初等数学思维方法指导与训练

江高文 主编

华中师范大学出版社

初等数学思维方法指导与训练

主　编：江高文
副主编：吴万辉、梁伟俊
　　　　李成仁、那克诚
编　委：王天硕、何振威
　　　　李永和、傅廷占
　　　　杨殿国、卢典章
　　　　张忠尧

华中师范大学出版社

初等数学思维方法指导与训练

江高文 主编

*

华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山）
新华书店湖北发行所经销
华中师范大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张 7.25 字数 174 千字
1991年 6 月第 1 版 1991年 6 月第 1 次印刷
ISBN 7-5622-0684-8/G·226
印数 1—13 000 定价3.00元

说　明

编写这本书的主要目的是，激发学生学习数学的兴趣，发展学生智力，提高学生的思维能力。它通过具体而典型的实例向读者展示了各种新颖、巧妙、有趣的数学思维方法和解题技巧。读者不仅可以从中享受到学习数学的乐趣，而且可以从中领悟到数学知识的真谛，掌握到丰富多彩的数学思维方法和解题技巧，从而使自己分析和解决数学问题的能力切实得到提高。

此书可作为高中生、中师生和师范院校数学系学生的课外读物，也可作为中学数学教师和教研人员的参考资料。

限于水平，书中不足之处在所难免，望广大读者热情指正。

编　者

1990年 9 月

目　录

序　数学思维方法概述

分析与综合是最基本的思维方法，它是抽象、概括、比较、分类、系统化、具体化、演绎、归纳、类比、联想等数学思维方法的基础，而且贯穿于所有的数学思维活动之中.

分析就是将被研究的对象的整体分为若干个部分、方面、因素和层次，并分别加以考察的认识活动. 综合与分析的过程相反，它是把研究对象的各个部分联系起来加以研究，从而在整体上把握事物的本质和规律的一种思维方法.

分析是将未知的东西归结为已知的东西，而综合则是将已知的东西推广到未知的领域. 分析与综合的辩证运动交替进行，构成了数学思维的发展过程.

比较是认识对象间的相同点或相异点的思维方法. 实际上，比较可以看成是应用综合法进行的分析，以致得到某一种概括或新的综合，它是借助于分析的方法对事物进行的综合研究.

抽象是从复杂的事物中，单纯地抽取某种特性加以认识的思维方法，它是使感性认识跃进到理性认识的重要手段. 数学观念的形成也有一个逐级抽象的过程，即从具体的解题方法和技巧，抽象为解题规律，进而形成一般的解题方法和解题思想，即数学观念.

概括是从个别推到一般的思维方法. 抽象与概括是不可分割的统一过程，在进行概括时，总要略去个别事物中的某些特性，否则就不能突出事物的共同性质. 因而，抽象是概括的前提和基础，没有抽象就无从概括；另一方面，概括又

是抽象的目的，没有概括，抽象也就失去了意义.

和抽象——概括的方向相反，具体化是从抽象到具体，一般到特殊的思维方法. 具体化方法，一方面可以使抽象的认识得到丰富和深化，另一方面，又可以将抽象——概括中得到的结论运用到具体问题中去.

演绎推理是从一般到特殊的推理，它按照严格的逻辑规则进行，带有形式化的特点. 它可以根据命题间的逻辑结构和推理规则，在内容极不相同的领域内进行相同形式的推理. 演绎推理是必然性推理，也就是说，只要推理的前提是正确的，推理的形式又没有错误，则由演绎推理得到的结论也是正确无疑的. 因此，演绎推理可以为数学问题提供逻辑的证明，也可以用它来揭示出蕴含在已知判断中的隐藏信息，揭示出事物间的内部联系.

演绎在数学思维中占据着主导地位，它是构成数学思维，使数学思维具有严谨的逻辑性，使数学结论具有严格的确定性的主要因素.

系统化是对研究材料的合理重建，这是把材料按照一定的顺序纳入一定体系的思维方法. 系统化是与比较、分类、抽象、概括、具体化等思维方法密切联系的，只有通过上述方法弄清了各种材料的联系和关系，才能把它们构成一个统一的整体.

观察与实验是人们有目的、有计划地利用感官去认识自然界中各种现象的活动，它们是获得科学事实和经验知识的重要方法. 尽管观察和实验并不是一种思维方法，但是，它们和思维又有着密切的联系，而且在数学解题活动中具有重要的作用. 解题时通过观察，收集必要的信息，形成广泛的联想，为思维活动奠定基础.

归纳是从多个个别事实中推演出一般结论的逻辑思维方法．它的一般模式是：

S_1 具有（或不具有）P，

S_2 具有（或不具有）P，

……………………………

S_n 具有（或不具有）P，

（S_1、S_2、…、S_n 是 A 类事物的对象）所以，A 类事物具有（或不具有）P．

和内推性的演绎推理不同，归纳推理是外推性推理，它的结论一般都在前提所断定的集合之外，因此，归纳推理是一种或然性推理，即归纳的结果既有正确的可能，也有错误的可能．所以，在数学中归纳推理并不是证明的手段，它的主要作用在于整理观察材料和提出猜想，它是进行概括的手段．

类比是根据两个（或两类）对象之间某些方面的相似或相同，从而推出它们在其他方面也可能相似或相同的一种逻辑推理方法．类比推理是从个别到个别，或者从一般到一般的推理，它的模式是：

A 类事物具有性质 a、b、c、d，

B 类事物具有性质 a、b、c，

所以，B 类事物可能具有性质 d．

类比推理的规则在所有的逻辑推理中是最不严格、最不确定的．这固然使类比推理的可靠性下降，但同时又赋予它更大的创造性，使它成为数学发现的重要武器．类比在数学思维中的主要作用表现为发现问题、提出猜想、建立模拟．

作为直觉思维的两种重要方法，联想与猜想在数学发现过程中有着广泛的应用，并发挥着重要的作用．

联想是由一个事物想到与其相关联的另一个事物的思维

过程，是一种由此及彼的思维方法．数学活动中常见的联想有逆向联想、定向联想、类比联想、类似联想、形数联想等等．联想的关键在于认识事物间的联系，它比类比更灵活，具有更多的直觉成分，因而更具有创造性．

猜想可以看成是直觉思维的结果．猜想在发现的过程中构成了逻辑分析的支点，为逻辑分析的活动提供了动力（依托），并规划了方向，成为逻辑分析得以展开的基础．

一般化是从考虑一个对象过渡到考虑包含该对象的一个集合，或者从考虑一个较小的集合过渡到考虑一个包含该较小集合的更大集合的思维方法．不完全归纳法可以看成是一般化方法的一种．一般化是一种重要的外推方法，它是提出数学问题的重要方法．对于某些复杂的问题，通过一般化，有助于突出问题中的本质因素，使我们更容易看清实质，从而获得解题途径．

特殊化是从对象的一个给定集合，转而考虑含于这个集合内的较小集合的思维方法．特殊化可以帮助我们寻求一般问题的解法．在数学发现活动中，特殊化起着揭示信息的作用，通过对特例的考察，进行归纳，提出猜想，再利用特例来验证或否定猜想，进而证明或修正结论．这是数学发现活动中常见的程序．一般化、特殊化和类比协同作用，是解决数学问题的重要方法．特殊化、一般化是寻找类比模型的有效手段．

数学思维活动的最高表现是探索创造活动，探索是人类思维中最活泼、最生动、最富魅力的活动．在数学探索活动中要综合地使用各种思维方法，如分析、综合、一般化、特殊化、归纳、类比、联想、演绎等等．

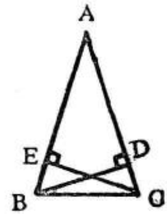
在本书中，我们将通过对具体、典型实例的分析来展示丰富多彩的数学思维方法．

第一章　异想天开

异常巧妙的构想加上科学合理的探求常常使云天顿开．我们在研究数学问题时，如果敢于标新立异，打破常规，勇于探索，那么往往能开辟一条新颖、简捷的途径．

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，D、E 是垂足（图1-1）．求证：$BD=CE$．

分析　BD、CE 分别是 AC、AB 边上的高，而全等三角形对应边上的高相等．能不能将 AC、AB 看成是两个全等三角形的对应边呢？回答是肯定的，这只需将 $\triangle ABC$ 看成是两个重合的三角形即可．



（图1-1）

证明　在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACB$ 中，AC 和 AB 是对应边，且 $\triangle ABC\cong\triangle ACB$．

$\therefore$　$BD=CE$（全等三角形对应边上的高相等）．

例 2　解关于 x 的方程

$$x^4-2ax^2-x+a^2-a=0\qquad\left(a\geqslant\frac{3}{4}\right).$$

分析　这个方程实际上就是 a 与 x 的一个关系式，解这个方程的目的就是要用含 a 的代数式来表示出 x．这就需要将已知关系式（即已知方程）简化，为此，我们可以将已知方程看成是关于 a 的一元二次方程，直接利用求根公式，就可达到化简目的．

解 把方程改写成

$$a^2-(2x^2+1)a+(x^4-x)=0$$

根据求根公式可求得

$$a=\frac{(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2}.$$

由 $a=\dfrac{(2x^2+1)+(2x+1)}{2}=x^2+x+1$

解得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$$

由 $a=\dfrac{(2x^2+1)-(2x+1)}{2}=x^2-x$

解得

$$x=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$$

故原方程的解集为

$$\left\{\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}\right\}$$

例3 化简：$3+5+7+\cdots+(2n+1)$，$n\in N$.

分析 能不能将和式中的每一项 $a_k=2k+1\ (k\in N)$ 都变成两项之差 $b_{k+1}-b_k$，以便达到消项化简的目的呢？我们不妨探索一下.

解 $\because\ 2k+1=[(k+1)+k]\cdot1$

$$=[(k+1)+k][(k+1)-k]$$

$$=(k+1)^2-k^2,\ (k\in N).$$

$\therefore$ 原式 $=(2^2-1)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+\cdots$

$$+[(n+1)^2-n^2]$$

$$=(n+1)^2-1$$

$$=n^2+2n.$$

例 4 设 $0<x<1$，$a>0$ 且 $a\neq1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

分析 这里要比较的是两个数 [即 $\log_a(1-x)$ 与 $\log_a(1+x)$] 的绝对值的大小，注意到这两个数异号，而其和的符号又必与它们之一的符号相同，由此联想到实数加法的运算法则.

解 $\because 0<x<1$，$\therefore 0<1-x<1$，$0<1-x^2<1$，$1+x>1$. 据对数函数的性质可知：

$$\log_a(1-x) \text{ 与 } \log_a(1+x) \text{ 异号；}$$
$$\log_a(1-x) \text{ 与 } \log_a(1-x^2) \text{ 同号.}$$

又 $\because \log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$.

由实数加法法则（异号两数相加，和的符号总是同绝对值较大的那个加数的符号相同）可知

$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|.$$

例 5 求 $\cos36^\circ-\cos72^\circ$ 的值.

分析 72° 是 36° 的 2 倍，而 36° 又是 72° 的余角的 2 倍. 如果我们把 $\cos36^\circ$ 和 $\cos72^\circ$ 当成是两个未知数，那么这两个未知数之间的关系就可以根据 2 倍角的余弦公式来建立.

解 令 $\cos36^\circ=x$，$\cos72^\circ=y$，并注意到 $y=\sin18^\circ$，根据 2 倍角的余弦公式可得

$$\begin{cases} x=1-2y^2 \\ y=2x^2-1 \end{cases}$$

二式相加得：

$$\begin{aligned} x+y&=2(x^2-y^2) \\ &=2(x+y)(x-y), \end{aligned}$$

$$\because \quad x+y=\cos36^\circ+\cos72^\circ\neq0,$$

$$\therefore \quad x-y=\frac{1}{2},$$

即 $$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}.$$

例 6 求 $\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ$ 的值.

分析 原式可改写成

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ - 2\sin 10^\circ \sin 50^\circ \cos 120^\circ,$$

此式与余弦定理中的 $a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 相似，且式中的三个角 10°，50°，120° 的和恰好等于 180°. 由此想到构造三角形.

解：设有一个外接圆直径为 1 的 $\triangle ABC$，且 $A = 10^\circ$，$B = 50^\circ$，$C = 120^\circ$. 根据正弦定理可得

$$a = \sin 10^\circ,\ b = \sin 50^\circ,\ c = \sin 120^\circ.$$

将其代入余弦定理：$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = c^2$ 得

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 50^\circ - 2\sin 10^\circ \sin 50^\circ \cos 120^\circ = \sin^2 120^\circ,$$

即 $$\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ = \frac{3}{4}.$$

例 7 判断函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的单调性.

分析 将 $\frac{x}{1+x^2}$ 与万能公式 $\frac{2\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta} = \sin 2\theta$ 进行类比易知，通过三角代换可使函数式简化。

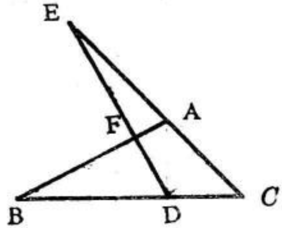
解 $\because$ $x \in [-1, 1]$，$\therefore$ 可设 $x = \mathrm{tg}\,\theta$，$\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，则

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

$\because$ $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore$ y 是关于 θ 的增函数，而由 $\theta = \mathrm{arc\,tg}\, x$ 知，θ 是关于 x 的增函数，故 y 是关于 x 的增函数，即 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是增函数.

例 8 如图 1-2 所示，D 是 BC 的三等分点，F 是 DE 的三等分点，BF 交 CE 于 A，求 $BF:FA$ 的值.

分析 由线段比联想到线段端点的质量比. 在物理学中，质点是有位置而没有大小但有质量的点. 如果我们将线段 AB 的两个端点分别看成是质量为 m、n 的两个质点，则其重心 G 的质量为 $m+n$，且 G 内分 AB 为 $AG:GB=n:m$，这样，几何中的线段比就可转化为线段端点的质量比；反之，线段端点的质量比也可转化为线段比.



（图 1-2）

解 已知 $BD:DC=2:1$，不妨设 B、C 两质点的质量分别为 1，2，则重心 D 的质量为 3 .

又∵ $DF:FE=1:2$，设质点 E 的质量为 x，则

$$x:3=1:2,$$

∴ $$x=\frac{3}{2}.$$

于是，CE 的重心 A 的质量为 $2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$.

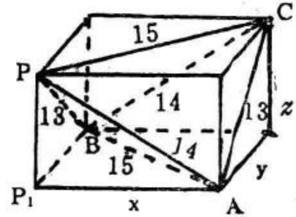
∴ $$BF:FA=\frac{7}{2}:1=\frac{7}{2}.$$

例9 四棱锥 $P-ABC$ 的各组对棱长分别为13，14，15，求其体积.

分析 由各组对棱分别相等联想到长方体的相对面上的对角线相等，三组对角线恰能构成这种三棱锥，故可构造辅助长方体.

解 作如图 1-3 所示的长方体，设长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，则有

$$\begin{cases} x^2+y^2=15^2 \\ y^2+z^2=13^2 \\ z^2+x^2=14^2. \end{cases}$$



(图 1-3)

解之，得

$$\begin{cases} x=3\sqrt{14} \\ y=3\sqrt{11} \\ z=\sqrt{70}. \end{cases}$$

$$\because \quad V_{P-P_1AB}=\frac{1}{3}S_{\triangle P_1AB}\cdot PP_1$$

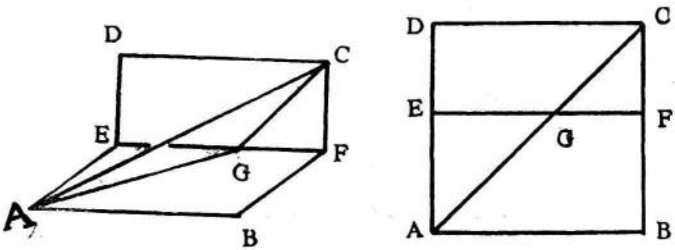
$$=\frac{1}{6}xyz,$$

$$\therefore \quad V_{P-ABC}=V_{长方体}-4V_{P-P_1AB}$$

$$=xyz-\frac{4}{6}xyz$$

$$=42\sqrt{55}.$$

例10 如图1-4(甲)所示，$ABFE$ 与 $EFCD$ 均为矩形，且相互垂直，$AB=7$，$BF=4$，$CF=3$，$CG+AG=7\sqrt{2}$，求$\angle AGC$的度数.



(甲) (乙)

(图 1-4)

分析 本题的关键是如何求出 CG、AG 的长. 如果我们注意到 $BF+CF=AB$ 且 $CG+AG=\sqrt{2}AB$，用运动变

化的观点，将空间图形展开成平面图形，那么 CG、AG 的长就极易求得.

解 将矩形 $ABFE$ 绕 EF 旋转到平面 $CDEF$ 上，则四边形 $ABCD$ 就成为正方形（图1-4(乙)），其对角线长为 $7\sqrt{2}=CG+AG$，故 A、G、C 三点共线. 显然 $\triangle CGF$ 是等腰直角三角形，$\therefore$ $CG=\sqrt{2}CF=3\sqrt{2}$，$AG=4\sqrt{2}$.

由于在旋转过程中 CG、AG 的长度始终没有改变，所以在图1-4(甲)的 $\triangle AGC$ 中，仍有 $CG=3\sqrt{2}$，$AG=4\sqrt{2}$. 又

$$\begin{aligned}AC^2&=AF^2+CF^2\\&=AB^2+BF^2+CF^2\\&=7^2+4^2+3^2\\&=74,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \cos\angle AGC&=\frac{AG^2+CG^2-AC^2}{2AG\cdot CG}\\&=\frac{(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2-74}{2\cdot4\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}}\\&=-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad \angle AGC=120^\circ.$$

例11 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

分析 由左边很自然地会想到和差化积，然而，不论将哪两项组合先化积，都会剩下一项，而这一项又很难与已化积的“结果”一同继续变形，能不能采取一定措施，使它们能够同时化积呢？如果我们将左边添上一项不就可以两两组合同时化积了吗？添上什么呢？考虑到 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 可看作是三个

$\frac{\sqrt{3}}{2}$的和，再添一个$\frac{\sqrt{3}}{2}$（即 $\sin 60^\circ$）如何？我们可以试一试.

证明 $\because$ $\sin A+\sin B+\sin C+\sin 60^\circ=2\sin\frac{A+B}{2}$

$\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C+60^\circ}{2}\cos\frac{C-60^\circ}{2}\leqslant 2\left(\sin\frac{A+B}{2}\right.$

$\left.+\sin\frac{C+60^\circ}{2}\right)=4\sin\frac{A+B+C+60^\circ}{4}$

$\cos\frac{A+B-C-60^\circ}{4}=2\sqrt{3}\cos\frac{60^\circ-C}{2}\leqslant 2\sqrt{3}$.

$\therefore$ $\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

当且仅当 $\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{C-60^\circ}{2}=\cos\frac{A+B-C-60^\circ}{4}$ $=1$，即 $A=B=C=60^\circ$ 时，等式成立.

例12 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证 $a^2+b^2=1$.

分析 将 $a^2+b^2=1$ 写成 $a\cdot a+b\cdot b=1$ 与条件等式类比可知，只需证明

$$\begin{cases}a=\sqrt{1-b^2}\\ b=\sqrt{1-a^2}\end{cases}$$

即可．为此，我们可以把 a，$\sqrt{1-b^2}$ 分别看成是两个点的横坐标，把$\sqrt{1-a^2}$，b 看成是这两个点的纵坐标．这样，只需证明坐标为$(a,\sqrt{1-a^2})$、$(\sqrt{1-b^2},b)$的两个点重合.

证明 设 $A(a,\sqrt{1-a^2})$、$B(\sqrt{1-b^2},b)$ 是平面直角坐标系中的两点，则由两点间的距离公式和条件等式可得

$$\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(a-\sqrt{1-b^2})^2+(\sqrt{1-a^2}-b)^2}\\&=\sqrt{2[1-(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})]}\\&=0.\end{aligned}$$