总装备部人才战略工程专项资助

XIANXING GUIHUA
WENTI DE XINSUANFA

线性规划问题的新算法

吕彬 郭全魁 陈磊 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

总装备部人才战略工程专项资助

线性规划问题的新算法

吕彬　郭全魁　陈磊　著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书系统地提出了求解线性规划问题的新算法——正则形法。全书共分8章,第1章介绍了线性规划问题的一般模型及各种形式;第2章研究了线性规划问题的图解法和其解的性质;第3章提出了"正则形法"的求解思路和迭代步骤,并给出了证明;第4章结合图形演示了"正则形法"的求解路径;第5章给出了运用"正则形法"求解线性规划问题的典型示例;第6章研究了"单纯形法"及其收敛速度的改进;第7章对"正则形法"和"单纯形法"进行了比较研究;第8章研究了有多个解的线性规划问题。

本书可作为运筹学、管理学、系统工程等专业的"线性规划"课程的研究生参考教材,也可供相关专业的院校教师、研究生和高年级本科生以及从事经济管理研究的人员作为参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性规划问题的新算法/吕彬,郭全魁,陈磊著.—北京:
国防工业出版社,2013.3
总装备部人才战略工程专项资助
ISBN 978-7-118-08437-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①吕… ②郭… ③陈… Ⅲ.①线性规划-算法 Ⅳ.①O221.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第056767号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
北京嘉恒彩色印刷责任有限公司
新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 **印张** 12½ **字数** 260千字
2013年3月第1版第1次印刷 **印数** 1—2500册 **定价** 33.00元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

线性规划是运筹学重要的分枝。自线性规划问题提出以来，国内外诸多学者对其解决方法进行了广泛研究。传统的算法通常是从可行域极点或可行域内寻求线性规划问题的最优解。本书作者经过研究，提出了解决线性规划问题的一种新方法——正则形法，主要思想是在保持解的正则性的基础上，从可行域外出发，逐步找到最优解。正则形法在控制线性规划问题的规模、解决变量有界的线性规划问题和整数规划的分枝定界法等方面具有明显优势。

本书第 1 章、第 2 章从线性规划问题的一般模型出发，分析了线性规划问题的图解法与解的性质。第 3 章提出了正则形法的求解思路和迭代步骤，证明了算法的正确性，列举了正则形法的求解示例。第 4 章结合图形演示了正则形法求解线性规划问题的寻优路径。第 5 章给出了正则形法求解各类典型线性规划问题的示例。第 6 章对单纯形法及其收敛速度进行了分析研究。第 7 章对正则形法与单纯形法进行了比较研究，比较验证了正则形法在解决变量具有上下界约束限制的线性规划问题方面的优越性，同时验证了其在一般线性规划问题的规模控制、变量发生变化时的灵敏度分析方面具有优越性，正则形法在分枝定界法求解整数规划方面，具有不需要增加约束不等式的优势。第 8 章研究了有多个解的线性规划问题。本书的示例均保留了大量的计算过程，以便于读者对正则形法的深入理解，也便于与其他算法进行比较研究。

在本书编写过程中，作者阅读了国内外相关学者的许多参考文献，从中吸收了许多重要研究成果，并在书中加以标注。作者对这些学者在线性规划问题研究领域所做出的重要贡献表示崇高的敬意。

在本书写作过程中，陈庆华教授给予了大力支持和精心指导，并提供了许多重要的参考文献，在此对陈庆华教授表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中一定存在谬误，敬请广大读者批评指正。

作者
2012.10

目录

第1章　线性规划问题与模型

在现实生活中,经常遇到这样一类决策优化问题,在现有各项资源条件的限制下,如何确定决策方案,使预期目标达到最优。其中,数学模型比较简单、应用比较广泛的是线性规划问题。

1.1　线性规划问题

先来看一个例子[1]。

[**例1.1**] 在生产活动中,某厂已确定使用A、B两种资源,生产甲乙两种产品,已知每生产一件甲种产品需消耗2吨的资源A,消耗2吨的资源B,可获得效益3万元;每生产一件乙种产品需消耗3吨的资源A,消耗1吨的资源B,可获得效益2万元。现有资源A共10吨,资源B共6吨;充分利用现有资源,安排生产甲乙两种产品各多少件,才能获得最大的效益?

分析:在这个问题中,目的是寻求一个合理有效的资源使用方案,使获得的总效益最大。首先引入决策变量,设甲乙两种产品各安排生产 x_1 件、x_2 件。根据问题中对目标和约束的描述,当不考虑整数要求时,构建该问题的数学模型如下:

$$\max f = 3x_1 + 2x_2 \tag{1.1}$$

$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 10 & (1.2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 & (1.3) \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & (1.4) \end{cases}$$

其中:式(1.1)称作目标函数,式(1.2)与式(1.3)称作约束不等式,式(1.4)称作非负要求。符号st.(subject to 的缩写)读为约束于。一组决策变量,如果满足所有的约束不等式,则称这组决策变量为原问题的一组可行解,也称原问题的一个可行解。原问题的可行解可能不只一个,原问题的所有可行解组成的集合,称为原问题的可行域。在原问题的可行域中,能够使目标函数值达到最优值的可行解,称为最优解。原问题的最优解可能不只一个,当然,它们的目标函数值都相等,通常情况下,只要求得一个就可以了。

1.2　线性规划模型

从上述例子我们可以看出,线性规划问题的数学模型为:求一个线性目标函数的

最优值(最大值或最小值),且满足一组线性不等式(或线性等式),其数学模型由三个要素构成[2]:

(1) 变量(或称决策变量),是问题中要确定的未知量,它用以表明规划中的用数量表示的方案、措施,可由决策者决定和控制;决策变量的取值,可以为整数,也可以为分数、小数等,通常情况下,要求为非负的、连续的实数。

(2) 目标函数,是决策变量的线性表达式,按照优化目标分别在这个函数前加上 max 或 min。

(3) 约束条件,是含变量的线性不等式(或线性等式),表示决策变量取值时受到的各种资源条件的限制。

线性规划的定义如下。

[定义 1.1] 在满足一组线性约束条件(线性不等式或线性等式)的若干决策变量组中,寻找能使线性目标函数(决策变量的线性表达式)达到最优值(最大值或最小值)的数学问题,称为线性规划问题。线性规划问题的一般模型如下:

$$\max(\text{或}\ \min) f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{st.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

上述模型的简写形式为:

$$\max(\text{或}\ \min) f = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} =, \geqslant) b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (i = 1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

用矩阵和向量形式来表示可写为:

$$\max(\text{或}\ \min) f = \boldsymbol{C}X$$

$$\text{st.}\begin{cases} \boldsymbol{A}X \leqslant (\text{或} =, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中:$\boldsymbol{C}$ 是一个 n 维行向量;$\boldsymbol{X}$ 是一个 n 维列向量;$\boldsymbol{b}$ 是一个 m 维列向量。

由于线性规划问题可以有多种表达式,为了便于问题的求解,需要制定统一的算法。目前,求解线性规划问题有许多种算法,单纯形法是比较常用的方法。本书将在第 3 章重点研究线性规划问题的另外一种解法——正则形法。

1.3 几类特殊的线性规划问题及建模

在国内许多运筹学专著和教材中[7-12],针对一些特殊的线性规划问题,给出了特殊的求解方法,一方面因为这些特殊的求解方法简单可行,另一方面要把这些特殊问题转化为一般的线性规划模型,可能使得简单的问题变得很复杂。本章针对这些特殊问题,建立了一般的线性规划模型。

1. 运输问题的线性规划模型

运输是社会生产活动中常遇到的问题之一。给出如下一个供需平衡的一般形式的运输表,如表 1-1 所列。其中 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为供方,供应量分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_3$,$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为需方,需求量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。从 A_i 到 B_j 的路程为 w_{ij};重量单位为吨,路程单位为公里(千米);各供方的总供应量与各需方的总需求量相同;要求给出一个满足供需要求的运输方案,使得总运费(即总吨公里)最省。

表 1-1　一般形式的运输表

需方 费用 供方	B_1	B_2	…	B_n	供应量
A_1	x_{11} w_{11}	x_{12} w_{12}		x_{1n} w_{1n}	a_1
A_2	x_{12} w_{21}	x_{22} w_{21}		x_{2n} w_{2n}	a_2
⋮					⋮
A_m	x_{m1} w_{m1}	x_{m2} w_{m2}		x_{mn} w_{mn}	a_m
需求量	b_1	b_1	…	b_n	

设置决策变量 x_{ij} 表示从供方 A_i 到需方 B_j 的运量,化为线性规划问题:

$$\min g = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij} \tag{1.5}$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

由于供需平衡,所以 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。

2. 分派问题的线性规划模型

在社会生产活动中,需要将不同的部门机构分配执行不同的生产管理任务,将不同的人员分配完成不同的工作,这类问题都属于分派问题。如何对部属进行合理的分工,使部属都发挥各自的特长,产生最大的整体效率,是每个管理者必须认真解决的重要问题。

分派问题有多种形式,下面是一个比较简单的情况。

某管理部门有 2 名工作人员 A_1,A_2;有 3 件业务工作 B_1,B_2,B_3;工作人员 A_1、A_2 均可以胜任 B_1,B_2,B_3。按照“人人有事做,事事有人做,一人做一事,一事一人做”的原则,给出一种可行的分派方案。

经过分析,建立二部图,用 2 个结点表示工作人员 A_1,A_2;用另外 3 个结点表示业务工作 B_1,B_2,B_3。如果某个工作人员能胜任某件业务工作,就用一条线将这个工作人员与这件业务工作连接起来,如图 1-1 所示。

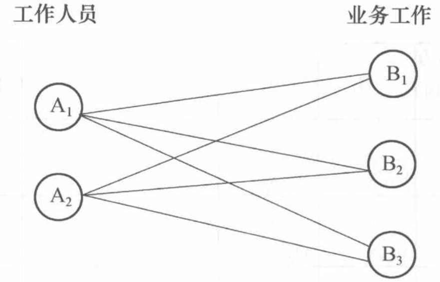

图 1-1 人员分派问题二部图

分派问题可以用一个线性规划模型来描述。设对二部图中的每一条边线都设置一个决策变量。具体地说,对于边线 A_1B_1,A_1B_2,A_1B_3 分别用决策变量 x_{11},x_{12},x_{13} 表示;边线 A_2B_1,A_2B_2、A_2B_3 分别用 x_{21},x_{22},x_{23} 表示。每一个决策变量 x_{ij} 的取值只能是 0 或 1,取 0 时,表示这条边线没有被选取,即工作人员 A_i 没有被分派承担业务工作

B_j。按照“人人有事做，事事有人做，一人做一事，一事一人做”的原则，可以将这种类型的分派问题化为如下的线性规划：

$$\max f = \sum_{\substack{\text{取遍图中所}\\ \text{有的边线}}} x_{ij} \tag{1.7}$$

$$\text{满足}\begin{cases} \sum x_{1j} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } A_1) \\ \sum x_{2j} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } A_2) \\ \sum x_{i1} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } B_1) \\ \sum x_{i2} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } B_2) \\ \sum x_{i3} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } B_3) \\ x_{ij} = 0,1 \end{cases} \tag{1.8}$$

在实际工作中，领导对下属工作人员的了解不能只停留在是否胜任某项业务工作上，还要进一步考察其胜任的程度，可以通过绩效评估或组织民意测验等形式，得到胜任程度评分。a_{ij}表示第 i 个人胜任第 j 项工作的评分值。这类分派问题化为如下的线性规划：

$$\max f = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \tag{1.9}$$

$$\text{满足}\begin{cases} \sum x_{ij} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } A_i) \\ \sum x_{ij} \leqslant 1 \ (\text{对结点 } B_j) \\ x_{ij} = 0,1 \end{cases} \tag{1.10}$$

3. 有向图最短路问题的线性规划模型

在道路规划、管道设计、线路架设、厂区安排等问题中，经常遇到最短路问题。求解最短路问题可以用图论的相关理论解决。这里化为一般的线性规划问题求解。

设 $G=(V,E)$ 为连通有向图，每条路都是有向的，而且赋予一个权值（正的实数），求一条从发点 V_1 到收点 V_6 的最短的有向路，如图 1-2 所示。

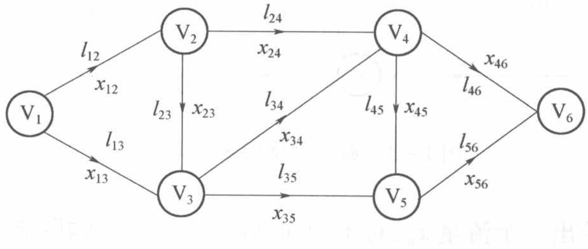

图 1-2　一个带边权的有向图

一般地，给出赋权的有向图，图中有向边(v_i, v_j)的权值为 l_{ij}，对应决策变量 x_{ij}，求

从发点到收点的最短的有向路，其线性规划模型如下：

$$\min g = \sum_{\text{图中所有边}} l_{ij}x_{ij} \tag{1.11}$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum\limits_{\text{从发点出发的边}} x_{sj} \leqslant 1 \text{（对发点 } v_s\text{）} \\ \sum\limits_{\text{流向收点的边}} x_{it} \leqslant 1 \text{（对收点 } v_t\text{）} \\ \sum\limits_{\text{注入的边}} x_{ik} = \sum\limits_{\text{注出的边}} x_{kj} \text{（对中间点 } v_k\text{）} \\ x_{ij} = 0,1 \end{cases} \tag{1.12}$$

有时为了书写方便，可以对决策变量 x_{kj} 统一编号为 $x_1, x_2, x_3 \cdots$

4. 最大流问题的线性规划模型

在社会生产活动中，经常碰到的问题是：在一段时间内需要把一批物资从一地运到另一地，但由于运输系统的运力限制，在规定的时间内，不可能做到将物资全部运去。希望能在整个运输系统的运输能力之内，尽可能多地运送物资。特别是当发生突发事件的时候，这个问题更加重要。因为事件突发地往往不是物资储备充足的地方，通常需要在短时间内从物资仓库紧急运送大量的物资到事发地，这就需要合理安排运输计划，以便能够运送尽可能多的物资，满足事发地紧缺物资的需要。在平时，对于事件的突发地域，应提前研究，考察这个运输系统的最大运输能力是否达到应付突发事件的要求，以便尽早安排扩大运输能力的计划，这就是网络最大流问题。网络最大流问题在信息网络上也有应用。

给出一个运输网络 N，如图 1－3 所示。其中结点 s 是物资出发点，简称发点，结点 t 是物资接收点，简称收点。网络上的每条带箭头的边线都表示不可逆行的单向运输线路，带箭头的边线又称作弧；旁边的数字表示这条单向运输线路上的最大运输能力，又称作容量，用 c 表示。试求从 s 到 t 的最大流。

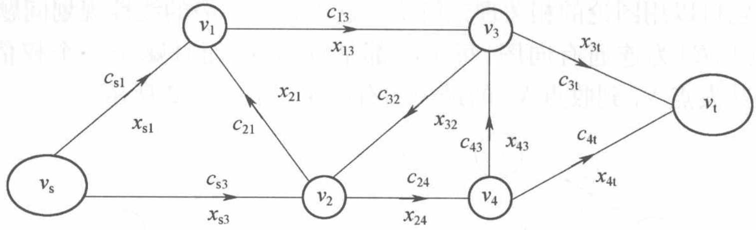

图 1－3　有向网络中求最大流

对每条弧 $\widehat{v_iv_j}$ 给出一个流量 x_{ij}，对于中间结点来说，都是物资流通过的地方，进入该结点的流量之和应该等于离开该结点的流量之和，即

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0, i = 1,2,3,4 \tag{1.13}$$

而对于发点 s 来说，设流出的总量为 V；则对收点 t 来说，流进的总量也应是 V，即

$$\sum_j x_{sj} = V$$
$$\sum_j x_{jt} = V \tag{1.14}$$

对于每条弧$\widehat{v_iv_j}$来说，还要满足容量限制，即

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}\text{，对于所有弧}\widehat{v_iv_j}\text{ 成立} \tag{1.15}$$

线性规划模型如下：

$$\max f = V \tag{1.16}$$

$$\begin{cases} \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = \begin{cases} V, & i\text{ 为发点} \\ 0, & i\text{ 为中间点} \\ -V, & i\text{ 为收点} \end{cases} \\ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}\text{，对每条弧}\widehat{v_iv_j}\text{ 成立} \end{cases} \tag{1.17}$$

有时为了书写方便，可以对决策变量 x_{kj}统一编号为 $x_1, x_2, x_3 \cdots$。

5. 最小费用流问题的线性规划模型

前面考虑的网络只对运输能力有限制，而实际上，社会生产活动中的运输都是要消耗资源、支付费用的。在满足运输总量的前提下，如何选择运输线路，以便以较小的代价将所需物资运到目的地是必须考虑的一个重要问题。

给定一个网络 $G = (V, A, C)$，其中 V 表示网络的结点集合，对每条弧$\widehat{v_iv_j}$，都给定了两个数值，a_{ij}与 c_{ij}，其中 a_{ij}表示单位流量通过该弧时所必须支付的费用；而 c_{ij}表示通过该弧的流量限制，即通过该弧的容量。如果从发点 $s = v_1$ 到收点 $t = v_n$ 之间的最大流值为 F_0，问题是对给定的数值 $F \leqslant F_0$，求出一个从 s 到 t 的可行流，在满足流值为 F 的前提下，使得流的总费用最小，如图 1－4 所示。其中弧旁的括号(a_{ij}, c_{ij})内的数字，分别表示单位流费用 a_{ij}与容量 c_{ij}。

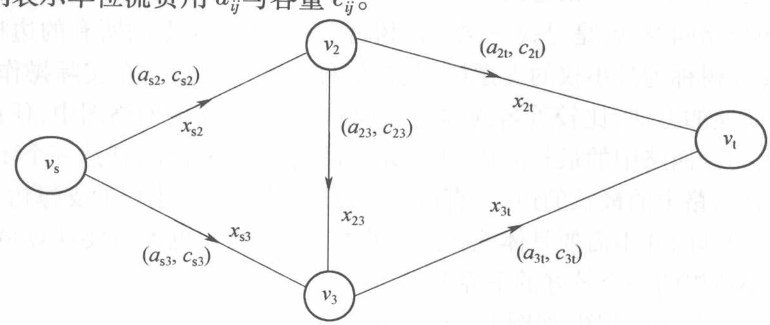

图 1－4　具有容量与费用的网络

对每条弧$\widehat{v_iv_j}$，定义一个流量 x_{ij}，可得到流量为 F 的最小费用流的线性规划模型如下：

$$\min g = a_{ij}x_{ij} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) = \begin{cases} F, & i\text{ 为发点} \\ 0, & i\text{ 为中间点} \\ -F, & i\text{ 为收点} \end{cases} \\ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant c_{ij}, \text{对每条弧}\widehat{v_iv_j}\text{ 成立} \end{cases} \tag{1.19}$$

6. 最小树权下界问题的线性规划模型

在无向网络图中，经常遇到求最小树权的问题。设给定一个连通图 $G=(V,E)$，其中 $|V|=n$，$|E|=m$，称具有 n 个顶点，$n-1$ 条边，不包含回路的子图 T 为 G 的支撑树。对于连通网络来说，其支撑树上的各条边的权之和称为该支撑树的权；权最小的支撑树，称为该网络的最小权的支撑树。这类问题在实际中有重要应用，比如，在一个乡镇的所有村庄之间，原来只有土路相连，有关部门计划投资有限的经费，在原有的土路的基础上，通过水泥硬化建成能实现村村通的公路系统。显然，约束条件是村村通公路，在这一前提下，为了节约经费，目标是公路的总长度最短。

对于图 $G=(V,E)$，如图 1－5 所示，粗线所示的子图是 G 的一棵支撑树。如果连通图有 n 个顶点，支撑树就有 $n-1$ 条边。

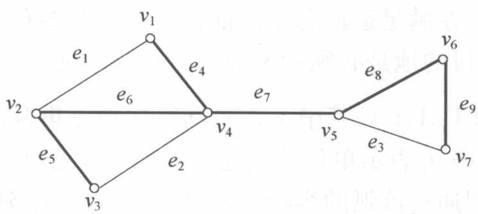

图 1－5　图的支撑树

在无向网络图中，每一条道路（即网络图的边）都赋予一个正的实数值，称为边的权，村村通公路问题，就是寻找一棵支撑树，使得该支撑树上的所有的边权之和最小，这样的支撑树称为最小权的支撑树，其权值称为最小树权。在实际操作中，已经找到了许多简便的方法，比较著名的称作“贪心算法”，在无向网络图中，任选一个闭合回路，删去闭合回路中的最长的边，再在余下的无向网络途中，任选一个闭合回路，再删去该闭合回路中的最长的边，一直做下去，最后就得到最小权的支撑树。

有时，计划部门并不需要具体地找到最小权的支撑树，也不需要计算最小树权，只需知道最小树权的一个较好的下界即可。

设 $G=(V,E)$ 为连通图，如图 1－6 所示。

连通的无向网络图中，无向边 (v_i, v_j) 的权值为 l_{ij}，对应决策变量 x_{ij}，求最小树权

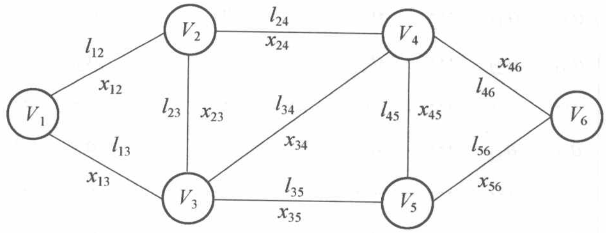

图 1－6　一个带边权的连通图

下界的线性规划模型如下：

$$\min g = \sum_{\text{图中所有边}} l_{ij}x_{ij} \tag{1.20}$$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum\limits_{\text{图中所有边}} x_{it} = V & (\text{支撑树的边数}) \\ \sum\limits_{\text{与}v_i\text{相连的边}} x_{it} \geqslant 1 & (\text{对结点 } v_t) \\ x_{ij} = 0,1 \end{cases} \tag{1.21}$$

有时为了书写方便，可以对决策变量 x_{kj}统一编号为 $x_1, x_2, x_3\cdots$。

7. 博弈问题的线性规划模型

对策，是决策者在某种竞争场合下所做出的决策。对策论是研究有利害冲突各方在竞争性的活动中是否存在自己取胜的最优策略，以及如何找出这些策略等问题的数学理论与方法[13]。

对策论研究的问题有三个基本要素：

(1) 局中人。在一局对策中，有权决策的参加者。只有两个局中人的对策称为二人对策。

(2) 策略。在一局对策中，每个局中人都有可供他们选择的完整的行动方案。每个完整的行动方案称作这个局中人的一个对策。

(3) 支付函数。当每个局中人都选定了一个策略时，把这些策略合在一起，称作一个局势。当局势给定以后，对策的结果也就确定了。每个局中人都有“得失”，这个得失称为支付函数。

一个二人对策，每个局中人的策略都是有限的，并且如果对于每一个局势来说，一个局中人的“获得”，在数值上与另一个局中人的“损失”相同，这样的二人对策称为二人有限零和对策。以下研究的都是二人有限零和对策。

一般地说，任意给定一个 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，都可以看作是甲、乙二人零和对策的甲方的“赢得”矩阵。

设甲的赢得矩阵为 $\boldsymbol{A}$：

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{r1} & a_{r2} & \cdots & (a_{rk}) & \cdots & a_{rq} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pk} & \cdots & (a_{pq}) & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{iq} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mq} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

甲为了稳妥取胜，先从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一行中选最小元素 $\min\limits_{j} a_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$，再从选取出来的 m 个元素中，取最大元素，即 $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}$，不妨设为 a_{rk}。

乙为了稳妥取胜，先从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的每一列中选最大元素 $\max\limits_{i} a_{ij}$，$j=1,2,\cdots,n$，再从选取出来的 n 个元素中，取最小元素，即 $\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}$，不妨设为 a_{pq}。

由于 a_{rk} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 r 行中的最小元素，所以 $a_{rk}\leqslant a_{rq}$；另一方面，由于 a_{pq} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 q 列中的最大元素，所以 $a_{rq}\leqslant a_{pq}$。从而有 $a_{rk}\leqslant a_{rq}\leqslant a_{pq}$，总有 $a_{rk}\leqslant a_{pq}$，即 $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}\leqslant \min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}$。

如果 $a_{rk}=a_{pq}$，则有：

$$
\max_{i}\min_{j} a_{ij} = \min_{j}\max_{i} a_{ij} = V
$$

则称该对策问题存在鞍点。只要存在鞍点，求解对策问题是简单的。

现在考虑上面的等式不成立，即不存在鞍点的情况。

假设甲以概率 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 分别选取策略 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，其中 $x_1+x_2+\cdots+x_m=1$，$x_1,x_2,\cdots,x_m\geqslant 0$，则称甲的混合策略为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$。乙以概率 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 分别选取策略 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中 $y_1+y_2+\cdots+y_n=1$，$y_1,y_2,\cdots,y_n\geqslant 0$，则称乙的混合策略为 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。

对于一般的矩阵对策，如果矩阵不存在鞍点，则称在纯策略意义下对策问题无解。

但在混合策略意义下，有如下结论，即定理 1.1，被称为对策论的 Minmax 定理，是对策论的基本定理[13,14,15]。

[定理 1.1] 对于任意一个矩阵对策，存在甲的混合策略 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，与乙的混合策略 $y=(y_1, y_2,\cdots, y_n)$，使得下列等式成立：

$$
\max_{x}\min_{y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \min_{y}\max_{x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j \tag{1.22}
$$

满足上面等式的 x,y 称为矩阵对策在混合策略意义下的解。

给定矩阵 $\boldsymbol{A}$,求解如下线性规划与对偶规划。

线性规划为:

$$\max f = u$$

$$\text{st.}\begin{cases}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\geqslant(u,u,\cdots,u)\\ x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_m\geqslant 0,u\text{ 无限制}\end{cases}\tag{1.23}$$

对偶规划为:

$$\min g = v$$

$$\text{st.}\begin{cases}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}v\\ v\\ \vdots\\ v\end{pmatrix}\\ y_1+y_2+\cdots+y_n=1\\ y_1\geqslant 0,y_2\geqslant 0,\cdots,y_n\geqslant 0,v\text{ 无限制}\end{cases}\tag{1.24}$$

根据线性规划的对偶理论,事实上,只需求解如下不等式组即可:

$$\begin{cases}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\geqslant(u,u,\cdots,u)\\ x_1+x_2+\cdots+x_m=1,x_1,x_2,\cdots,x_m\geqslant 0,\\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}u\\ u\\ \vdots\\ u\end{pmatrix}\\ y_1+y_2+\cdots+y_n=1,y_1,y_2,\cdots,y_n\geqslant 0,\end{cases}\tag{1.25}$$

直接采用线性规划求解,可有下面三种形式。

形式一:

$$\max \quad f = u$$