高中代数
百题多解法

广西教育出版社

高中代数百题多解法

周泳港　王犁平　编著

广西教育出版社

高中代数百题多解法

周泳港　王犁平　编著

☆

广西教育出版社出版

（南宁市民族大道7号）

广西新华书店发行　广西大学印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　6.125印张　134千字

1989年5月第1版　1991年7月第3次印刷

印　数：18,501—27,800册

ISBN 7-5435-0496-0/G·412　定价：1.90元

前　言

为了帮助中学生及自学青年学好中学代数知识，沟通中学数学各科之间的联系，开拓思路，提高灵活运用不同知识去分析问题和解决问题的能力；为了给中学数学教师教学和指导学生复习提供参考资料，我们依据现行课本，按照中学数学教学大纲的要求，结合多年的教学经验，于1985年选编了《中学代数百题多解法》，受到广大读者的欢迎．为了适应不同程度读者的需要，现将该书重新改编，把属于初中部分的内容另编入《初中代数百题多解法》，同时精选新的题目，作为《高中代数百题多解法》一书奉献给读者．

本书着眼于高中代数各部分内容中常用的、典型的解题方法，以及常用的、基本的解题技巧．每道题均采用不同的方法或在技巧上具有特点，至于实质一样而仅在形式上稍加变动的情况，一般就不作为不同解法加以介绍，总之，不为“多解”而多解．另外，书中的选择题，都是单项选择题．

为了帮助读者加深理解，在每种解法前有分析，其作用为描述得出最终解答所经过的主要步骤，并力图阐明采取这些步骤的动机和想法．每一道题后有简评，指出各种解法的优劣和关键之处，并总结一般的解题规律．

希望读者参照本书介绍的方法，在学习过程中，经常进行分析，养成探索不同方法解题的习惯，然后加以对比、小结，得出自己的体会，从而提高解题能力．

由于水平所限，错误难免，不当之处敬祈指正．

编著者

目　录

一、集　合

1．下面各式中，正确的是(　　)

(A) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A\cup B}$；$(B)$ $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

(C) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{A\cap B}$；$(D)$ $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$.

分析1　由于各选择支左端均为$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$，不妨设出所有各类型的元素，针对该式集合运算的要求推出正确的结果，就可以进行判断选择.

解法1　设a、b、c、d为元素，且：

$a\in A$但$a\notin B$；$b\in B$但$b\notin A$；

$c\in A$且$c\in B$；$d\notin A$且$d\notin B$.

此时有：$b,d\in\overline{A}$，而$a,c\notin\overline{A}$，

$a,d\in\overline{B}$，而$b,c\notin\overline{B}$，

∴　$a,b,d\in\overline{A}\cup\overline{B}$，而$c\notin\overline{A}\cup\overline{B}$，

因而$a,b,d\notin\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$，而$c\in\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$.

但$c\in A$且$c\in B$，即$c\in A\cap B$，

∴　$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$.

故应选择答案(D).

分析2　不妨用文氏图进行集合的运算.

解法2　$\overline{A}$可表为图1中的阴影部分；

$\overline{B}$可表为图2中的阴影部分；

$\overline{A}\cup\overline{B}$可表为图3中的阴影部分；

$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$可表为图 4 中的阴影部分。

显然$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=A\cap B$。

∴ 选择答案(D)。

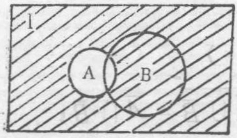

图1

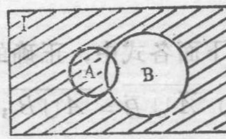

图2

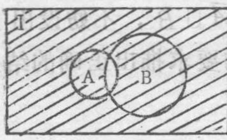

图3

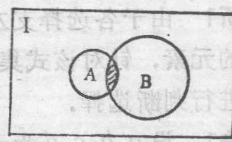

图4

简评 两种解法都是基本的方法，注意解法 1 元素推理的方法中要设出所有各类元素的全部，这是保证推算结论正确的关键，解法2的文氏图是解集合问题的有力的工具，有直观及易于掌握的优点．当集合的运算层次较多时，所给出的分步式表达的方法，值得借鉴．

2．数集$X=\{(2n+1)\pi, n$是整数$\}$与$Y=\{(4k\pm1)\pi$, k是整数$\}$之间的关系是(　　)

(A) $X\subset Y$；(B) $X\supset Y$；(C) $X=Y$；

(D) $X\neq Y$。

分析1 从已知数集Y中选择k的一些特殊值入手，从而得到正确的判断．

解法1 令$k=0,1,2,3$，得$(4k\pm1)\pi$分别为$-\pi,\pi$；3π,

5π；$7\pi, 9\pi$；$11\pi, 13\pi$．与数集X进行比较，推知$X=Y$，故选择答案(C)．

分析2 利用已知数集Y，对奇数 $2n+1$ 的变形进行论证．

解法2 令$n=2m$ $(m\in Z)$，

则 $(2n+1)\pi=(4m+1)\pi$．

令 $n=2m-1$，则$(2n+1)\pi=(4m-1)\pi$．

$\therefore$ $X=Y$．选择答案(C)．

分析3 从命题的答案的等价性进行分析判断．

解法3 如果$X\subset Y$，则$X\neq Y$．

$\therefore$ 如果$X\subset Y$正确，则$X\neq Y$也正确，这是不可能的．因此(A)是错误的．

同理，(B)也是错误的．

由题设可得$X\supseteq Y$，现知$X\not\supset Y$，故有 $X=Y$．

$\therefore$ 正确答案为(C)．

简评 解法1虽然不严密，但也可以进行判断，这种特殊值验算的方法是解选择题常用的有效方法之一，解法3是排除法，其逻辑推理不仅在题设与结论——各选择支中进行，而且可在选择支彼此之间进行，这也是解选择题的常用方法之一，解法2思路较自然，论证也较为严密．

3．某校先后举行数理化三科竞赛，学生中至少参加一科的：数学807人，物理739人，化学437人；至少参加两科的：数学、物理593人，数学、化学371人，物理、化学267人；三科都参加的213人．试求出参加竞赛的学生总人数．

分析1 因为仅参加单科的人数未给出，故可设字母表示此未知数．

解法1 设仅参加数学竞赛的有 x 人，因参加数学、物理的593人，参加数学、化学的371人，故应有 $x+593+371$ 人参加数学竞赛，但其中三科都参加的有213人，应予减掉，从而得到至少参加数学一科的807人.

$\therefore \quad x+593+371-213=807$，

即 $\quad x=56$。

同理，设仅参加物理的有 y 人，

则 $\quad y+593+267-213=739$

$\therefore \quad y=92$。

设仅参加单科化学的有 z 人，

则 $\quad z+371+267-213=437$，

$\therefore \quad z=12$。

故总人数为 $56+92+12+593+371+267-2\times213$

$\quad =965$（人）。

答：参加竞赛学生总人数为965人.

注 求总人数时，至少两科参加的人数相加，则三科都参加的人数重复了两次，此处应加以注意。

分析2 应用集合观点解.当计算两个集合元素个数的和的时候，显然由于重复出现元素只能作一个元素计算，所以应减去它们交集元素的个数.

解法2 以 A、B、C 分别表示参加数学、物理、化学每一科竞赛的学生的集合，AB 表示参加数学、物理竞赛学生的集合，$n(A)$ 表示至少参加数学竞赛的人数，其余类推.

则参加竞赛的学生总数为：

$$n(A)+n(B)+n(C)-n(AB)-n(BC)-n(CA)+n(ABC)$$

$$=807+739+437-593-371-267+213$$

$= 965$(人)。

答：(略)

分析3　用集合图示法表示参加竞赛学生人数情形，然后分类进行计算。

解法3　如图5，用三个圆表示参加数学、物理、化学各科竞赛的学生集合。

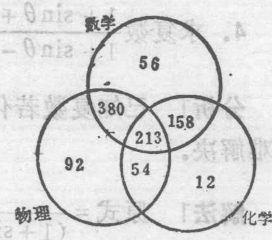

图 5

∵　三圆公共部分为参加三科竞赛的人数，即213人。

∴　仅参加数学、物理两科人数为$593-213=380$(人)；

仅参加数学、化学两科人数为$371-213=158$(人)；

仅参加物理、化学两科人数为$267-213=54$(人)；

∴　仅参加数学一科的人数为$807-380-213-158$

$=56$(人)，

仅参加物理一科的人数为$739-380-213-54$

$=92$(人)，

仅参加化学一科的人数为$437-158-213-54$

$=12$(人)，

∴　总人数为$56+380+213+158+92+54+12$

$=965$(人)。

简评　三种解法各有特点。解法1较简捷，解法2、3应用集合知识，有一定的参考价值，特别是解法3用图示法直观地揭示各类数量的关系，清楚明白，值得效法。

二、复　数

4. 求复数$\dfrac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}$的模与幅角.

分析1　已知复数若化为复数的三角式的标准式，则所求不难解决.

解法1　原式$=\dfrac{(1+\sin\theta+i\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta-i\cos\theta)(1+\sin\theta+i\cos\theta)}$

$$=\frac{(1+\sin\theta)^2+2i(1+\sin\theta)\cos\theta-\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)+2i(1+\sin\theta)\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}$$

$$=\sin\theta+i\cos\theta$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

∴　模为1，幅角为$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\theta$（$k$为整数）.

分析2　原复数化为复数三角式的标准式时，也可考虑运用二倍角公式消去分子分母的1.

解法2　原式$=\dfrac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)}$

$$=\frac{1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-1+2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-1+2i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+i\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

$\therefore$ 模为1，幅角为 $2k\pi+\frac{\pi}{2}-\theta$（$k$为整数）.

简评 解法1实用可靠，通常都能得到满意的结果，是优先考虑的方法．解法2有一定的技巧性，消去原式中的1，有时会对解题起决定性的作用，值得注意．

5．已知ω是1的立方根的虚根，求

$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$.

分析1 如果把原式化简或把1的立方根虚根直接代入原式，都较繁而不可取．故考虑利用ω所特有的性质．

解法1 $\because$ ω是1的立方根虚根，

$\therefore$ $\omega^3=1$，．即$\omega^3-1=0$.

从而 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$.

但$\omega \neq 1$ $\therefore \omega^2+\omega+1=0$。

原式$=(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega\omega^3)(1-\omega\omega^3+\omega^2\omega^6)$

$\cdot(1-\omega^2\omega^6+\omega\omega^{15})$

$=(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega)(1-\omega+\omega^2)$

$\cdot(1-\omega^2+\omega)$

$=(1+\omega+\omega^2-2\omega)^2(1+\omega+\omega^2-2\omega^2)^2$

$=4\omega^2\cdot 4\omega^4$

$=16$。

分析2 原式与乘法公式中立方和公式有关联，可利用这一点求出ω 的幂。

解法2 原式$=\dfrac{\omega^3+1}{\omega+1}\cdot\dfrac{\omega^6+1}{\omega^2+1}\cdot\dfrac{\omega^{12}+1}{\omega^4+1}\cdot\dfrac{\omega^{24}+1}{\omega^8+1}$

$$=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\omega^2+1}\cdot\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\omega^2+1}$$

$$=\left(\frac{2}{1+\omega+\omega^2-\omega^2}\right)^2\left(\frac{2}{1+\omega+\omega^2+\omega}\right)^2$$

$$=\frac{4}{\omega^4}\cdot\frac{4}{\omega^2}$$

$$=16。$$

注 本题可推广到$2n$个因式，即求$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)\cdots(1-\omega^n+\omega^{2n})$，解法类同，结果为$2^{2n}$.

简评 1的立方虚根ω的性质，是复数运算常用的性质。两种解法都是应用$\omega^3=1$，而不是应用$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$，这是关键之处。解法二结合运用乘法公式，更为简捷。

6. 设$z\notin R$，$\dfrac{z}{1+z^2}\in R$. 求证：$|z|=1$.

分析1 考虑到已知条件$\dfrac{z}{1+z^2}$为实数这一特点，可设方程为实系数方程，由于虚根成对，应用韦达定理可以探求证题途径.

证法1 设$\dfrac{z}{1+z^2}=a\ (a\in R$, 且$a\neq 0)$.

则有 $z^2-\dfrac{1}{a}z+1=0$.

设z_1、z_2为该方程的两个根.

$\because\ z_1=\bar{z}_2$, $\therefore\ |z_1|^2=|z_2|^2$,

又 $z_1\cdot z_2=1$, 故 $\bar{z}_1\cdot z_1=z_2\cdot\bar{z}_2=|z_1|^2=|z_2|^2=1$,

$\therefore\ |z|=1$.

分析2 由于实数的共轭复数仍是这个实数，利用这一关系建立复数方程.

证法2 设$\dfrac{z}{1+z^2}=a\ (a\in R$, 且$a\neq 0)$.

则有 $\bar{a}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$. 但$a=\bar{a}$,

$\therefore\ \dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$,

即 $z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2)$,

$z+\bar{z}(z\cdot\bar{z})=\bar{z}+z(z\cdot\bar{z})$.

但 $z\cdot\bar{z}=|z|^2$,

$\therefore\ z+\bar{z}\cdot|z|^2=\bar{z}+z\cdot|z|^2$,

$(\bar{z}-z)(1-|z|^2)=0$,

而　$\bar{z}-z\notin R$，$\therefore |z|^2=1$，

即　$|z|=1$。

分析3　因为实数的倒数仍为实数，故可对已知条件进行变换化简．

证法3　$\because \quad \dfrac{z}{1+z^2}\in R$，

$\therefore \quad \dfrac{1+z^2}{z}\in R$，即 $z+\dfrac{1}{z}\in R$。

从而 z 与 $\dfrac{1}{z}$ 必共轭，

$\therefore \quad \bar{z}=\dfrac{1}{z}$，即 $\bar{z}\cdot z=1$，

但　$|z|^2=\bar{z}\cdot z$，$\therefore |z|=1$。

简评　设出复数的代数式及三角式以后，代入已知条件化简求证，肯定也能够证明，但是这两种方法都较繁而不可取，现在的三种证法都应用复数性质去证，技巧性较强，尤以证法 3 最佳。

7．若 $z_1, \bar{z}_2\in C$（复数集），求证 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2\in R$。

分析1　复数 $u\in R$ 的充要条件是 $u=\bar{u}$，这是复数集合中实数元素的特征，是判断一个复数是实数的准则之一，可根据此原理对求证的式子进行运算．

证法1　设 $w=z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2$，则

$$\overline{w}=\overline{z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2}=\overline{z_1\cdot\bar{z}_2}+\overline{\bar{z}_1\cdot z_2}$$

$$=\bar{z}_1z_2+z_1\cdot\bar{z}_2=w,$$

$\therefore \quad w\in R$，命题得证．

分析2 利用加减项的恒等变形，注意到共轭复数的性质：$u\cdot\bar{u}=|u|^2\in R$，转化到实数运算形式上去。

证法2 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)-z_1\cdot\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2$$

$$=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}-|z_1|^2-|z_2|^2$$

$$=|z_1+z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2,$$

可见 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2\in R$.

分析3 $u_1=\bar{u}_2$的充要条件是$\arg u_1=\arg u_2$，且它们的模相等，故可运用辐角的运算法则去进行证明.

证法3 设z_1、z_2的辐角分别是$\arg z_1$、$\arg z_2$，则$\bar{z}_1$、$\bar{z}_2$的辐角分别是$-\arg z_1$、$-\arg_2$.

$\therefore$ $\arg(z_1\cdot\bar{z}_2)=\arg z_1-\arg z_2$,

$\arg(\bar{z}_1\cdot z_2)=\arg z_2-\arg z_1$,

$\arg(z_1\cdot\bar{z}_2)=-\arg(\bar{z}_1\cdot z_2)$.

显然$|z_1\bar{z}_2|=|\bar{z}_1\cdot z_2|$,

$\therefore$ $z_1\cdot\bar{z}_2$与$\bar{z}_1\cdot z_2$是共轭复数.

故 $z_1\cdot\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2\in R$.

注 如果设出z_1，z_2的代数式或三角式，对前者分离实部、虚部，对后者用棣莫弗定理化简，可以得到两种证明方法. 读者不妨一试.

简评 有关复数的问题，除了“注”中所述的基本方法之外，应该从多方面的角度去考虑. 所给的三种证明方法不受基本方法的束缚，灵巧地利用各种性质，思路开拓，是值得借鉴的方法.

8. 在复数范围内解方程 $x^4+1=0$，并且证明方程的根在复平面内表示的点是一个正方形的顶点.

分析1 把原方程在无理数范围内分解因式，达到降次的目的，然后再利用求根公式。

解法1 由 $x^4+1=0$，得 $x^4+2x^2+1-2x^2=0$，

即 $(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2=0$，

$(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)=0$。

由 $x^2-\sqrt{2}\,x+1=0$，

得 $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，$x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$。

由 $x^2+\sqrt{2}\,x+1=0$，

得 $x_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$，$x_4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$。

如图6，设x_1、x_2、x_3、x_4在复平面内表示的点为M_1、M_2、M_3、M_4。

$\because$ $|x_1|=|x_2|=|x_3|$

$=|x_4|=1$，

$\therefore$ M_1、M_2、M_3、M_4均在单位圆上。

又 M_1、M_2的横坐标相等，

故M_1M_2平行y轴。

同理 M_3M_4平行y轴。

$\therefore$ $M_1M_2 /\!/ M_3M_4 /\!/ y$轴。

同理 $M_1M_4 /\!/ M_2M_3 /\!/ x$轴。

而 $|M_1M_2|=|M_1M_4|=\sqrt{2}$，

$\therefore$ $M_1M_2M_3M_4$为正方形。

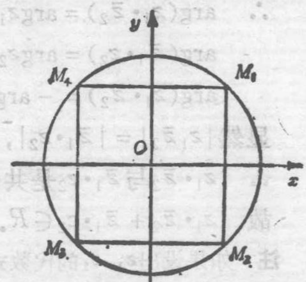

图 6

分析2 因为原方程形如二项方程 $x^n+a=0$，故可化为复数三角式进行开方运算。

解法2 由$x^4+1=0$，得