顾宁先　王福庆　等编

高中数学复习应试的误区与捷径

陕西师范大学出版社

高中数学复习应试的误区与捷径

编著者　顾宁先　王福庆
张佩云　顾德微

陕西师范大学出版社

高中数学复习应试的误区与捷径

编著者　顾宁先　王福庆
张佩云　顾德微

·

陕西师范大学出版社出版
（西安市陕西师大120信箱）
陕西省新华书店经销　　陕西省印刷厂印刷

·

开本787×1092　1/32　印张8.25　字数175千
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷
印数：1—20000

ISBN 7-5613-0168-5
G·166　定价：2.60元

编写说明

高中数学内容庞杂，分科较多，习题浩如烟海，千姿百态。如何复习以应付考试，这是大家所关心的一个重要问题。本书旨在指导学生进行全面的复习以及如何应付考试中可能出现的各种不同的情况。

本书首先阐述解题的基本知识和解题的基本步骤。其次是介绍怎样寻求解题途径。然后，介绍了各种解题方法。例如《综合法》、《分析法》、《待定系数法》、《反证法》，《变更问题法》、《补形法》、《解析法》……《一题多解》，《一题多用》《多题一法》……《几何题的三角解法》、《三角题的代数解法》等等方法二十余种。最后，根据中学数学教学大纲要求，突出重点的介绍各学科的解题的基本规律，着重于如何掌握双基、进行复习，开通解题思路，掌握解题技巧，防止失误和常见病等等。并根据各学科之间的横向联系，举出例题，指出如何应用。并在每个章节后都适当安排了自我测试题，供练习使用。

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 绪 论

参加高考，就是要能把高考试卷中各种类型的习题很好的解答出来，如何才能在高考中得到最佳程度地发挥而取得好成绩，这是每个考生所关心的问题.

高考通过试卷对考生的数学知识进行检查，主要是通过解答习题这一最基本、最重要的形式进行的，因此从某种意义上来讲，能否很好的掌握解题本领，完整明确的写出解题过程，就会决定高考的成绩. 既然解题是如此的重要，那么怎样来解题呢？

要很清楚明确的回答这一问题是不大容易的，因为不存在一个固定的简单方法，可以包罗整个高中数学各学科的解题方法. 因此我们只有对解题的目的、方式、方法有所了解以后，再通过多做练习，不断总结经验和教训，熟悉解题方法，然后才能逐步提高自己的解题能力.

数学中的基础知识（包括定义、定理、公式、法则等），都是进行推理的论据，一般拿到一个命题后，都是结合审题，从已知条件联想到有关基础知识. 例如已知一元二次方程就可联想起根的韦达定理与判别式；已知等差或等比数列，即可联想起等差中项与等比中项，通项公式，求和公式等等；一看到三角题目的求值和证明就联想到可能要用诱导公式，和差、倍、半角公式，或更多的需用“和差化积，积化和差”公式等等.

数学题目形态各异，完全相同是没有的，但是如果你能仔细观察，明确审题的话，必然可以发现一些蛛丝蚂迹，它会和我们以前做过的某道(或某类)习题在性质方面比较接近，在形状方面也比较相似，因而也可以联想起解题方法是否也可

类似的呢？莫斯科大学教授雅诺芙斯卡娅就说过"解题就是把题目归结为已经解过的习题。" 实质上，陌生的习题是建立在熟悉习题的基础上，复杂习题是建立在简单习题的基础上的。

另外就人们认识客观世界的方法来说，总是先从个别特殊的事物出发，经过分析归纳，从而得到一般性的结论，并加以验证，然后用所得的一般性理论，来指导我们具体问题的分析。因而对于有些数学命题，抽象程度较高，而一时难以找到适当解题思路时，不妨先考察一下它的特殊情况，使我们的思路从特殊情形的解答中探求出一般规律性的结论，然后从中得到启示找到一般情况的解题方法。

至于一些具体的解题技巧，诸如化整为零，各个击破，逆推分析，引伸条件等，在以后的章节中将要讲到，这里就不一一列举了。

总之，解数学题，就其本质而论，就是寻求命题条件和结论之间的逻辑关系，整个解题的思维过程就是如何建立正确的中间命题的过程，这一过程应该是有目的，有方向性的思考过程。而我们有些同学拿到题目后，马上就解，做了一二步，不行，又换一种方法。东撞撞，西碰碰，偶而也会给他碰巧做出，但是更多的情况是束手无策，于是宣告做不出，显然，这种做法是不可取的。

解题的过程是要建立一系列正确的中间命题，那就应该从命题的已知条件与结论两方面进行考虑，首先应该确定方向，其次考虑使用何种方法，通过什么样的步骤来达到解题的目的，正如你出门到某地去，首先应该确立是往东还是往西，是步行还是乘车一样。

面对浩如烟海，千变万化的习题，我们就应该精心确定自己解题的主导思想，避免陷入误区，寻求解题佳径。并沿着最佳解题思路锲而不舍的进行下去，这样，才能达到事半功倍的目的。

第二章　怎样寻求解题途径

中学数学习题浩如烟海，姿态各别，无论是从内容或是从形式来讲，都是广泛多样，而且解题途径也是因题而异，方法步骤各有差异。但是，不论什么类型的习题，都是有其共同之处，即必须遵循一定的思维顺序，并按一定的解题步骤去完成题解，也就是如何寻求命题的条件与结论之间的逻辑联系，如何建立一系列正确的中间命题的过程，讲得简单一些，亦即如何从已知条件推得可知，由可知再推得另一个可知…，直至能推到结论的成立，如果不能直接推得，则可从结论逆推，即如要结论成立，则需知…，从这一个需知再推到另一个需知…，如果有某一个需知能从已知推得的可知相符，则此题亦可解得。不管是顺推已知还是逆推结论，正确的概念（定义、定理、公式、法则等）是必须的，如果某个基础知识出了问题，这个推导过程就会出现错误，就会导致谬证。

解题的途径一般可有下述四个环节。

一、审清题意，看准方向。

二、确定思路，选择方法。

三、正确推理，细致运算。

四、讨论检验，总结拓宽。

这四个环节是环环扣紧，一环影响一环的。

一、审清题意，看准方向

本环节是解题中最重要的环节，一切思路、方法、技巧均来源于详细审题。如果在这个环节稍微多加考虑，则将会给解题省下很多时间。

由于解题是一个推理的过程，而题给条件是这个过程的基础，所以对这一步不能轻易、马虎，有些同学拿到题目就做，搞了半天没做出来，回过头来，再看题意，原来少看了一个条件或者对条件的作用没理解清楚。

正确的方法应该是要看清题目所给的每一个条件，求解（或求证）的结论是什么，而且凡是与这些条件和结论有关的概念、公式、定理、法则和常用方法等等，都要尽可能地广泛的进行联想，有些题目的条件，在问题的叙述中没有明显列出，即经常所称的隐蔽条件。这些条件容易被人忽视，而我们在审题中也应注意把它发现。例如已知三角形ABC，……，在审题中我们就应注意到它的隐蔽条件，就角而论，$A+B+C=180°$，就边而论，“三角形两边之和大于第三边”，“三角形两边之差小于第三边”，因此，只有充分认识了命题的真实内容，才能在进行联想时，对解题的思路有一个大致的模糊方向。

例1 解方程：$|x-3|+\sqrt{2-x}=3$

〔分析〕在审题中，应看出隐蔽条件$2-x\geqslant0$ 即$x\leqslant2$。

则可得 $|x-3|=3-x$。于是原方程即可化为

$3-x+\sqrt{2-x}=3$，即$\sqrt{2-x}=x$。

两边平方整理得 $x^2+x-2=0$，$x_1=1$，

$x_2=-2$(舍)

本题如不注意这个隐蔽条件，贸然采用两边平方的做法，则既繁琐，且不易解出。

例2 $P(a,b)$在二次曲线$4x^2+9y^2-4x-6y+2=0$上，求$a+a^2b+a^3b^2++a^4b^3+\cdots$的值。

〔分析〕要求无穷数列的和，必须将a，b确定下来，想法通过方程$4x^2+9y^2-4x-6y+2=0$，求出二个未知数，从数学的概念出发，发掘隐蔽条件。利用非负数的性质，把上述方程配方写成$(2x-1)^2+(3y-1)^2=0$，可知这是椭圆方程的特例，此点的坐标为$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3})$，而$P(a,b)$在这曲线上，

$\therefore a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$，$ab=\frac{1}{6}$，而无穷数列a，a^2b，a^3b^2，…是首项为$\frac{1}{2}$，公比$q=ab=\frac{1}{6}<1$的无穷等比数列。

$$\therefore S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{3}{5}$$

例3 求圆锥曲线$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$与$\theta=\frac{\pi}{4}$的交点

〔分析〕粗心的同学常这样解，把$\theta=\frac{\pi}{4}$代入

$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$得$\rho=\frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2(2+\sqrt{2})$ ∴它的答案是：

交点P的坐标是$(4+2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4})$。然而如能联系图形想一下，

$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$表示一条抛物线，而$\theta=\frac{\pi}{4}$表示过极点（即抛物

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

线的焦点）的一条直线，二者应有二个交点，显然上述的解法所产生的遗漏，在于审题不仔细，如能在审题时，强调

$$\left\{(\rho,\theta)\middle|\theta=\frac{\pi}{4},\ -\infty<\rho<+\infty\right\} = \left\{(\rho,\theta)\middle|\theta=\frac{\pi}{4},\rho\geqslant 0\right\} U$$

$\left\{(\rho,\theta)\middle|\theta=\frac{5\pi}{4},\ \rho\geqslant 0\right\}$，那么在解答时就会写成

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}\end{cases} \text{或} \begin{cases}\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}\\ \theta=\dfrac{5\pi}{4}\end{cases}$$ 从而解答二交点坐标

为$\left(4+2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$与$\left(4-4\sqrt{2},\ \frac{5\pi}{4}\right)$

二、确定思路，选择方法

本环节是整个解题的中心环节，细心审题就是为本节服务的，在审题的基础上，首先要深刻理解已知条件，要注意挖掘那些隐蔽条件，并充分利用所有已知条件。这一综合思维的过程可以通俗地表示为：由已知推可知，再推可知，寻求正确的中间命题……或由未知（即结论）找需知，再找需知……，寻求结论与已知之间的联系，寻求需知即是可知，如能寻到则解题就可能了，这种寻求解题途径的基本方法是分析法和综合法。综合法是从命题出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证的结论，而分析法是从待证（解）的命题的结论出发，一步一步地逆推求需知，最后达到命题的已知条件，这两种方法各有其优缺点，综合法由因导果，往往枝

节横生，不易奏效。分析法由果索因，常常根底渐近有希望成功.但就解题过程而论，综合法形式简结，条理清晰；分析法叙述繁琐，文辞冗长，亦即分析法利于思考，综合法宜于表述。因此在实际解题时，我们经常把两种方法结合起来运用。

在选择解题方法时应学会联想和类比。所谓类比就是将学生所熟悉的习题和新问题进行分析对比，寻找其内在联系，从而用解决熟悉问题的方法去解决所要研究的新问题。实质上这也是一种联想，更多的联想是联想定理、定义、公理和法则，联想常用的解题方法与技巧，（例如命题与自然数有关，不妨联想数学归纳法；命题在直接证明时有困难，就不妨联想用反证法…），或者根据命题的条件与结论的因果关系，数学概念的从属关系，以及初等数学的各分支之间在内容上和方法上的相互渗透，密切的内在联系等等进行关系联想，从而寻求解题途径，确定思路，选择方法。

例1　已知：$c^2-6c+9+\sqrt{6^k-c}=0$（k、$c\in R$）

求：$\log_6 12$的值。

〔分析〕$\log_6 12=\log_6\frac{36}{3}=2-\log_6 3$

求出$\log_6 3$是关键，这从已知条件可得。

〔解〕由已知条件$\Rightarrow(c-3)^2+\sqrt{6^k-c}=0$。

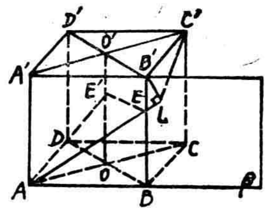
$$\Rightarrow\begin{cases}c=3\\6^k=c\end{cases}\Rightarrow\log_6 3=k。$$

$$\therefore\log_6 12=\log_6\frac{36}{3}=2-\log_6 3=2-k。$$

例2 已知：（如图2—1）正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为$4cm$，E为BB'上的一点，且$B'E=1cm$。

求：(1)C'到AE的距离。

(2)AE与平面AC'的夹角。



（图 2—1）

〔分析〕在立体几何中求点到直线的距离基本上离不开三垂线定理，先应把此线作出。在原有图形中要作出 C'到AE的距离是不可能的，因此就必须利用平面是可以无限扩展的，把平面$ABB'A'$扩大。同样求直线与平面夹角也应运用三垂线定理，求出直线与射影的夹角，故解本题的关键是利用三垂线定理。

〔解〕扩大平面$ABB'A'$为平面β。过B'在平面β内作$B'L\perp AE$交AE的延长线于L，连$C'L$，$\because C'B'\perp$平面β，根据三垂线定理得$C'L\perp AE$，则$C'L$为C'到AE的距离。

$\because \triangle B'EL\backsim\triangle AEB$，$\therefore \dfrac{B'E}{AE}=\dfrac{B'L}{AB}$，

$\dfrac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{B'L}{4}$ $\therefore B'L=\dfrac{4}{5}$。

$\therefore C'L=\sqrt{4^2+(\dfrac{4}{5})^2}=\dfrac{4}{5}\sqrt{26}$。$\therefore C'$到$AE$的距离为$\dfrac{4}{5}\sqrt{26}cm$。

对角面AC'与BD'交于OO'，$\because$平面$AC'\perp$平面BD'，

在平面BD'中作$EE'\perp OO'$，$\therefore EE'\perp$平面AC'；连AE'，

$\therefore \angle EAE'$为AE与平面AC'的夹角，

$$\because\ EE' = B'O' = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 4 = 2\sqrt{2}.$$

$$\sin\angle EAE' = \frac{EE'}{AE} = \frac{2\sqrt{2}}{5},$$

$$\therefore \angle EAE' = \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

例3 设α、β、γ都是锐角，且满足$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ 求证：$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$.

〔分析〕本题为三角内容的综合题，应分成$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$和$\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$两部分来证。而对于已知条件$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$和$\alpha$、$\beta$、$\gamma$都是锐角，则应想办法导出$\alpha$与$\beta+\gamma$的关系，要证$\alpha+\beta+\gamma$的范围，则可利用不等式中的方法，找出$\alpha+\beta$、$\beta+\gamma$、$\alpha+\gamma$的范围，再三式相加即得，否则要直接证$\alpha+\beta+\gamma$的范围是不容易的。

〔证明〕$\because \sin^2\alpha=1-\sin^2\beta-\sin^2\gamma$

$$=1-\frac{1-\cos 2\beta}{2}-\frac{1-\cos 2\gamma}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2\beta+\cos 2\gamma)=\cos(\beta+\gamma)\cdot\cos(\beta-\gamma)>0$$

$\because \beta$、γ均为锐角，$-\frac{\pi}{2}<\beta-\gamma<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \cos(\beta-\gamma)>0$

$\therefore \cos(\beta+\gamma)>0$，从而$0<\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$。

同理可证　$0<\alpha+\gamma<\frac{\pi}{2}$，$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$。

$\therefore \alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$

又$\because \cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)=2\sin\beta\sin\gamma>0$

$\therefore \cos(\beta-\gamma)>\cos(\beta+\gamma)$

$\therefore \sin^2\alpha=\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)>\cos^2(\beta+\gamma)$

$\therefore \sin\alpha>\cos(\beta+\gamma)$，即$\sin\alpha>\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)\right)$

$\because 0<\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)<\frac{\pi}{2}$，又$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

而在$(0,\ \frac{\pi}{2})$内正弦函数是增函数　$\therefore \alpha>\frac{\pi}{2}-(\beta+\gamma)$

即　$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$。

$\therefore$　$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3\pi}{4}$。

例4　实数a、b、c满足$a>b>c$及$a+b+c=0$，并存在曲线c：$y=ax^2+2bx+c$　(1)试证：曲线c与x轴相交于相异的二点。(2)曲线c被x轴所截成的线段长为l时，试证：$\sqrt{3}<l<2\sqrt{3}$。

〔分析〕要证结论(1)，显然可以应用一元二次方程中的判别式$\Delta>0$来解，要证(2)中l的长度，可用$l^2=(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$($\alpha$、$\beta$为曲线$c$与$x$轴的两交点的横坐标)，这样就可以利用韦达定理了。

〔证明〕(1)$\because a>b>c$，若$a\leqslant 0$，则$b<0$，$c<0$，则可

得$a+b+c<0$，这与已知$a+b+c=0$矛盾，∴必有$a>0$。若$c\geqslant 0$，则$d>0$，$b>0$，此时$a+b+c>0$，这也与$a+b+c=0$相矛盾，所以$c<0$，∴$ac<0$。从而得到$y=ax^2+2bx+c$的判别式$\triangle=4b^2-4ac$必大于0，所以曲线c与x轴相交于相异的两点。

(2)设曲线c与x轴相异的两个交点的横坐标为α、β，则$l=|\alpha-\beta|$，由韦达定理可知$\alpha+\beta=-\frac{2b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$，

$\therefore l^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-\frac{2b}{a})^2-4\cdot\frac{c}{a}$

$=4\cdot\frac{b^2-ac}{a^2}$

$\because a+b+c=0$，$\therefore b=-(a+c)$，

$\therefore l^2=4\cdot\frac{(a+c)^2-ac}{a^2}=4\cdot\frac{a^2+ac+c^2}{a^2}=4(1+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2})$

设$\frac{c}{a}=t$，则$f(t)=l^2=4(1+t+t^2)=4(t+\frac{1}{2})^2+3$

$\because a>b>c$，$a>0$，可知$1>\frac{b}{a}>\frac{c}{a}$，$\because a+b+c=0$，

有$\frac{b}{a}=-1-\frac{c}{a}$，则$1>-1-\frac{c}{a}>\frac{c}{a}$，$1>-1-t>t$，

由$1>-1-t$，得$t>-2$，由$-1-t>t$，得$t<-\frac{1}{2}$，

$\therefore -2<t<-\frac{1}{2}$，

又$f(-\frac{1}{2})=3$，$f(-2)=12$，$3<f(t)<12$，

$\therefore \sqrt{3}<l<2\sqrt{3}$。

例5 （如图2—2）设圆C的方程为$(x-5)^2+(y-5)^2$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com