社的大力支持. 编者谨此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限, 书中缺点和不足难免, 诚恳期待专家和读者不吝赐教.

目 录

第八章 线积分 面积分 场论

§ 8.1 线积分	(1)
8.1.1 空间曲线的弧长	(1)
8.1.2 第一型线积分	(3)
8.1.3 第二型线积分	(6)
习题 8.1	(11)
§ 8.2 面积分	(12)
8.2.1 第一型面积分	(12)
8.2.2 双侧曲面	(16)
8.2.3 第二型面积分	(18)
习题 8.2	(22)
§ 8.3 线积分、面积分、体积分间的关系	(24)
8.3.1 格林定理	(24)
8.3.2 斯托克斯定理	(28)
8.3.3 高斯定理	(31)
习题 8.3	(34)
§ 8.4 场 论	(36)
8.4.1 向量场与数量场	(36)
8.4.2 哈密顿算子 ∇	(37)
8.4.3 直角坐标系下的梯度、散度与旋度	(39)
1) 梯度(39). 2) 散度(40). 3) 旋度(42).	
8.4.4 无源场与无旋场	(44)
8.4.5 $*$ 场论在物理上的应用	(46)
1) 流体力学的连续性方程(46). 2) 热传导方程(47).	
习题 8.4(1)	(48)
8.4.6 $*$ 正交曲线坐标系下的梯度、散度与旋度	(49)
1) 正交曲线坐标系(49). 2) 弧长微元 曲面微元 体积微元(50). 3) 正交曲线坐 标系下的三度表达式(52).	
习题 8.4(2)	(56)

第九章 级数 广义积分学

§ 9.1 级数 函数项级数	(57)
9.1.1 正项级数敛散性判别法	(57)
9.1.2 任意项级数敛散性判别法	(60)
9.1.3 绝对收敛级数的性质	(63)

习题 9.1(1)	(64)
9.1.4 函数项级数与一致收敛性	(66)
9.1.5 一致收敛级数的性质	(69)
习题 9.1(2)	(70)
§ 9.2 幂级数	(71)
9.2.1 幂级数的收敛区间与收敛域	(71)
9.2.2 幂级数的一致收敛性	(73)
9.2.3 幂级数的和函数	(75)
9.2.4 初等函数的幂级数展式	(77)
9.2.5 欧拉公式	(80)
习题 9.2	(81)
§ 9.3 傅里叶级数	(82)
9.3.1 三角函数系的正交性	(82)
9.3.2 傅里叶级数	(83)
9.3.3 狄利克雷收敛定理	(83)
9.3.4 区间 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数	(85)
9.3.5 *傅里叶级数的复数形式	(86)
9.3.6 *均方差与贝塞尔不等式	(87)
习题 9.3	(88)
§ 9.4 广义积分学	(89)
9.4.1 广义积分敛散性判别法	(89)
习题 9.4(1)	(95)
9.4.2 含参定积分的性质与含参广义积分的一致收敛性	(96)
9.4.3 一致收敛含参广义积分的性质	(99)
习题 9.4(2)	(102)
§ 9.5 欧拉积分	(103)
9.5.1 Γ 函数	(103)
9.5.2 B 函数	(104)
9.5.3 斯特林公式	(107)
习题 9.5	(107)

第十章 线 性 代 数

§ 10.1 矩阵	(109)
10.1.1 可逆矩阵	(109)
10.1.2 分块矩阵	(115)
习题 10.1(1)	(119)
10.1.3 初等变换 初等矩阵	(121)
10.1.4 矩阵的秩	(129)
习题 10.1(2)	(130)
§ 10.2 线性空间	(132)
10.2.1 线性空间的定义 例子	(132)
10.2.2 子空间	(134)

习题 10.2(1)	(135)
10.2.3 线性无关性	(136)
10.2.4 基 维数 坐标	(142)
习题 10.2(2)	(149)
10.2.5 矩阵的秩(续)	(151)
习题 10.2(3)	(153)
§ 10.3 线性方程组	(154)
10.3.1 高斯消元法	(154)
10.3.2 线性方程组解的结构	(161)
习题 10.3	(166)
§ 10.4 线性变换	(169)
10.4.1 线性变换的定义	(169)
10.4.2 线性变换的运算	(172)
习题 10.4(1)	(174)
10.4.3 线性变换的矩阵表示	(175)
习题 10.4(2)	(180)
10.4.4 特征值 特征向量	(182)
10.4.5 可以对角化的矩阵	(186)
习题 10.4(3)	(191)
§ 10.5 欧几里得空间	(192)
10.5.1 向量的内积	(192)
10.5.2 施密特标准正交化方法	(196)
习题 10.5(1)	(199)
10.5.3 正交变换 对称变换	(201)
10.5.4 实对称矩阵的对角化	(203)
习题 10.5(2)	(207)
10.5.5 酉空间	(207)
习题 10.5(3)	(211)
§ 10.6 二次型	(212)
10.6.1 二次型的矩阵	(212)
10.6.2 二次型的标准形	(213)
10.6.3 复二次型和实二次型的规范形	(219)
习题 10.6(1)	(222)
10.6.4 正定二次型	(223)
10.6.5 二次曲面方程的化简	(228)
习题 10.6(2)	(231)

第十一章 微分方程

§ 11.1 一阶微分方程	(233)
11.1.1 全微分方程	(233)
习题 11.1(1)	(236)
11.1.2 一阶隐式方程	(237)

习题 11.1(2)	(242)
11.1.3 微分方程的应用(一)	(242)
1) 几何上的应用(242). 2) 物理上的应用(244).	
习题 11.1(3)	(246)
11.1.4 解的存在与唯一性	(247)
1) 皮卡存在唯一性定理(247). 2) 其它形式的存在与唯一性定理(251).	
3) 解的延拓(252).	
习题 11.1(4)	(253)
§ 11.2 高阶微分方程	(254)
11.2.1 解的存在与唯一性	(254)
11.2.2 高阶线性方程通解的结构	(254)
1) 函数的线性无关性 朗斯基行列式(255). 2) 线性齐次方程通解的结构(259).	
3) 线性非齐次方程通解的结构 常数变易法(261).	
习题 11.2(1)	(265)
11.2.3 常系数线性齐次方程	(267)
11.2.4 常系数线性非齐次方程	(271)
1) 算子方法(271). 2) 待定系数法(277).	
11.2.5 欧拉方程	(277)
习题 11.2(2)	(279)
11.2.6 微分方程的应用(二)	(280)
1) 自由振动(280). 2) 强迫振动(283).	
习题 11.2(3)	(284)
§ 11.3 微分方程的近似解	(284)
11.3.1 微分方程的幂级数解	(284)
1) 一阶方程的幂级数解(285). 2) 二阶线性方程的幂级数解(286).	
11.3.2 *微分方程的数值计算方法	(287)
1) 欧拉方法(287). 2) 霍恩方法(288). 3) 龙格-库塔方法(289).	
习题 11.3	(290)
§ 11.4 微分方程组	(291)
11.4.1 常系数线性方程组	(291)
1) 化为高阶方程(291). 2) 用矩阵对角化解微分方程组(293). 3) 算子方法(297).	
习题 11.4(1)	(299)
11.4.2 首次积分法	(300)
习题 11.4(2)	(305)
§ 11.5 差分方程 一阶偏微分方程	(305)
11.5.1 差分方程	(305)
习题 11.5(1)	(309)
11.5.2 一阶偏微分方程	(309)
习题 11.5(2)	(313)
§ 11.6 动力系统介绍	(314)
11.6.1 动力系统	(314)
11.6.2 解的稳定性	(315)

11.6.3 初等奇点与相图	(316)
习题 11.6	(320)
习题答案与提示	(321)
附录Ⅲ 外微分	(335)
附录Ⅳ 多项式	(339)

第八章 线积分 面积分 场论

这一章研究多元函数沿着曲线与曲面积分的问题. 研究的方法仍然是“分割取近似, 求和取极限”. 最后介绍场论基本知识.

§ 8.1 线 积 分

多元函数沿着空间曲线的积分为线积分, 它有第一型与第二型两种类型. 作为预备知识, 我们首先引进空间曲线弧长的概念.

8.1.1 空间曲线的弧长

定义 8.1.1 (曲线的弧长) 设 $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为连续曲线, 端点为 A, B , 顺次用分点 $A=A_0, A_1, \dots, A_n=B$ 将曲线 Γ 分割为 n 个小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 设弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的直径为 d_i , 令

$$\lambda = \max \{d_i \mid i=1, 2, \dots, n\},$$

称 λ 为分割的模. 用线段顺次连接 $A_0, A_1, \dots, A_n$, 得到折线 $A_0A_1 \cdots A_n$ (图 8.1), 该折线的长度为

$$\sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i|,$$

若 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 此和式有有限极限, 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i| = l,$$

其中 l 为有限数, 则称曲线 Γ 可求长, 称 l 为曲线 Γ 的弧长.

定理 8.1.1 设 $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为连续曲线, 端点为 A, B , 其参数方程为

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

Γ 与 $[\alpha, \beta]$ 的点一一对应, 函数 $\varphi, \psi, \omega: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ 连续可导, 则曲线 Γ 可求长, 且弧长为

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt. \quad (8.1)$$

为了证明此定理, 我们先证明一个引理.

引理 8.1.2 设一元函数 $x_j = f_j(t)$ ($j=1, 2, 3$) 皆在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 记

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_j \in f_j([\alpha, \beta]), j=1, 2, 3\},$$

设函数 $F(x_1, x_2, x_3)$ 在区域 G 上连续, 将区间 $[\alpha, \beta]$ 任意地分割为 n 个小区间, 分点为 $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, 令

$$\lambda^* = \max \{\Delta t_i \mid \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i=1, 2, \dots, n\},$$

则对于任意的 $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$), 有

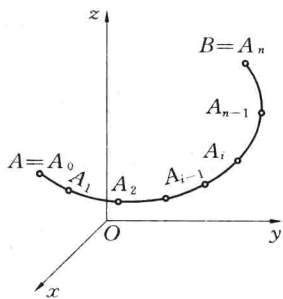


图 8.1

$$\lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(f_1(\xi_1^i), f_2(\xi_2^i), f_3(\xi_3^i)) \Delta t_i = \int_a^\beta F(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) dt.$$

证 令 $F(t) = F(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, 则 $F(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 因而在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $\lambda^ < \delta_1$ 时有

$$\left| \sum_{i=1}^n F(\tau_i) \Delta t_i - \int_a^\beta F(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$).

另一方面, 函数 $F(x_1, x_2, x_3)$ 在闭域 G 上连续, 必定一致连续. 于是, 对于上述 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当

$$\sqrt{\sum_{j=1}^3 [f_j(\xi_j^i) - f_j(\tau_i)]^2} < \delta_2$$

时, 对一切 $i=1, 2, \dots, n$, 有

$$|F(f_1(\xi_1^i), f_2(\xi_2^i), f_3(\xi_3^i)) - F(f_1(\tau_i), f_2(\tau_i), f_3(\tau_i))| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}.$$

又由于函数 $f_j(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致连续, 所以对上述 $\delta_2 > 0, \exists \delta_3 > 0$, 当 $\lambda^* < \delta_3$ 时, 对一切 $i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, 3$, 有

$$|f_j(\xi_j^i) - f_j(\tau_i)| < \frac{\delta_2}{\sqrt{3}},$$

于是有

$$\sqrt{\sum_{j=1}^3 [f_j(\xi_j^i) - f_j(\tau_i)]^2} \leq \sqrt{3 \left(\frac{\delta_2}{\sqrt{3}} \right)^2} = \delta_2,$$

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_3)$, 则当 $\lambda^* < \delta$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n F(f_1(\xi_1^i), f_2(\xi_2^i), f_3(\xi_3^i)) \Delta t_i - \int_a^\beta F(t) dt \right| \\ & \leq \left| \sum_{i=1}^n F(f_1(\xi_1^i), f_2(\xi_2^i), f_3(\xi_3^i)) \Delta t_i - \sum_{i=1}^n F(f_1(\tau_i), f_2(\tau_i), f_3(\tau_i)) \Delta t_i \right| \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n F(\tau_i) \Delta t_i - \int_a^\beta F(t) dt \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n |F(f_1(\xi_1^i), f_2(\xi_2^i), f_3(\xi_3^i)) - F(f_1(\tau_i), f_2(\tau_i), f_3(\tau_i))| \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2} \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \sum_{i=1}^n \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此引理得证. □

定理 8.1.1 的证明 顺次用分点 $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ 将曲线 Γ 分割为 n 个小弧段, 与此对应的有区间 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割 (不妨设 A 点对应于参数 α , B 点对应于参数 β):

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta,$$

使得点 A_i 的坐标为 $(\varphi(t_i), \psi(t_i), \omega(t_i))$ ($i=0, 1, \dots, n$), 设弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的直径为 d_i , 令

$$\lambda = \max\{d_i | i=1, 2, \dots, n\}, \quad \lambda^* = \max\{\Delta t_i | \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i=1, 2, \dots, n\},$$

当曲线 Γ 与 $[\alpha, \beta]$ 的点一一对应时, 可以证明 $\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda^* \rightarrow 0$ ①. 记

$$\Delta\varphi(t_i) = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}),$$

$$\Delta\psi(t_i) = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}),$$

$$\Delta\omega(t_i) = \omega(t_i) - \omega(t_{i-1}),$$

由于 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$ 皆连续可导, 据微分中值定理, 必存在 $\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i \in (t_{i-1}, t_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 使得

$$\Delta\varphi(t_i) = \varphi'(\xi_1^i)\Delta t_i, \quad \Delta\psi(t_i) = \psi'(\xi_2^i)\Delta t_i, \quad \Delta\omega(t_i) = \omega'(\xi_3^i)\Delta t_i,$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i| &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[\Delta\varphi(t_i)]^2 + [\Delta\psi(t_i)]^2 + [\Delta\omega(t_i)]^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_1^i) + \psi'^2(\xi_2^i) + \omega'^2(\xi_3^i)} \Delta t_i. \end{aligned}$$

因为函数 $x_1 = \varphi'(t)$, $x_2 = \psi'(t)$, $x_3 = \omega'(t)$ 皆在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, $F = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 在 $G = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \in \varphi'([\alpha, \beta]), x_2 \in \psi'([\alpha, \beta]), x_3 \in \omega'([\alpha, \beta])\}$ 上连续, 由引理 8.1.2 可得

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i| = \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_1^i) + \psi'^2(\xi_2^i) + \omega'^2(\xi_3^i)} \Delta t_i \\ &= \int_a^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt \end{aligned}$$

存在. 这就证明了曲线 Γ 可求长, 同时证明了计算弧长的公式. $\square$

注 任取点 $M \in$ 曲线 Γ , 设点 A 对应于参数 α , 点 M 对应于参数 t , 若弧段 $\widehat{AM}$ 的弧长为 $l(t)$, 则

$$l(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt,$$

于是

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (8.2)$$

或

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

我们称 dl 为弧长微元, 它是平面上的弧长微元 $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ 在空间的推广.

8.1.2 第一型线积分

设有质量线密度为 $\mu(x, y, z)$ 的空间曲线 Γ , 欲求曲线 Γ 的质量.

顺次用分点 $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ 将曲线 Γ 分割为 n 个小弧段 (图 8.1), 设弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δl_i , 弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的直径为 d_i , 令

$$\lambda = \max\{d_i | i=1, 2, \dots, n\},$$

称 λ 为分割的模. 在弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 则曲线 Γ 的质量

$$m(\Gamma) \approx \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

① 参阅 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册 P160.

令 $\lambda \rightarrow 0$, 取极限即得

$$m(\Gamma) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i.$$

抽去上述例子的物理背景有

定义 8.1.2 (第一型线积分) 设 $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为可求长的连续曲线, 函数 $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$. 将 Γ 任意地分割为 n 个小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δl_i , 在弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

若分割的模 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 此和式有有限极限 (此极限值与 Γ 的分割无关, 与点 M_i 的取法无关), 则称此极限值为函数 $f(x, y, z)$ 沿曲线 Γ 的第一型线积分 (或称对弧长的线积分), 记为

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i, \quad (8.3)$$

称 $f(x, y, z)$ 为被积函数, 称 Γ 为积分路线, 称 dl 为弧长微元.

据此定义, 曲线 Γ 的质量为

$$m(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mu(x, y, z) dl.$$

由定义可以看到, 第一型线积分与沿着曲线 $\widehat{AB}$ 从 A 到 B , 或从 B 到 A 的方向无关. 即有

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\widehat{BA}} f(x, y, z) dl.$$

这是第一型线积分与定积分的重要区别, 除此之外, 第一型线积分有与定积分类似的性质 (参见 3.3.3), 由读者自己复述.

下面研究第一型线积分的计算.

定理 8.1.3 假设

i) $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为连续曲线, 其参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad (8.4)$$

Γ 与 $[\alpha, \beta]$ 的点一一对应, 函数 $\varphi, \psi, \omega: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ 连续可导;

ii) 函数 $f: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ 连续,

则函数 $f(x, y, z)$ 沿曲线 Γ 的第一型线积分存在, 且有

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt, \quad (8.5)$$

证 设曲线 Γ 以弧长 l 为参数的方程为

$$x = x(l), \quad y = y(l), \quad z = z(l) \quad (0 \leq l \leq h),$$

由于函数 $F(l) \stackrel{\text{def}}{=} f(x(l), y(l), z(l))$ 在 $[0, h]$ 上连续, 故 $F(l)$ 在 $[0, h]$ 上可积. 据定义 8.1.2 即得函数 f 沿曲线 Γ 的第一型线积分存在, 且有

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \int_0^h f(x(l), y(l), z(l)) dl. \quad (8.6)$$

对此式右端的定积分作换元变换, 以参数方程 (8.4) 中的变量 t 作为新的积分变量. 由于

① 有些教科书将第一型线积分记为 $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$, 弧长微元记为 ds .

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)},$$

故

$$\int_0^h f(x(l), y(l), z(l)) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt.$$

因此(8.5)式得证. □

注 1 在应用公式(8.5)计算线积分时,此式右端定积分的下限应小于上限.

注 2 当曲线 $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ 为平面曲线时,与之对应的第一型线积分 $\int_{\Gamma} f(x, y) dl$ 及其计算公式可作为(8.5)式的特殊情况处理(取 $z = 0$).

例 1 计算 $\int_{\Gamma} (x + y) dl$, 这里 Γ 是 xy 平面上以 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$ 为顶点的三角形的边界.

解 Γ 的图形如图 8.2, 线段 $\overline{OA}$ 的方程为

$$y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

线段 $\overline{AB}$ 的方程为

$$y = 1 - x \quad (0 \leq x \leq 1),$$

线段 $\overline{OB}$ 的方程为

$$x = 0 \quad (0 \leq y \leq 1),$$

则

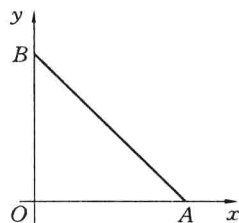


图 8.2

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{OB}} (x + y) dl \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, 这里 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = ay$ ($a > 0$).

解 取 Γ 的参数方程为

$$x = \rho(\theta) \cos \theta = a \sin \theta \cos \theta, \quad y = \rho(\theta) \sin \theta = a \sin^2 \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} a \sin \theta \cdot \sqrt{a^2 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} a^2 \sin \theta d\theta = 2a^2. \end{aligned}$$

注 在例 2 中若取 Γ 的参数方程为 $x = \frac{a}{2} \cos \theta$, $y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 也可, 但计算将复杂些.

例 3 求柱面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 界于 xy 平面与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 之间的第一卦限部分曲面 Σ 的面积.

解 曲面 Σ 如图 8.3, 设 Σ 与 xy 平面的交线为 Γ , Γ 的方程为

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

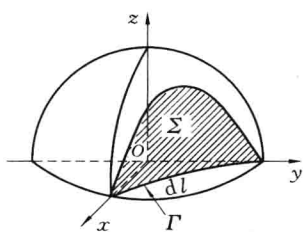


图 8.3

在 Γ 上取弧长微元 dl , dl 上方曲面 Σ 的部分面积为 zdl , 沿 Γ 无限累加得曲面 Σ 的面积为

$$S = \int_{\Gamma} z \, dl = \int_{\Gamma} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dl.$$

取 Γ 的参数方程为 $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 则

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^6 \theta - \sin^6 \theta} \cdot \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin \theta \cos \theta} \cdot 3 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sqrt{3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{3}{16} \sqrt{3} \pi. \end{aligned}$$

8.1.3 第二型线积分

在物理中还常常遇到另一类线积分问题. 例如一质点在变力 F 作用下沿着空间曲线 $\widehat{AB}$ 从 A 运动到 B , 欲求力 F 所作的功.

力 F 的数值和方向作为点的函数是已知的, 可表示为 $F = (F_x, F_y, F_z)$, 这里 F_x, F_y, F_z 分别是力 F 在三个坐标轴上的射影. 顺次用分点

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$$

将曲线 $\widehat{AB}$ 分为 n 个小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (图 8.4), 设弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δl_i , 直径为 d_i , 令

$$\lambda = \max \{d_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

称 λ 为分割的模. 在弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上任取点 M_i , 记曲线 $\widehat{AB}$ 在

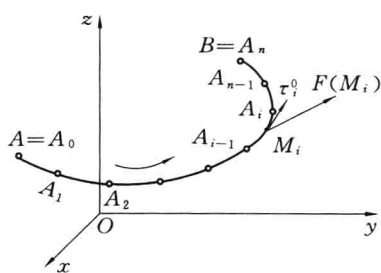


图 8.4

点 M_i 的单位切向量为 τ_i^0 (方向与 $\widehat{AB}$ 上从 A 到 B 的方向一致, 称为 $\widehat{AB}$ 顺向的切向量), 则力 F 将质点沿曲线 $\widehat{AB}$ 从 A 到 B 所作的功

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(M_i) \cdot \tau_i^0 \Delta l_i,$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 取极限即得

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(M_i) \cdot \tau_i^0 \Delta l_i.$$

抽去上述例子的物理背景, 我们有

定义 8.1.3 (第二型线积分) 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 为光滑曲线, 起点为 A , 终点为 B , Γ 顺向的单位切向量为

$$\tau^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

函数 $P, Q, R: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, 记 $F = (P, Q, R)$. 将 Γ 任意地分割为 n 个小弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ ($i = 1, \dots, n$), 设弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 的弧长为 Δl_i , λ 为分割的模, 在弧段 $\widehat{A_{i-1}A_i}$ 上任取点 M_i , 记

$$\tau_i^0 = \tau^0(M_i) = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i),$$

$$\Delta x_i = \cos \alpha_i \Delta l_i, \quad \Delta y_i = \cos \beta_i \Delta l_i, \quad \Delta z_i = \cos \gamma_i \Delta l_i,$$

作和式

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}(M_i) \cdot \boldsymbol{\tau}_i^0 \Delta l_i = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta y_i + \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta z_i,$$

若 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上式右边三个和式皆有有限极限(与 Γ 的分割无关, 与点 M_i 的选取无关), 则称此三个极限值的和为函数 P, Q, R 沿曲线 Γ 从 A 到 B 的第二型线积分(或称对坐标的线积分), 记为

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz &= \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 dl \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta y_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta z_i. \end{aligned}$$

据此定义, 变力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ 沿 Γ 从 A 到 B 所作的功为

$$W = \int_{\widehat{AB}} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

定理 8.1.4 第二型线积分有下列性质(假设其中的线积分皆存在):

$$1^\circ \quad \int_{\widehat{BA}} P dx + Q dy + R dz = - \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

$$2^\circ \quad \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AC}} P dx + Q dy + R dz + \int_{\widehat{CB}} P dx + Q dy + R dz$$

(这里点 $C \in$ 曲线 $\widehat{AB}$).

$$3^\circ \quad \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AB}} P dx + \int_{\widehat{AB}} Q dy + \int_{\widehat{AB}} R dz.$$

这些性质可由定义直接证明, 这里从略.

下面研究第二型线积分的计算.

首先由第二型线积分的定义过程不难看出, 第二型线积分总可以化为第一型线积分.

定理 8.1.5 假设

i) $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为光滑曲线, 起点为 A , 终点为 B , 顺向的单位切向量为

$$\boldsymbol{\tau}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma);$$

ii) 函数 $P, Q, R: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ 连续,

则 P, Q, R 沿 Γ 从 A 到 B 的第二型线积分存在, 且有

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl. \quad (8.7)$$

定理 8.1.6 假设

i) $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ 为光滑曲线, 起点为 A , 终点为 B , 其参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

Γ 与 $[\alpha, \beta]$ 的点一一对应. 函数 $\varphi, \psi, \omega: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ 连续可微;

ii) 函数 $P, Q, R: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ 连续,

则 P, Q, R 沿 Γ 从 A 到 B 的第二型线积分存在, 且有

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} (P\varphi' + Q\psi' + R\omega') dt, & \text{当起点 } A \text{ 对应于参数 } \alpha \text{ 时;} \\ \int_{\beta}^{\alpha} (P\varphi' + Q\psi' + R\omega') dt, & \text{当起点 } A \text{ 对应于参数 } \beta \text{ 时,} \end{cases} \quad (8.8)$$

这里右端函数 P, Q, R 中的 x, y, z 用其 t 的表示式代入.