中等专业学校试用教材

工科专业通用

数　学

第一册

人民教育出版社

编者的话

本教材是根据一九七九年教育部审定工科类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》编写的.

本教材共分四册. 第一册、第二册包括代数、三角、立体几何与解析几何;第三册包括微积分与微分方程;第四册包括概率、行列式、矩阵、级数与逻辑代数等内容. 在编写过程中,力求适应四个现代化发展的要求和加强基础知识的需要,并注意了与全日制十年制初中数学教材的衔接. 本教材可供招收初中毕业生工科各专业试用,第三、四册也可供招收高中毕业生工科各专业选用. 带*号的内容可供选学. 附录供学生自学.

本教材是由教育部组织的工科中专数学教材编写组集体编写的. 参加初稿分章编写的有上海机器制造学校任必(第一、二册主编)、上海科技大学分部周桐孙(第一、二册主编)、天津纺织工业学校鲍年增、西北建筑工程学院肖同善、鞍山钢铁工业学校张景华(第三、四册主编)、沈阳黄金专科学校郑宏业(第三册主编)、北京机械学校朱铉道(第四册主编)、北京建筑工程学院范尚志、济南交通学校白孝温、西安航空工业学校卜文兰、成都水力发电学校聂际銮、长征航空工业学校谢迪恭等同志. 根据各地所提意见,有些章节由主编作了较大修改. 最后经北京师范大学钟善基同志审阅.

在编写过程中,曾得到有关单位的大力支持和帮助. 在征求意见的过程中,全国大多数省、市和有关部、委教育部门、部分

中专和大专院校的教师，人民教育出版社有关编辑，以及上海师范大学余元希同志、南京工学院数学教研组提出了许多宝贵意见，在此一并致谢.

由于编者的水平所限，加以编写时间仓促，教材中难免有缺点和错误，恳切期望大家批评指正，以便今后进一步修改提高.

一九七九年十一月

目　　录

第一章　集合与函数

函数是数学中的一个极其重要的基本概念，集合论是现代数学中的一个重要分支. 掌握集合与函数的基础知识，对于继续学好数学具有重要意义. 本章将简要地介绍集合的基本思想和常用符号，并用它来阐述函数的基本概念.

§1-1　集合的概念

一　什么叫集合

无论是在数学中，还是在日常生活里，人们为了抓住一类事物的共同本质，往往要把具有某种共同性质的事物联合在一个整体内加以研究. 这就产生了集合的概念. 例如:

(1) 一个班里所有学生的全体;

(2) 某一图书馆里所有藏书的全体;

(3) 不等式 $x^2-5x+6>0$ 的所有解的全体;

(4) 所有自然数的全体;

(5) 所有三角形的全体;

(6) 抛物线 $y=x^2$ 上所有的点的全体.

上面各个例子中的"全体"都是由具有某种共同性质的一些事物组成的，我们把具有某种共同性质的一些事物组成的全体叫做**集合**，简称**集**. 把组成某一集合的各个事物，叫做这个集合的**元素**. 例如：上面例子中的(1)是由这个班里的全体学生组成的集合，班里每一个学生都是这个集合的元素. (5)是由所有

三角形的全体组成的集合，各种形状的三角形如直角三角形、锐角三角形、钝角三角形等等都是这个集合的元素.

习惯上用大写字母 A、B、C… 等表示集合，而用小写字母 a、b、c…等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"；如果 a 不是集合 A 的元素，就记为 $a\notin A$，读作"a 不属于 A". 集合与其元素的关系是集合包含它的每一元素，它的每一元素也都属于这个集合. 例如：

(1) 设 A 为不等式 $x^2-5x+6>0$ 的所有解的集合*. 解此不等式，得 $x>3$ 或 $x<2$. 也就是说，凡是大于 3 或小于 2 的所有实数都是集合 A 的元素. 如 $4\in A$，$-1\in A$，但 $3\notin A$，$2\notin A$.

(2) 设集合 A 是由大于 6 而小于 10 的一切奇数所组成. 显然，7、9 都是集合 A 的元素，可写为 $7\in A$，$9\in A$，而其他的奇数如 11 等都不是集合 A 的元素，可写为 $11\notin A$ 等.

(3) 设 Q 为有理数的集合. 显然，有理数都是它的元素，如 $\frac{3}{5}\in Q$等，而无理数如$\sqrt{2}$、π 等都不是 Q 的元素，即$\sqrt{2}\notin Q$，$\pi\notin Q$ 等.

今后我们常用N表示自然数的集合，Z 表示整数的集合，Q 表示有理数的集合，R 表示实数的集合，R^+表示正实数的集合，R^-表示负实数的集合.

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的，这就是说，哪些事物是它的元素，哪些事物不是它的元素，总可以根据这个集合的元素所具有的共同性质加以判断. 例如，对于自然数的集合 N，我们根据自然数的共同性质判断出：$2\in N$，而$\sqrt{2}\notin N$，

* 本书所讨论的数集，如无特殊说明，都是指实数集合。

$\frac{1}{2}\notin N$. 又如，对于正整数的集合 Z^+，我们根据正整数的共同性质判断出：$2\in Z^+$，而 $0\notin Z^+$，$-\frac{1}{2}\notin Z^+$.

二　集合的表示法

1. 列举法　把集合的元素一一列举出来，写在{　}内，每个元素仅写一次，不分次序．象这样表示集合的方法，叫做**列举法**.

例如，设 A 表示所有小于 5 的正整数的集合．显然，它的元素是 1, 2, 3, 4．于是 A 可以表示为

$$A=\{1, 2, 3, 4\} \quad 或 \quad A=\{4, 3, 1, 2\} 等;$$

但不能表示为

$$A=\{1, 1, 2, 3, 4\} \quad 或 \quad A=\{4, 4, 1, 1, 2, 3\}.$$

2. 描述法　把集合中元素所具有的共同性质描述出来，写在括号{　}内．象这样表示集合的方法，叫做**描述法**.

例如，(1) 由所有的三角形组成的集合，可以表示为

{三角形};

(2) 由某一图书馆里所有的藏书组成的集合，可以表示为

{某图书馆所有的藏书}.

(3) 不等式 $x^2-5x+6>0$ 的所有解的集合，可以表示为

$$\{x \mid x^2-5x+6>0\}.$$

括号内竖线的左方表示集合所包含的元素的一般形式，竖线的右方表示集合中元素所具有的共同性质.

(4) 由抛物线 $y=x^2$ 上所有的点 (x, y) 组成的集合，可以表示为

$$\{(x, y) \mid y=x^2\}.$$

下面我们再举两个例子来说明集合的表示法:

(1) 设 $A=\{x \mid x^2-4<0,\quad x\in Z\}$，它是由满足不等式 $x^2-4<0$，且属于整数的所有解组成的集合．解此不等式，得 $-2<x<2$．在此范围内的所有整数为 $-1, 0, 1$。所以

$$A=\{x \mid x^2-4<0, x\in Z\}=\{-1, 0, 1\}.$$

(2) 设 $S=\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，它是由平面上满足条件 $0\leqslant x\leqslant 1$ 和 $0\leqslant y\leqslant 1$ 的所有的点 (x, y) 所组成的集合。容易知道，它是一个包含了边界线的正方形，如图 1-1 所示．

集合中所包含的元素的个数为有限时，这样的集合，叫做**有限集合**．例如：某一城市的居民的集合；从 1 到 1000 的自然数的集合等，都是有限集合．

集合中所包含的元素的个数为无限多时，这样的集合，叫做**无限集合**．例如：所有自然数的集合；直线上所有点的集合；平面内所有圆的集合等，都是无限集合．

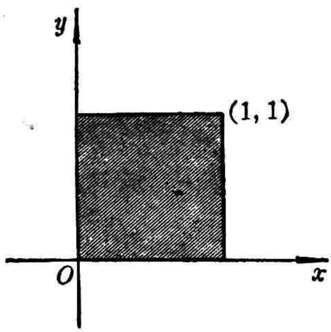


图 1-1

只含一个元素的集合，叫做**单元素集合**，简称**单元素集**．例如：$\{a\}$ 是单元素集．

不含任何元素的集合叫做**空集合**，简称**空集**．记为 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$．

例如：$A=\{x \mid x>1, x<-1\}$ 为空集．因为要同时满足不等式 $x>1$ 和 $x<-1$ 的解是不存在的，即集合 A 不包含任何元素，所以 A 为空集．

空集 $\varnothing$ 与集合 $\{0\}$ 是两个不同的概念，前者指的是不包含任何元素的集合 $\{\ \}$，而后者指的是由一个元素 0 所组成的单元素集，显然它不是空集．

单元素集$\{a\}$与单个元素a是两个不同的概念. 前者指的是由一个元素组成的集合，而后者指的就是这个元素.

习　题　1-1

1. 写出下列各集合的所有元素:

(1) $A=\{$一年中有31天的月份$\}$;

(2) $B=\{$大于3小于21的偶数$\}$;

(3) $C=\{x|3<x<10, x\in Z\}$.

2. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星组成的集合;

(2) 不等式$x^2+5x+6>0$的解的集合;

(3) 所有正偶数的集合.

3. 设集合$U=\{a, b, c\}$，下列写法哪些正确？哪些不正确？为什么？

(1) $a\in U$;

(2) $\{a\}\in U$;

(3) $\varnothing\in U$.

4. 设$A=\{x|x$为一位数的正奇数$\}$，在下列各题中指出哪个是空集，哪个是单元素集:

(1) $B=\{x|x\in A, x>9\}$;

(2) $C=\{x|x\in A, x$是除以3余2的整数$\}$.

5. 设$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{1, 2, 4, 6\}$，写出由A和B所有元素放在一起所组成的集合C.

6. 设$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{2, 4, 6, 8, 1, 3\}$，写出由A和B的所有公共元素所组成的集合C.

7. 指出下面的集合X是由怎样性质的元素所组成的？如果是有限集合，写出它的所有元素；如果是无限集合，用图形把这个集合表示出来:

(1) $X=\{x|-x^2+8x-12>0,\ x\in Z\}$;

(2) $X=\{(x, y)|0\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$.

§1-2 集合与集合的关系

集合与集合的关系，常见的有以下几种:

一 子集

设B表示某校全体学生的集合，A表示该校全体男生的集合．容易看出，集合A的任一元素(该校男生)都是集合B的元素(该校学生)．也就是说，集合B包含了集合A的所有元素．对于集合间的这种关系，我们给出下面的定义:

设A和B是两个集合，如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，那末集合A叫做集合B的**子集**，记为

$$A\subseteq B \quad \text{或} \quad B\supseteq A.$$

读作"A包含于B"或"B包含A"．

例如:（1）设A表示平面上所有等边三角形的集合，即

$$A=\{\text{等边三角形}\},$$

B表示平面上所有三角形的集合，即

$$B=\{\text{三角形}\}.$$

显然，$A\subseteq B$，即A为B的子集．

（2）设M表示偶数的集合，即

$$M=\{x\,|\,x=2n,\ n\in N\},$$

N表示自然数的集合．显然，$M\subseteq N$，即M是N的子集．

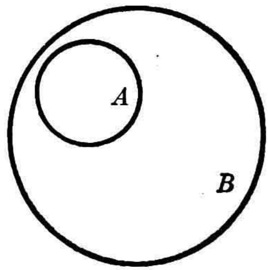


图 1-2

（3）设$A=\{\text{整式}\}$，$B=\{\text{有理式}\}$．显然，$A\subseteq B$，即A为B的子集．

为了直观起见，我们通常还用圆(或任何封闭曲线围成的图形)表示一个集合，而用圆中的点表示该集合的元素．图 1-2 表示了集合A与B之间的关系：$A\subseteq B$或$B\supseteq A$．

对于任何一个集合 B，因为它的每一个元素都是集合 B 的元素，所以 $B\subseteq B$，也就是说任何一个集合是它本身的子集. 由于空集是不包含任何元素的集合，所以也可以认为空集是任何集合 B 的子集，即 $\varnothing\subseteq B$.

例1 设集合 $S=\{0,1,2\}$，写出 S 的所有的子集.

解 集合 S 的所有子集是

$$\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}.$$

在某一集合 B 的所有子集中，它本身和空集是它的两个特殊的子集，除这两个子集外，集合 B 的其他子集都叫做 B 的**真子集**. 如果 A 为 B 的真子集，则记为：$A\subset B$，或 $B\supset A$.

例如，上例中的 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$ 和 $\{1,2\}$ 六个子集，都是 S 的真子集，而 $\varnothing$ 和 S 则不是它的真子集.

容易知道，如果集合 A 是集合 B 的子集，A 又不是空集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那末 A 必为 B 的真子集.

对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那末，集合 A 和集合 B，就叫做相等. 并记为

$$A=B.$$

例2 设 $A=\{x\mid x^2+3x+2<0\}$，$B=\{x\mid -2<x<-1\}$，证明 $A=B$.

证 满足条件 $x^2+3x+2<0$ 的所有解为 $-2<x<-1$，即 $A=\{x\mid -2<x<-1\}$. 因而 A 与 B 的元素完全相同，所以 $A=B$.

二 交集

设集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{c,b,d,f\}$，把同时属于 A 和 B 的所有元素组成一个集合 $C=\{b,c,d\}$. 对于这样的集合，我们给出下面的定义：

设 A 和 B 是两个集合，把同时属于 A 和 B 的所有元素所组

成的集合叫做 A 与 B 的**交集**，记为：$A\cap B$（读作"A 交 B"），即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

上面例子中的集合 C 就叫做集合 A 和 B 的交集，可记为

$$C=A\cap B.$$

集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$，可用图 1-3 的阴影部分表示.

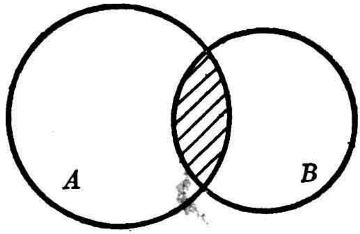


图 1-3

例 3 设 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$. 求 $A\cap B$.

解 $A\cap B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}\cap\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 4\}=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，如图 1-4 所示。

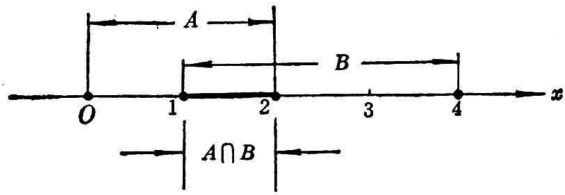


图 1-4

例 4 设 A 为平面上所有矩形的集合，B 为平面上所有菱形的集合，求 $A\cap B$.

解 $\because$ $A=\{$矩形$\}$，$B=\{$菱形$\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}$

$=\{$正方形$\}$.

例 5 设 $A=\{x \mid x=2n,\ n\in N\}$，$B=\{x \mid x=2n+1,\ n\in N\}$，求 $A\cap B$.

解 集合 A 表示所有的偶数，集合 B 表示所有的奇数，因此集合 A 与 B 的交集是空集，即

$$A\cap B=\varnothing.$$

一般地，如果$A\cap B=\varnothing$，就说A与B不相交，集合A与B不相交的关系如图 1-5 所示.

对于任何集合A，显然下式成立

$$A\cap\varnothing=\varnothing;$$

$$A\cap A=A.$$

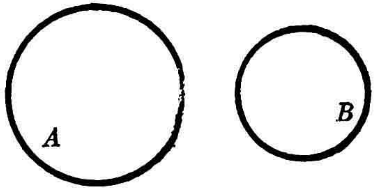


图 1-5

三 并集

设集合$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{c, b, d, f\}$. 把A和B两个集合的元素合并起来(相同元素只取一个)可以组成一个集合$C=\{a, b, c, d, e, f\}$. 也就是集合C是属于A或者属于B的所有元素所组成的. 对于这样的集合，我们给出下面的定义:

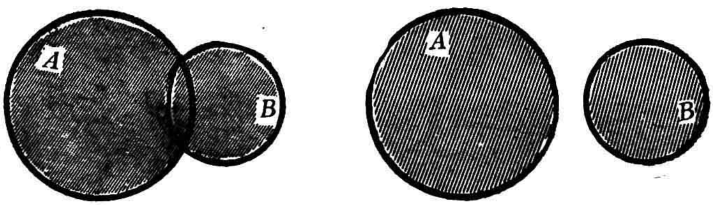
设A和B是两个集合，把属于A或者属于B的所有元素所组成的集合叫做A与B的**并集**. 记为:$A\cup B$(读作"A并B")，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

上面例子中的集合C，就叫做集合A和B的并集. 可记为

$$C=A\cup B.$$

集合A与B的并集$A\cup B$可用图 1-6(a)或(b)的阴影部分表示.



(a) (b)

图 1-6

例 6 设$A=\{1, 2\}$，$B=\{-1, 0, 1\}$，$C=\{-2, 0, 2\}$. 求:

(1) $A\cup B$; (2) $B\cup C$; (3) $(A\cup B)\cup C$; (4) $A\cup(B\cup C)$.

解 (1) $A\cup B=\{1,2\}\cup\{-1,0,1\}$

$=\{-1,0,1,2\}$;

(2) $B\cup C=\{-1,0,1\}\cup\{-2,0,2\}$

$=\{-2,-1,0,1,2\}$;

(3) $(A\cup B)\cup C=\{-1,0,1,2\}\cup\{-2,0,2\}$

$=\{-2,-1,0,1,2\}$;

(4) $A\cup(B\cup C)=\{1,2\}\cup\{-2,-1,0,1,2\}$

$=\{-2,-1,0,1,2\}$.

例7 设 $A=\{x$ 为 12 的正因子$\}$,

$B=\{x$ 为 18 的正因子$\}$,

$C=\{x$ 为不大于 5 的自然数$\}$.

求: (1) $A\cap B\cap C$; (2) $A\cup B\cup C$; 并用图形表示.

解 $\because$ $A=\{1,2,3,4,6,12\}$,

$B=\{1,2,3,6,9,18\}$,

$C=\{1,2,3,4,5\}$.

$\therefore$ (1) $A\cap B\cap C=\{1,2,3\}$, 如图 1-7 所示;

(2) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,9,12,18\}$, 如图 1-8 所示.

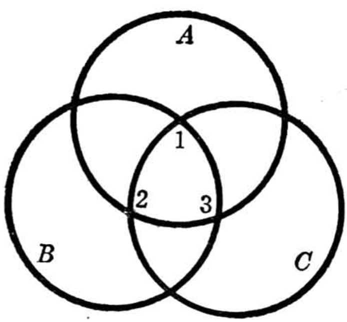


图 1-7

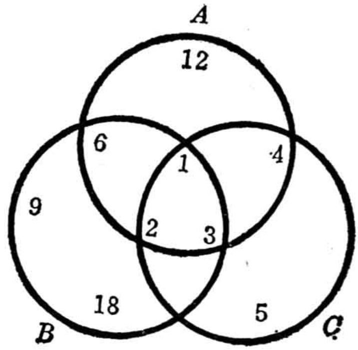


图 1-8

例 8 写出不等式$|x-2|<1$的解集.

解 不等式$|x-2|<1$的解集是

$$\{x|x-2<1, 且\ x-2\geqslant 0\}\cup\{x|x-2>-1, 且\ x-2<0\}$$
$$=\{x|x<3, 且\ x-2\geqslant 0\}\cup\{x|x>1, 且\ x-2<0\}$$
$$=\{x|2\leqslant x<3\}\cup\{x|1<x<2\}$$
$$=\{x|1<x<3\}.$$

例 9 设$A\supset B\supset C$, 求(1) $A\cup B$; (2) $A\cap C$;

(3) $A\cup B\cup C$; (4) $A\cap B\cap C$.

解 由图 1-9 可知

(1) $A\cup B=A$;

(2) $A\cap C=C$;

(3) $A\cup B\cup C=A$;

(4) $A\cap B\cap C=C$.

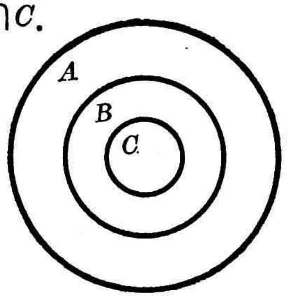


图 1-9

四 差集和补集

设$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 7\}$. 把属于集合A而不属于集合B的所有元素组成一个集合$C=\{1, 2\}$. 对于这样的集合, 我们给出下面的定义:

设A和B是两个集合, 把属于A而不属于B的所有元素组成的集合, 叫做A和B的**差集**. 记为: $A-B$ 或 $A\backslash B$(读作"A减B"), 即

$$A\backslash B=\{x|x\in A, x\notin B\}.$$

上面例子中的集合C就叫做集合A和B的差集, 可记为:

$$C=A\backslash B.$$

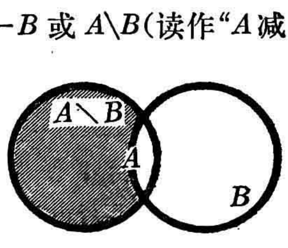


图 1-10

集合A和B的差集$A\backslash B$可用图 1-10 的阴影部分表示.

例 10 设Z表示整数集, Q^+表示正有理数集. 求$Z\backslash Q^+$.

解 Z 和 Q^+ 的差集 $Z\backslash Q^+$ 是由所有负整数与零组成的集合，即

$$\begin{aligned} Z\backslash Q^+ &= Z^- \cup \{0\} \\ &= \{x \mid x \leqslant 0, x \in Z\}. \end{aligned}$$

例 11 设 $A=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$，$B=\{x \mid 1 < x \leqslant 3\}$．求 $A\backslash B$.

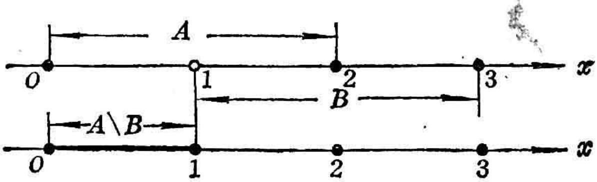


图 1-11

解 如图 1-11 所示，可知

$$A\backslash B=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常都是某个给定集合的子集，这个给定的集合叫做**全集**，用符号 Ω 表示．也就是说，全集包含了我们此时所研究的各个集合的全部元素.

例如：(1) 在研究一些整数组成的集合之间的关系时，通常都以所有整数组成的集合作为全集．即 $\Omega=Z$.

(2) 在研究平面上的点的集合之间的关系时，往往取平面上所有点的集合作为全集．即 $\Omega=\{(x, y)\}$.

下面我们给出补集的定义：

设 Ω 为全集，A 为 Ω 的子集即 $A \subseteq \Omega$，由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的**补集**．记为 $\bar{A}$（读作“A 补”），即

$$\bar{A}=\{x \mid x \notin A, x \in \Omega\}.$$

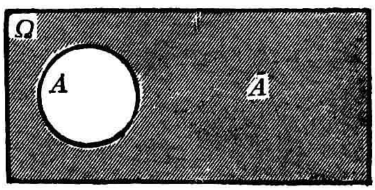


图 1-12

在图 1-12 中，长方形表示全集 Ω，圆表示它的子集 A，长方形