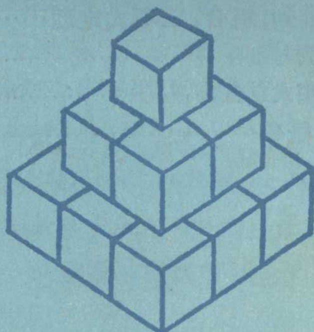
高级中学课本

代数

DAISHU

下册



$$1^2+2^2+\cdots+n^2$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

人民教育出版社

目　录

第五章 不等式

5.1 不等式

我们已经学过一些简单的不等式，例如

$$a+2>a+1, \tag{1}$$

$$a^2+3>3a, \tag{2}$$

$$3x+1<2x+6, \tag{3}$$

$$x^2<a. \tag{4}$$

在两个不等式中，如果每一个的左边都大于右边，如(1)和(2)，或者每一个的左边都小于右边，如(3)和(4)，那么这样的两个不等式就是同向不等式．如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，如(1)和(3)，那么这两个不等式就是异向不等式．

我们知道，实数可以比较大小．在数轴上，两个不同的点 A 与 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b，右边的点表示的数比左边的点表示的数大．从实数减法在数轴上的表示可以看出，a, b 之间具有以下性质：

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$；如果 $a-b$ 等于零，那么 $a=b$．反过来也对．这就是说：

$$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b.$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要考察它们的差就可以了.

例 1 比较$(x+1)(x+2)$与$(x-3)(x+6)$的大小.

解： $\because$ $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+6)$

$=(x^2+3x+2)-(x^2+3x-18)$

$=20>0$,

$\therefore$ $(x+1)(x+2)>(x-3)(x+6)$.

例 2 已知 $x\neq 0$，比较$(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小.

解： $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1$

$=x^2$.

由 $x\neq 0$，得 $x^2>0$. 从而

$$(x^2+1)^2>x^4+x^2+1.$$

练 习

1. 比较$(x+5)(x+7)$与$(x+6)^2$的大小.
2. 已知 $a\neq 0$，比较$(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小.
3. 比较$\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$与 2 的大小$(n\neq 0)$.

5.2 不等式的性质

不等式有下面一些性质.

定理 1 如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$.

即

$$a>b \Longleftrightarrow b<a.$$

证明：由正数的相反数是负数，负数的相反数是正数，得

$$a>b \Longrightarrow a-b>0 \Longrightarrow -(a-b)<0$$
$$\Longrightarrow b-a<0 \Longrightarrow b<a;$$
$$b<a \Longrightarrow b-a<0 \Longrightarrow -(b-a)>0$$
$$\Longrightarrow a-b>0 \Longrightarrow a>b.$$

即

$$a>b \Longleftrightarrow b<a.$$

定理 1 说明，把不等式的左边和右边交换，所得不等式与原不等式异向.

定理 2 如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$. 即

$$a>b, b>c \Longrightarrow a>c.$$

证明：根据两个正数的和仍是正数，得

$$\left.\begin{array}{l} a>b \Longrightarrow a-b>0 \\ b>c \Longrightarrow b-c>0 \end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow (a-b)+(b-c)>0$$
$$\Longrightarrow a-c>0 \Longrightarrow a>c.$$

即

$$a>b, b>c \Longrightarrow a>c.$$

根据定理 1，定理 2 还可以表示为

$$c<b, b<a \Longrightarrow c<a.$$

（下面一些定理也可根据定理 1 表示为另一种形式.）

定理 3 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$. 即

$$a>b \Longrightarrow a+c>b+c.$$

证明： $a>b \Longrightarrow a-b>0 \Longrightarrow (a+c)-(b+c)>0$

$$\Longrightarrow a+c>b+c.$$

定理3说明，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向． 由此很容易得出：

$$a+b>c \Longrightarrow a+b+(-b)>c+(-b) \Longrightarrow a>c-b.$$

一般地说，不等式中任何一项的符号变成相反的符号后，可以把它从一边移到另一边．

推论 $\boldsymbol{a>b,\ c>d \Longrightarrow a+c>b+d.}$

这是因为

$$\left.\begin{aligned} a>b \Longrightarrow a+c>b+c \\ c>d \Longrightarrow b+c>b+d \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a+c>b+d.$$

很明显，不等式的这个性质可以推广到任意个同向不等式两边分别相加．这就是说，**两个或者几个同向不等式两边分别相加，所得不等式与原不等式同向．**

定理4　如果 $\boldsymbol{a>b}$，$\boldsymbol{c>0}$，那么 $\boldsymbol{ac>bc}$；如果 $\boldsymbol{a>b}$，$\boldsymbol{c<0}$，那么 $\boldsymbol{ac<bc}$．即

$$\boldsymbol{a>b,\ c>0 \Longrightarrow ac>bc;\quad a>b,\ c<0 \Longrightarrow ac<bc.}$$

证明： 根据同号相乘得正，异号相乘得负，得

$$a>b,\ c>0 \Longrightarrow \left.\begin{aligned} a-b>0 \\ c>0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (a-b)c>0$$

$$\Longrightarrow ac-bc>0 \Longrightarrow ac>bc;$$

$$a>b,\ c<0 \Longrightarrow \left.\begin{aligned} a-b>0 \\ c<0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (a-b)c<0$$

$$\Longrightarrow ac-bc<0 \Longrightarrow ac<bc.$$

推论1　$\boldsymbol{a>b>0,\ c>d>0 \Longrightarrow ac>bd.}$

这是因为

$$\left.\begin{array}{l}a>b,c>0\Longrightarrow ac>bc\\c>d,b>0\Longrightarrow bc>bd\end{array}\right\}\Longrightarrow ac>bd.$$

很明显，不等式的这个性质可以推广到任意个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘．这就是说，**两个或者几个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘，所得不等式与原不等式同向．**由此，我们可以得到

推论2 $a>b>0\Longrightarrow a^n>b^n(n\in Z,且\ n>1)$.

定理5 **如果** $a>b>0$,**那么** $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\ (n\in Z,且 n>1)$.

即

$$a>b>0\Longrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

证明: 用反证法．

假定 $\sqrt[n]{a}$不大于$\sqrt[n]{b}$．则或者$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，或者$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$．但

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Longrightarrow a<b,$$
$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Longrightarrow a=b.$$

这些都同已知条件 $a>b$ 矛盾，所以$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$．即

$$a>b>0\Longrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

练　习

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

(1) $a>b\Longrightarrow ac>bc$;

(2) $a>b\Longrightarrow ac^2>bc^2$.

2. (1) 如果 $a>b,c<d$, 能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小？举例说明．

(2) 如果 $a>b, c>d$，能否断定 $a-c$ 与 $b-d$ 谁大谁小？举例说明.

(3) 如果 $a>b, c>d$，是否一定得出 $ac>bd$？举例说明.

(4) 如果 $a>b$，$c<d$，c，d 都不是零，是否一定得出 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$？举例说明.

3. 求证：

(1) $a>b, c<d \Longrightarrow a-c>b-d$;

(2) $a>b>0, c<d<0 \Longrightarrow ac<bd$;

(3) $a>b, ab>0 \Longrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

5.3 不等式的证明

由于不等式的形式是多种多样的，所以不等式的证明方法也就不同. 下面举例说明一些常用的证明方法.

例 1 求证 $x^2+3>3x$.

我们已经知道，$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$. 因此，要证明 $a>b$，只要证明 $a-b>0$. 这是证明不等式常用的一种方法，通常叫做**比较法**.

证明： $\because$ $(x^2+3)-3x$

$$=x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0,$$

$\therefore$ $x^2+3>3x$.

注意 为了确定不等式两边的差的正负，有时要把这个

差变形为一个常数，或者变形为一个常数与一个或几个平方的和的形式，也可变形为几个因式的积的形式，以便于判断其正负.

例2 已知 $a,b\in R^+$，并且 $a\neq b$，求证

$$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3.$$

证明: $(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)$

$$=(a^5-a^3b^2)-(a^2b^3-b^5)$$

$$=a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)$$

$$=(a^2-b^2)(a^3-b^3)$$

$$=(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$$

$\because$ $a,b\in R^+$,

$\therefore$ $a+b>0$,

$a^2+ab+b^2>0.$

又因为 $a\neq b$，可知

$$(a-b)^2>0.$$

$\therefore$ $(a+b)(a-b)^2(a^2+ab+b^2)>0,$

即

$$(a^5+b^5)-(a^3b^2+a^2b^3)>0.$$

$\therefore$ $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3.$

练 习

1. 求证 $(x-3)^2>(x-2)(x-4)$.
2. 已知 $a\neq b$，求证 $a^2+3b^2>2b(a+b)$.
3. 已知 $a,b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证

$$a^4+b^4>a^3b+ab^3.$$

4. 已知 $a\neq 2$，求证 $\dfrac{4a}{4+a^2}<1$.

证明不等式还常常用到下面的定理和推论.

定理1　如果 $a,b\in R$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

证明：$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$.

当 $a\neq b$ 时，$(a-b)^2>0$，当 $a=b$ 时，$(a-b)^2=0$，所以

$$(a-b)^2\geqslant 0,$$

即

$$a^2+b^2-2ab\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad a^2+b^2\geqslant 2ab.$$

推论　如果 $a,b\in R^+$，那么 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

这是因为

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b}\Longrightarrow a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\Longrightarrow\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R^+$，且 $n>1$，那么

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

叫做这 n 个正数的**算术平均数**，

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

叫做这 n 个正数的**几何平均数**.

上面的推论就是：**两个正数的算术平均数不小于（即大于**

或等于)它们的几何平均数.

例3　已知 $x,y\in R^{+}$, $x+y=S$, $xy=P$. 求证:

(1) 如果 P 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时, S 的值最小;

(2) 如果 S 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时, P 的值最大.

证明: (1) 因为 $x,y\in R^{+}$, 所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}.$$

即

$$S\geqslant 2\sqrt{P}\text{(当且仅当 } x=y \text{ 时取“=”号)}.$$

这就是说,如果 P 是定值, 那么当且仅当 $x=y$ 时, S 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2) 从第(1)小题的证明可知 $S\geqslant 2\sqrt{P}$. 现将它化成

$$\sqrt{P}\leqslant\frac{S}{2},$$

$$\therefore\quad P\leqslant\frac{S^2}{4}\text{(当且仅当 } x=y \text{ 时取“=”号)}.$$

这就是说,如果 S 是定值,那么当且仅当 $x=y$ 时, P 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

定理2　如果 $a,b,c\in R^{+}$, 那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号).

证明: $\because$ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$$

$$-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab]$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\times[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqslant 0,$$

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc.$

很明显，当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号.

推论　如果 a, b, $c\in R^+$，那么 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时取"="号）.

这是因为

$$(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3\geqslant 3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$$

$$\Longrightarrow a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

$$\Longrightarrow\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

例 4　已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证

$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

我们可以利用某些已经证明过的不等式（如上面的定理及其推论）作为基础，再运用不等式的性质推导出所要求证的不等式. 这种证明方法通常叫做**综合法**.

证明: $\because\quad b^2+c^2\geqslant 2bc,\ a>0,$

$\therefore\quad a(b^2+c^2)\geqslant 2abc.\qquad(1)$

同理，

$$b(c^2+a^2)\geqslant 2abc,\qquad(2)$$

$$c(a^2+b^2)\geqslant 2abc.\qquad(3)$$

因为 a,b,c 不全相等，所以(1)，(2)，(3)中至少有一式

不能取“=”号.

$$\therefore\quad a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc.$$

例 5 已知 $a,b,c,d\in R^+$,求证

$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd.$$

证明: 由 $a,b,c,d\in R^+$,得

$$\frac{ab+cd}{2}\geqslant\sqrt{ab\cdot cd}>0,$$

$$\frac{ac+bd}{2}\geqslant\sqrt{ac\cdot bd}>0.$$

$$\therefore\quad \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{4}\geqslant abcd,$$

即

$$(ab+cd)(ac+bd)\geqslant 4abcd.$$

例 6 已知 $x,y,z\in R^+$,求证

$$(x+y+z)^3\geqslant 27xyz.$$

证明: $\because\quad \dfrac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}>0,$

$$\therefore\quad \frac{(x+y+z)^3}{27}\geqslant xyz,$$

即

$$(x+y+z)^3\geqslant 27xyz.$$

练　习

1. 已知 a,b,c 是不全相等的正数,求证:

(1) $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$;

(2) $a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$.

2. 已知 $x,y,z\in R^+$，求证：

(1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$; (2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant 3$.

3. 求证当 $x>0$ 时，$x+\frac{16}{x}$ 的最小值是 8.

例 7 已知 $a,b,m\in R^+$，并且 $a<b$，求证

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}.$$

证明不等式时，有时可以从求证的不等式出发，分析使这个不等式成立的条件，把证明这个不等式转化为判定这些条件是否具备的问题．如果能够肯定这些条件都已具备，那么就可以断定原不等式成立．这种证明方法通常叫做**分析法**.

证明：因为 $a,b,m\in R^+$，为了证明

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b},$$

只需证明

$$(a+m)b>a(b+m),$$

即

$$bm>am,$$

因此，只需证明

$$b>a.$$

因为 $b>a$ 成立（题设），所以

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

成立.

例 8 求证 $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

证法一：为了证明

$$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6},$$

因为$\sqrt{2}+\sqrt{7}$和$\sqrt{3}+\sqrt{6}$都是正数，所以只需证明

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.$$

展开得

$$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18},$$

即

$$2\sqrt{14}<2\sqrt{18},$$

$$\sqrt{14}<\sqrt{18},$$

$$14<18.$$

因为 $14<18$ 成立，所以

$$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

成立.

证法二：$\because \quad 14<18,$

$$\therefore \quad \sqrt{14}<\sqrt{18},$$

$$2\sqrt{14}<2\sqrt{18},$$

$$9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18},$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2,$$

$$\therefore \quad \sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

注意 证法二用的是综合法．可以看出，综合过程有时正好是分析过程的逆推．

例 9 如果 $a,b\in R^+$，且 $a\neq b$，求证

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

证法一：证明

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2,$$

就是证明

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b).$$

因为$a+b>0$,所以要证明上式,只需证明

$$a^2-ab+b^2>ab,$$

$$a^2-2ab+b^2>0,$$

即

$$(a-b)^2>0.$$

因为$a\neq b$,最后的不等式$(a-b)^2>0$成立,所以

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2$$

成立.

证法二: 因为$a\neq b$,所以

$$(a-b)^2>0,$$

$$a^2-2ab+b^2>0,$$

$$a^2-ab+b^2>ab.$$

又因为$a+b>0$,所以

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b),$$

即

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2.$$

(证法一是分析法,证法二是综合法. 还可用比较法,请同学们自己证明.)

练　习

1. 求证$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
2. 求证 $ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

习题十五

1. 比较$(2a+1)(a-3)$与$(a-6)(2a+7)+45$的大小.

2. 比较$(x+1)\left(x^2+\dfrac{x}{2}+1\right)$与$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$的大小.

3. 设$x>1$,比较x^3与x^2-x+1的大小.

4. 求证:

(1) $a>b \Longrightarrow c-a<c-b$;

(2) $a>b>0, c>0 \Longrightarrow \dfrac{c}{a}<\dfrac{c}{b}$;

(3) $a>b>0, c<0 \Longrightarrow \dfrac{c}{a}>\dfrac{c}{b}$;

(4) $a>b>0,\ c>d>0 \Longrightarrow \sqrt{\dfrac{a}{d}}>\sqrt{\dfrac{b}{c}}$.

5. 已知$a>b$,求证

$$a^3-b^3>ab(a-b).$$

6. 已知$ad\neq bc$,求证

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2.$$

7. 求证$a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$.

8. 已知$a\neq b$,求证$a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2)$.

9. 求证$a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$.

10. 求证$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$.

11. 求证$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$.

12. 已知$a,b\in R^+$,且$a\neq b$,求证