Advanced Mathematics（I）

北京邮电大学高等数学双语教学组◎编

高等数学（上）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等数学(上)

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 提 要

本书是根据国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求编写的教材，全书分为上、下两册，此为上册，主要包括函数与极限、一元函数微积分及其应用和无穷级数三部分. 本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用. 本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/ 北京邮电大学高等数学双语教学组编 . --北京:北京邮电大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5635-3132-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①北… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 156543 号

书　　名：高等数学(上)
作　　者：北京邮电大学高等数学双语教学组
责任编辑：赵玉山　张国申
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京联兴华印刷厂
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：20.75
字　　数：452 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3132-5　　定　价：42.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　　言

关于高等数学

高等数学(微积分)是一门研究运动和变化的数学,产生于16世纪至17世纪,受当时科学家们在研究力学问题时对相关数学的需要而逐渐发展起来的.高等数学中微分处理的目的是求已知函数的变化率的问题,例如,曲线的斜率,运动物体的速度和加速度等;而积分处理的目的则是在当函数的变化率已知时,如何求原函数的问题,例如,通过物体当前的位置和作用在该物体上的力来预测该物体的未来位置,计算不规则平面区域的面积,计算曲线的长度等.现在,高等数学已经成为高等院校学生尤其是工科学生最重要的数学基础课程之一,学生在这门课程上学习情况的好坏对其后续课程能否顺利学习有着至关重要的影响.

关于本书

本书是我们编写的英文"高等数学"的中译本,以便于接受双语数学的学生能够对照英文教材进行预习、复习或自习.本书的所有作者都在我校主讲了多年的双语"高等数学"课程,获得了丰富的教学经验,了解学生在学习双语"高等数学"课程中所面临的问题与困难.本书函数、空间解析几何及微分部分由张文博、王学丽和朱萍三位副教授编写,级数、微分方程及积分部分则由艾文宝教授和袁健华副教授编写,全书由孙洪祥教授审阅校对.此外,本书在内容编排和讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点.由于作者水平有限,加上时间匆忙,书中出现一些错误在所难免,欢迎感谢读者通过邮箱(jianhuayuan@bupt.edu.cn)指出错误,以便我们及时纠正.

致谢

本书在编写过程中得到北京邮电大学、北京邮电大学理学院和国际学院的教改项目资金支持,作者在此表示衷心感谢.同时也借此机会,感谢所有在本书写作过程中支持和帮助过我们的同事和朋友.

致学生的话

高等数学的学习没有捷径可走,它需要你们付出艰苦的努力.只要你能勤奋学习并持之以恒,定能取得成功.希望你们能喜欢这本书,并预祝你取得成功!

目　　录

第 0 章

预备知识

概述

本章中我们将介绍一些在后续章节中广泛使用的重要概念.

与直角坐标系一样,极坐标系在表示平面上的点、描述函数等问题时,也发挥了重要的作用.

0.1 极坐标系

数学上看,**极坐标系**实际上就是一个二维坐标系统.在该系统下,平面上的每一个点都可以用一个角度和一个距离来刻画.通常,当两个点之间的关系能够较为容易地用角度和距离表示时,可以使用极坐标系;而此时,若使用直角坐标系,它们之间的关系则只能借助三角公式的帮助来刻画了.

由于极坐标系是一个二维坐标系统,平面上的每一个点都可以使用两个极坐标来表示:极径和夹角坐标(如图 0.1.1 所示).

极径(通常记作 r 或 ρ)表示从所谓**极点**的中心点(等同于直角坐标系中的原点)到该点的距离.夹角坐标(通常称为**极角**或**方位角**,且通常记为 θ 或 t)表示从 0°的射线或**极轴**(通常使用直角坐标平面中的 x 轴)按照**正方向**或**逆时针**旋转到极径所在位置的角度.

0.1.1 绘制极坐标中的点

极坐标系中的每一个点都可以表示为两个极坐标,通常记为 r(或 ρ,称为**极径**)以及 θ **极角**(或**辐角**,有时也记为 φ 或 t).r 坐标表示到极点的距离,而 θ 坐标表示从 0°射线(或极轴)按照逆时针方向得到的角度.极径通常采用直角坐标平面内的 x 轴[1](见图 0.1.2).

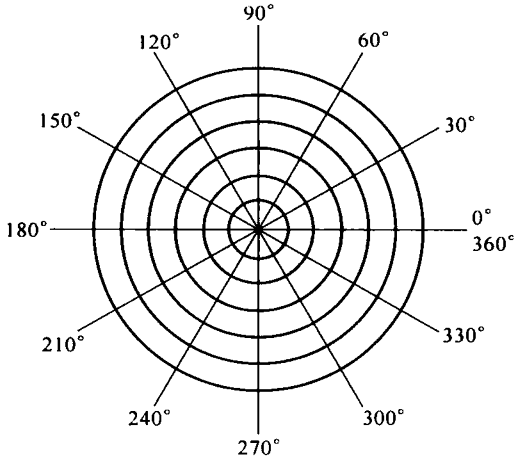

图 0.1.1

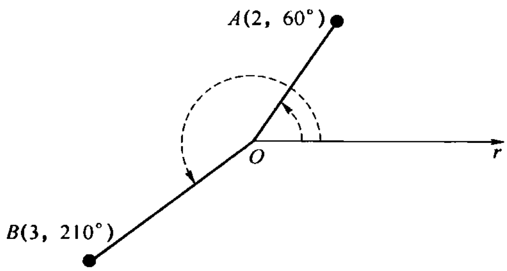

图 0.1.2

0.1.2 极坐标与直角坐标之间的转换

两个极坐标 r 和 θ 可以通过正弦和余弦三角函数转化为直角坐标 x 和 y：

$$x=r\cos\theta,$$

$$y=r\sin\theta.$$

两个直角坐标 x 和 y 也可以利用 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 转换为极坐标 r(该结论是利用勾股定理).

为确定极角坐标 θ,需要考虑如下的结论：

- 当 $r=0$,时 θ 可以取任何实值；
- 当 $r\neq0$,为得到 θ 的唯一表示,必须将辐角的范围限定在长度为 2π 的区间内.通常选取区间 $[0,2\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$.

为求得在区间 $[0,2\pi)$ 内的 θ,可以使用如下的规则(arctan 表示反正切函数)：

$$\theta=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x>0 \text{ 且 } y\geqslant 0,\\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+2\pi, & x>0 \text{ 且 } y<0,\\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)+\pi, & x<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0 \text{ 且 } y>0,\\ \dfrac{3\pi}{2}, & x=0 \text{ 且 } y<0.\end{cases}$$

读者也可以求得区间$(-\pi,\pi]$内的 θ 的计算公式.

例 0.1.1 （中心在(0,0)且半径为 a 的圆）. 在直角坐标系内，一个中心在(0,0)，半径为 $a>0$ 的圆为满足如下方程的点集

$$\sqrt{x^2+y^2}=a \text{ 或 } x^2+y^2=a^2 \quad (a>0).$$

在使用极坐标时，该表述可以非常简洁. 事实上，由于圆为距离点(0,0)有相同距离的点的集合，若我们取直角坐标系的原点作为极坐标系的极点，则圆可以表示为

$$r(\theta)=a(a>0).$$

一般地，圆心在(r_0,θ_0)且半径为 $a>0$ 的圆可以表示为

$$r^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2=a^2.$$

例 0.1.2 （直线）. **径向线**（穿过极点的直线）可用如下的方程表示

$$\theta=\theta_0,$$

其中 θ_0 直线升高的角度，也即 $\theta_0=\arctan m$，其中 m 为直线在直角坐标系中的斜率. 非径向直线，若它在点(r_0,θ_0)和径向直线 $\theta=\theta_0$ 正交，则其方程为

$$r(\theta)=r_0\sec(\theta-\theta_0).$$

例 0.1.3 （极坐标玫瑰线）. 极坐标玫瑰线为一个著名的数学曲线，它看起来像是一朵有花瓣的花，同时它的方程在极坐标系下的表示也非常简单.

$$r(\theta)=a\cos(k\theta+\theta_0)$$

其中 θ_0 为给定常熟（包括 0）. 若 k 为一个奇数，这些方程得到一个有 k 个花瓣的玫瑰，若 k 为偶数，则得到 $2k$ 片花瓣的玫瑰. 若 k 为有理数，但不是整数，则会得到一朵花瓣相互重叠的玫瑰. 需要注意的是，这些方程无法得到花瓣数量为 2,6,10,14 等的玫瑰. 变量 a 表示玫瑰花瓣的长度（见图 0.1.3）.

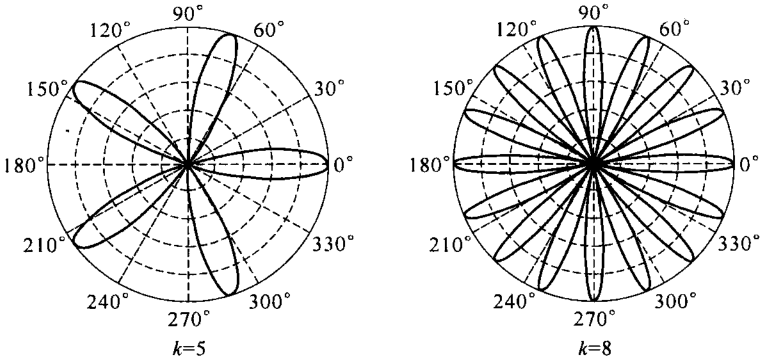

图 0.1.3

▶阅读材料:极坐标系的历史

在公元前 1 千年前,角度和半径的概念就已经被古人所使用了①. 天文学家 Hipparchus (190-120 BCE)建立了一个弦函数的表格,在其中给出了每一个角度对应的弦长,并且有文献显示他使用了极坐标系来标识恒星的位置. 在对螺线的研究中,阿基米德使用了一个半径依赖于夹角的函数来刻画阿基米德螺线. 但是,希腊人却并没有将这些工作扩展为一个完整的坐标系统.

关于如何将极坐标逐渐引入成为一种正式的坐标系统有多种不同的记载. 这个主题的完整历史在哈佛大学教授 Julian Lowell 的书《Coolidge 的极坐标起源》[3]. Grégoire de Saint-Vincent 和 Bonaventura Cavalieri 在公元 17 世纪中页分别独立地引入了极坐标的概念. Saint-Vincent 于 1625 年撰写并于 1647 年发表了自己的工作,而 Cavalieri 于 1635 年出版了自己的工作,并在 1653 年出版了修正版. Cavalieri 首次使用了极坐标来求解关于阿基米德螺线所围面积的问题. Blaise Pascal 随后将极坐标应用于计算抛物线的弧长.

在《微分法》(写于 1671 年,出版于 1736 年)一书中,Isaac Newton 爵士考察了极坐标系之间的变换问题,这一问题被他称为"对螺线的第七个方法". 此外还考虑了九个其他的坐标系[4]. 在期刊 *Acta Eruditorum*(1691)中,Jakob Bernoulli 使用了一个点在直线上的系统,分别称为**极点**和**极轴**. 其中的坐标由到极点的距离和极径与极轴之间的夹角给出. Bernoulli 的工作还被推广到采用此种坐标来计算曲线的曲率半径.

术语**极坐标**源于 Gregorio Fontana,并在 18 世纪意大利的作家的作品中使用. 该术语在英语中最早出现在 1816 年 George Peacock 翻译的 Lacroix 作品《微积分》[5](*Differential and Integral Calculus*). Alexis Clairaut 是第一个考虑三维空间中的极坐标问题的人,Leonhard Euler却是第一个真正发展了他们的人[3]. ◀

① 公元纪年,也称公历纪年或基督教纪年,通常简写为 CE,起始于公元 1 年. 以前的年份称为公元前,简记为 BCE,表示"before the Common/Current/Christian Era". 这些简写有时也使用小写字母或使用缩写点来表示(例如,"bce"或"C. E.").

▶**阅读材料**：极坐标系的应用

由于极坐标系是二维坐标系，因此它只能用于研究点的所有位置可以用一个二维平面刻画的问题. 它们最为适用的范围是与从一个中心点出发的方向和距离密切相关的问题. 例如，前面的例子就说明了基本的极坐标方程如何定义曲线——极坐标玫瑰线——其方程在直角坐标系内将会变得非常复杂. 此外，很多物理系统——例如刚体围绕一个中心的运动以及以某一中心开始的现象等——使用极坐标将会变得更为直接、简单. 引入极坐标最初的原因就是研究圆周运动和行星轨道运动.

定位与导航

极坐标系统也被应用于导航，因为航行的距离和方向可以使用针对考虑的对象给出的角度和距离来确定. 例如，飞行器使用稍作修改的极坐标系来进行导航. 在该系统中，通常使用如下的方式进行导航. 0°的射线通常称为航向 360，角度则使用顺时针方向，而不是数学系统中的逆时针方向. 航向 360 对应于磁极的北极，而航向 90、180 和 270 则分别对应于地磁东、南和西[2]. 因此，一架飞机向东飞行 5 海里意味着飞机沿着航向 90(空管读作 niner-zero)运行了 5 个单位距离. ◀

0.2 复数

0.2.1 复数的定义

数学上，**复数**是如下定义的数

$$a+bi,$$

其中 a 和 b 为实数，且 i 为虚单位，其性质为 $i^2=-1$. 实数 a 称为复数的**实部**，b 称为**虚部**. 实数可以认为是虚部为零的复数，也即，实数 a 等价于复数 $a+0i$.

若 $z=a+bi$，则 z 的实部记为 $\mathrm{Re}(z)$ 或 $R(z)$，虚部记为 $\mathrm{Im}(z)$ 或 $I(z)$.

下面给出一些常用的记号极其定义.

定义 0.2.1　(复数集合). 所有复数构成的集合通常记为 $\mathbf{C}$ 或 $\mathbb{C}$.

定义 0.2.2　(复数的相等). 假设有两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$，若 $a=c$ 且 $b=d$，则称这两个复数相等.

性质 0.2.3　(复数的运算). 复数可以定义加法、减法、乘法和除法，并且在满足性质 $i^2=-1$ 时，满足代数结合率、交换律及分配率：

- **加法**：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$，

- **减法**:$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$,
- **乘法**:

$$(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i,$$

- **除法**:

$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i.$$

0.2.2 复平面

一个复数 z 可以看作一个点或者二维直角坐标系中的一个**位置向量**. 该坐标系称为**复平面**或**阿干特图**(Argand diagram,Jean-Robert Argand 之后命名,见图 0.2.1),因此点和复数 z 可以用直角坐标系给出. 分别以直角坐标系的两个轴分别表示复数的实部 $x=\mathrm{Re}(z)$和虚部 $y=\mathrm{Im}(z)$. 采用直角坐标系表示的复数称为复数的笛卡儿形式、直角形式或者代数形式.

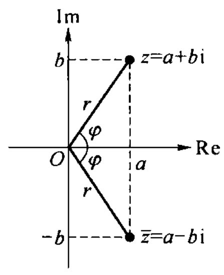

图 0.2.1

0.2.3 绝对值、共轭和距离

定义 0.2.4 (绝对值). 一个复数 $z=a+bi$ 的**绝对值**(或**模**、**长度**)定义为 $|z|=r$,其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

对任意复数 z 和 w,容易验证下列结论:

- 当且仅当 $z=0$ 时 $|z|=0$,
- $|z+w|\leqslant|z|+|w|$,
- $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.

定义 0.2.5 (两个复数之间的距离). 两个复数之间的距离为函数 $d(z,w)=|z-w|$.

注 0.2.6 利用距离函数的定义,我们可以将复数集合转换到度量空间,并可以讨论**极限**和**连续**.

定义 0.2.7 (复数的共轭). 复数 $z=a+bi$ 的复共轭定义为 $a-bi$,记为$\bar{z}$或 z^*.

如图 0.2.1,$\bar{z}$为z关于实轴的"反射",容易证明

- $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$,
- $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$,
- $\overline{(z/w)}=\bar{z}/\bar{w}$,
- $\bar{\bar{z}}=z$,
- 当且仅当 z 为实数时,$\bar{z}=z$,
- $|z|=|\bar{z}|$,
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$,
- 若 z 非零,则 $z^{-1}=\bar{z}\cdot|z|^{-2}$.

0.2.4　复数的极坐标形式

除了直角坐标表示 $z=a+bi$ 外，z 还可用极坐标表示. 对应的极坐标为 $r=|z|\geqslant 0$，称作**绝对值**或**模**，且 $\varphi=\arg(z)=\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$称为 z 的**辐角**或**相位**.

注 0.2.8　当 $r=0$ 时，φ 取任何值均表示相同的数值. 为得到唯一的表示，通常的选择是令 $\arg(0)=0$. 当 $r>0$ 时，辐角 φ 对 2π 取模后是唯一的. 因此，如果两个复数唯一的差别是它们的辐角相差 2π 的整数倍，则认为它们是等价的. 为得到唯一的表示，通常将 φ 的取值限制在区间$(-\pi,\pi]$内，也即$-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

根据复数模与相位的定义，容易看到如下的关系(如图 0.2.1 所示)：

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{0.2.1}$$

该表示称为**三角形式**(trigonometric form). 根据欧拉(Euler)公式有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x), \tag{0.2.2}$$

式(0.2.1)可以表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{0.2.3}$$

并称为**复数形式**(exponential form). 容易证明下面的性质.

性质 0.2.9　复数的乘法、除法、指数和求根运算满足如下的规则：

- 乘法：

$$r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}; \tag{0.2.4}$$

- 除法：

$$\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}; \tag{0.2.5}$$

- 指数：

$$(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}, \tag{0.2.6}$$

其中 n 为整数；

- 求根：

$$\sqrt[n]{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)}, \tag{0.2.7}$$

其中 n 可以为实数或复数等任何数，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，且$\sqrt[n]{r}$表示 r 的 n 次方根.