

3

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题集题解

第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

3

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

● 山东科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 3/费定晖, 周学圣编演. —4 版. —济南: 山东科学技术出版社, 2012
ISBN 978-7-5331-5898-9

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校—题解 IV. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120115 号

**Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解 3**

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号
邮编: 250002 电话: (0531) 82098088
网址: www.lkj.com.cn
电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号
邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂

地址: 潍坊市潍州路753号
邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

开本: 787 mm × 1092mm 1/16

印张: 15

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5898-9

定价: 20.00 元

第四版前言

DISIBANQIANYAN

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好是不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的話,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思考的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南

目录 MULU

第三章 不定积分	1
§ 1. 最简单的不定积分	1
§ 2. 有理函数的积分法	36
§ 3. 无理函数的积分法	57
§ 4. 三角函数的积分法	77
§ 5. 各种超越函数的积分法	96
§ 6. 求函数积分的各种例子	107
第四章 定积分.....	121
§ 1. 定积分是积分和的极限	121
§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法	132
§ 3. 中值定理	157
§ 4. 广义积分	162
§ 5. 面积的计算法	186
§ 6. 弧长的计算法	194
§ 7. 体积的计算法	200
§ 8. 旋转曲面表面积的算法	208
§ 9. 矩的计算法, 质心的坐标	212
§ 10. 力学和物理学中的问题	216
§ 11. 定积分的近似算法	220

第三章 不定积分

§ 1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义且连续, $F(x)$ 是它的原函数, 即当 $a < x < b$ 时 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad a < x < b,$$

式中 C 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质:

$$(1) d\left[\int f(x) dx\right] = f(x) dx;$$

$$(2) \int d\Phi(x) = \Phi(x) + C;$$

$$(3) \int A f(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A \text{ 为常数}, A \neq 0);$$

$$(4) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

3° 最简积分表:

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctan x + C, \\ -\operatorname{arccot} x + C; \end{cases}$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$$

$$\text{VI. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C;$$

$$\text{VII. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\text{VIII. } \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\text{IX. } \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$$

$$\text{XI. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\text{XIII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + C;$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

4° 积分的基本方法

$$(1) \text{ 引入新变量法 若 } \int f(x) dx = F(x) + C,$$

则 $\int f(u) du = F(u) + C$, 式中 $u = \varphi(x)$ 是连续可微函数.

$$(2) \text{ 分项积分法 若 } f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\text{则 } \int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$(3) \text{ 代入法 若 } f(x) \text{ 连续, 令 } x = \varphi(t), \text{ 式中 } \varphi(t) \text{ 及其导数 } \varphi'(t) \text{ 皆连续,}$$

$$\text{则得 } \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

$$(4) \text{ 分部积分法 若 } u \text{ 和 } v \text{ 为 } x \text{ 的可微函数, 则 } \int u dv = uv - \int v du.$$

利用最简积分表,求下列积分*:

【1628】 $\int (3-x^2)^3 dx.$

解 $\int (3-x^2)^3 dx = \int (27-27x^2+9x^4-x^6) dx = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.$

【1629】 $\int x^2(5-x)^4 dx.$

解 $\int x^2(5-x)^4 dx = \int (625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6) dx = \frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.$

【1630】 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx.$

解 $\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx = \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx = x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$

【1631】 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

解 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right) dx = -\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C.$

【1632】 $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx.$

解 $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx = a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C.$

【1633】 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$

解 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$

【1634】 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}}) dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{12}{17}}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

【1635】 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

解 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx = \int (x^{-\frac{4}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}) dx = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)+C.$

【1636】 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} dx.$

提示 注意 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}.$

1634 题, 1635 题, 1637 题及 1638 题均可仿本题, 将被积函数化成若干个幂函数的代数和, 然后再利用分项积分法.

解 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}) dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

【1637】 $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$

* 本章在叙述习题及其解答过程中, 凡出现的函数, 无论是被积函数还是原函数, 均默认是在有意义的定义域上进行的. 例如, 最简积分表 I 中当 $n \leq -2$ 时, 要求 $x \neq 0$; IV 中要求 $|x| \neq 1$; V 中要求 $|x| < 1$; 以及 VI 中, 当取负号时要求 $|x| > 1$, 等等, 就未加声明. 在题解中也有相当多的类似情况. 因此, 如无特别声明, 在一般情况下, 这些定义域是很容易被读者确定的, 此处就不再予以一一指明.

$$\text{解} \quad \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx = \int (2 - 2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}) dx = 2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2} + C.$$

$$\text{【1638】} \quad \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

$$\text{【1639】} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x - \arctan x + C.$$

$$\text{【1640】} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$\text{【1641】} \quad \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1} \right) dx = x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$\text{【1642】} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$\text{【1643】} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C.$$

$$\text{【1644】} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx.$$

$$\text{解} \quad \int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

$$\text{【1645】} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \left[2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx = -\frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5} \right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + C.$$

$$\text{【1646】} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C.$$

$$\text{【1647】} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$\text{【1648】} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

提示 注意 $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)](\cos x - \sin x)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)](\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

【1649】 $\int \cot^2 x dx$.

提示 注意 $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

解 $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$.

【1650】 $\int \tan^2 x dx$.

解 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$.

【1651】 $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx$.

解 $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + C$.

【1652】 $\int \operatorname{th}^2 x dx$.

提示 注意 $\operatorname{th}^2 x = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

解 $\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{th} x + C$.

【1653】 $\int \operatorname{coth}^2 x dx$.

提示 注意 $\operatorname{coth}^2 x = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

解 $\int \operatorname{coth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) dx = x - \operatorname{coth} x + C$.

【1654】 证明:若 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 则 $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ($a \neq 0$).

提示 由不定积分的定义,命题即获证.

证 由 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$. 因而有 $F'(ax+b) = f(ax+b)$, 且

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = F'(ax+b),$$

于是,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax+b) \right] = f(ax+b),$$

所以,

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

求下列积分:

【1655】 $\int \frac{dx}{x+a}$.

解 $\int \frac{dx}{x+a} = \ln |x+a| + C$.

【1656】 $\int (2x-3)^{10} dx$.

解 $\int (2x-3)^{10} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} (2x-3)^{11} + C = \frac{1}{22} (2x-3)^{11} + C$.

【1657】 $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$.

解 $\int \sqrt[3]{1-3x} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{4} (1-3x)^{\frac{4}{3}} + C$.

【1658】 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{1}{5} \cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5} \sqrt{2-5x} + C.$$

$$\text{【1659】} \quad \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

$$\text{【1660】}^+ \quad \int \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sqrt{1-2x+x^2}}{1-x} dx = \int (1-x)^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{5}{2} \sqrt{1-x}^2 + C.$$

$$\text{【1661】} \quad \int \frac{dx}{2+3x^2}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

$$\text{【1662】} \quad \int \frac{dx}{2-3x^2}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right| + C.$$

$$\text{【1663】} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

$$\text{【1664】} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left| x\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1} \right| + C_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1665】} \quad \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -\left(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right) + C.$$

$$\text{【1666】} \quad \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5\alpha + C.$$

$$\text{【1667】} \quad \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明.中译本基本是按俄文第二版翻译的.俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

【1668】 $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

解 $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} + C.$

【1669】 $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

解 $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\cot \frac{x}{2} + C.$

【1670】 $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

提示 注意 $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}$, 并利用 1668 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{dx}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = -\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + C.$

【1671】 $\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx.$

解 $\int [\operatorname{sh}(2x+1) + \operatorname{ch}(2x-1)] dx = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1) + \operatorname{sh}(2x-1)] + C.$

【1672】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2 \operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$

【1673】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = -2 \operatorname{coth} \frac{x}{2} + C.$

用适当地变换被积函数的方法求下列积分:

【1674】 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$

【1675】 $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$

提示 注意 $x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3).$

解 $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3) = \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C.$

【1676】 $\int \frac{x dx}{3-2x^2}.$

解 $\int \frac{x dx}{3-2x^2} = -\frac{1}{4} \int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} = -\frac{1}{4} \ln |3-2x^2| + C.$

【1677】 $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}.$

解 $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$

【1678】 $\int \frac{x dx}{4+x^4}.$

提示 注意 $\frac{x dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2}.$

解 $\int \frac{x dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2} + C.$

【1679】 $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}} \right| + C.$

【1680】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$

提示 注意 $\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \cdot \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}.$

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$

【1681】 $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$

解 $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$

【1682】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}} = \frac{dx}{x |x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x |x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$
 $= -\ln \left| \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C.$

【1683】 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$

提示 仿 1682 题的解法.

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x |x| \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.$

【1684】 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^3 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x d\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^3 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

【1685】 $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$

解 $\int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-1) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.$

【1686】 $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$

解 $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{24} \int (8x^3+27)^{-\frac{2}{3}} d(8x^3+27) = \frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3+27} + C.$

【1687】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$

提示 分别就 $x > 0$ 及 $x < -1$ 时求解,然后将这两个结果合并,其结果为

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C.$$

解 由 $x(1+x) > 0$ 知: $x > 0$ 或 $x < -1$. 当 $x > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C;$$

当 $x < -1$ 时, $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = - \int \frac{d(-(1+x))}{\sqrt{(-x)(-(1+x))}} = -2 \int \frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$
 $= -2 \ln(\sqrt{-x} + \sqrt{-(1+x)}) + C.$

总之,得 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = 2 \operatorname{sgn} x \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C.$

【1688】 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

解 由 $x(1-x) > 0$ 知: $0 < x < 1$. 于是,得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

【1689】 $\int x e^{-x^2} dx.$

解 $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

【1690】 $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}.$

解 $\int \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x) + C.$

【1691】 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \arctan(e^x) + C.$

【1692】 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

提示 注意 $\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}.$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C.$$

$$\text{【1693】} \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

$$\text{【1694】} \quad \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C.$$

$$\text{【1695】} \quad \int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

$$\text{【1696】} \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = - \int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x) = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$$

$$\text{【1697】} \quad \int \tan x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

$$\text{【1698】} \quad \int \cot x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

$$\text{【1699】} \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx &= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1700】}^+ \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx.$$

提示 分别就 $|a| = |b| \neq 0$ 及 $|a| \neq |b|$ 两种情况求解.

解 当 $|a| = |b| \neq 0$ 时,

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx = \frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C;$$

当 $|a| \neq |b|$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2}} = \frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2} + C \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{【1701】} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}} = - \int (\cot x)^{-\frac{1}{4}} d(\cot x) = -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cot^3 x} + C.$$

$$\text{【1702】} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}.$$

提示 注意 $\frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{\tan^2 x + 2} = \frac{d(\tan x)}{(\sqrt{2})^2 + (\tan x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2} dx = \int \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

【1703】 $\int \frac{dx}{\sin x}$.

提示 注意 $\frac{dx}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{\tan \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$.

【1704】 $\int \frac{dx}{\cos x}$.

提示 注意 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 并利用 1703 题的结果.

解 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$.

【1705】 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C$.

【1706】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = 2 \arctan(e^x) + C$.

【1707】 $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx$.

提示 注意 $\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch}^2 2x)$.

解 因为 $\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 - 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch}^2 2x - \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 2x = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 2x}{2}$,

所以,
$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx &= \int \frac{\frac{1}{4} d(\operatorname{ch} 2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\operatorname{ch} 2x + \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2 2x}) + C_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}\right) + C. \end{aligned}$$

【1708】 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int (\operatorname{th} x)^{-\frac{2}{3}} d(\operatorname{th} x) = 3 \sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C$.