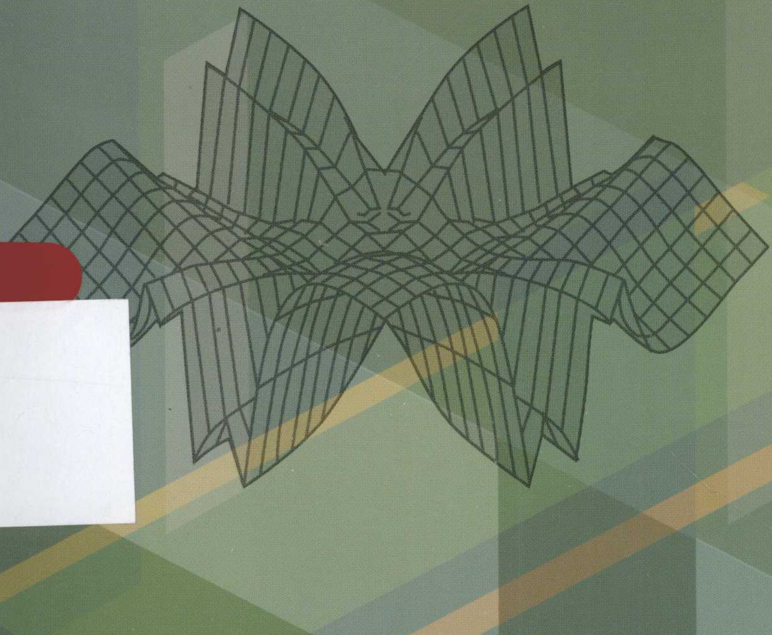
普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

（下册）

崔尚斌　编著



科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

数学分析教程

(下册)

崔尚斌 编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是供综合性大学和师范院校数学类各专业本科一、二年级学生学习数学分析课程的一部教材，分上、中、下三册．本册为下册，讲授多元函数的数学分析理论，内容包括多元函数的极限和连续性、多元函数微分学及其应用、含参变量的积分、多元函数积分学及其应用、场论初步、微分形式和斯托克斯公式等．

本书对传统数学分析教材的编排做了一些与时俱进的改革，内容做了适当缩减和增补，除了如传统教材一样重视对基础知识和基本技巧的传授外，也增加了一些分析学的新内容．本书讲解十分清晰、浅显易懂，配有充足的例题和习题，并对数学分析各个组成部分的来龙去脉和历史发展有清楚并且引人入胜的介绍，不仅适合教师课堂讲授，也很适合学生自学使用．

图书在版编目（CIP）数据

数学分析教程．下册/崔尚斌编著．—北京：科学出版社，2013
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036807-2

Ⅰ．①数… Ⅱ．①崔… Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ．①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 037799 号

责任编辑：张中兴／责任校对：张凤琴
责任印制：阎　磊／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000 B5
2013 年 3 月第一次印刷　印张：26
字数：515 000

定价：47.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

目 录

第 14 章

多元函数的极限和连续性

在上册和中册我们学习了一元函数的微积分, 从现在开始要学习多元函数的微积分. 所谓多元函数, 就是有多个自变量的函数. 这种函数在研究自然现象的过程中随处都可遇到. 因为研究自然现象总离不开空间和时间, 单看空间, 在取定一个直角坐标系之后, 空间中全体点的集合便和由全体三元有序数组 (x, y, z) 组成的集合 $\mathbf{R}^3$ 建立了一一对应关系, 这样空间中的每个点就对应着三个实数 x, y, z, 所以当点在空间中变化时我们就有了三个自变量 x, y, z. 如果再把时间 t 作为一个自变量, 则有四个自变量 x, y, z, t. 因此一般的物理量通常都有四个自变量因而是四元函数. 如果再需要把其他某些参量作为自变量来考虑, 就得到了具有更多个自变量的多元函数. 因此, 把一元函数的微积分理论加以发展, 建立多元函数的微积分理论, 是科学研究的必然需要.

本章讨论多元函数的极限和连续性. 在一元函数的微积分理论中已经看到, 为了研究一元函数, 必须首先了解实数域 $\mathbf{R}$ 的性质. 与此类似, 为了研究多元函数, 必须首先了解欧几里得空间, 简称欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的性质. $\mathbf{R}^m$ 是由全体 m 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 组成的一个数学体系, 有 m 个自变量的多元函数都可看成是从 $\mathbf{R}^m$ 的某个子集到 $\mathbf{R}$ 的一个映射, 所以它在多元函数的微积分理论中起着与实数域 $\mathbf{R}$ 在一元函数的微积分理论中类似的作用. 14.1 节讨论 $\mathbf{R}^m$ 的一些最基本的代数与分析性质. 14.2 节从一些具体的例子出发, 引出多元函数的概念. 14.3 节和 14.4 节分别讨论多元函数的极限和连续性.

14.1 $\mathbf{R}^m$ 中的点列和点集

14.1.1 $\mathbf{R}^m$ 中的运算和距离

由全体 m 元有序实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 组成的集合 $\mathbf{R}^m$ 称为 m **维欧氏空间**, 即

$$\mathbf{R}^m = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m) : x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbf{R}\}.$$

从解析几何我们已经知道, 三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的元素既可以叫点也可以叫三维向量, 因为在空间中建立直角坐标系后, $\mathbf{R}^3$ 中的元素既与空间中的点存在一一对应关系, 也与空间中的向量存在一一对应关系. 把这些术语推广, $\mathbf{R}^m$ 中的元素即 m 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 既可以叫 $\mathbf{R}^m$ 中的**点**, 也可以叫m **维向量**.

从线性代数课程我们知道, 在 $\mathbf{R}^m$ 上有下列三种运算.

(1) 加法和减法运算: 对任意 $x,y\in\mathbf{R}^m$, 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$, 则它们的和 $x+y$ 与差 $x-y$ 定义为

$$x\pm y=(x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,\cdots,x_m\pm y_m).$$

(2) 数乘运算: 对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbf{R}^m$ 和任意实数 λ, λ 对 x 的数乘 λx 定义为

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_m).$$

(3) 内积运算: 对任意 $x,y\in\mathbf{R}^m$, 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$, 则它们的内积 (x,y) 或点积 $x\cdot y$ 定义为

$$(x,y)=x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_my_m.$$

内积 (x,y) 或点积 $x\cdot y$ 经常简写为 xy, 即

$$xy=(x,y)=x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_my_m.$$

这些运算已经在线性代数课程中有过详细的研究, 这里不再重复了. 由内积运算可以定义 x 的**长度** (也称**范数**或**模**) $|x|$, 即

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}.$$

显然, 长度具有以下性质:

(1) $|x|\geqslant 0, |x|=0$当且仅当 $x=0$ (非负性和非退化性);

(2) $|\lambda x|=|\lambda||x|, \forall\lambda\in\mathbf{R},\quad \forall x\in\mathbf{R}^n$ (正齐次性);

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ (三角不等式).

如果 x 的长度为 1, 则称 x 为**单位向量**.

定义 14.1.1 对 $\mathbf{R}^m$ 中任意两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$, 称它们的差 $x-y$ 的长度为这两个点之间的**距离**, 记作 $d(x,y)$, 即

$$d(x,y)=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_m-y_m)^2}.$$

容易看出, 点的距离具有以下三个性质:

(1) $d(x,y)=d(y,x)$ (对称性);

(2) $d(x,y)\geqslant 0, d(x,y)=0$ 当且仅当$x=y$ (非负性和非退化性);

(3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ (三角不等式).

以后, 表示距离的两个记号 $d(x,y)$ 和 $|x-y|$ 我们将混合使用.

14.1.2　$\mathbf{R}^m$ 中点列的极限

由 $\mathbf{R}^m$ 中的点构成的序列叫做 $\mathbf{R}^m$ 中的**点列**.

如果用

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

表示 $\mathbf{R}^m$ 中的点列, 就会和 $\mathbf{R}^m$ 中点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 产生混淆. 为此下面改用 P, Q 等大写符号表示 $\mathbf{R}^m$ 中的点, 从而 $\mathbf{R}^m$ 中的点列就相应地用 $\{P_n\}$, $\{Q_n\}$ 等符号表示.

定义 14.1.2　设 $\{P_n\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个点列, P_0 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个点. 如果

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, P_0) = \lim_{n\to\infty} |P_n - P_0| = 0,$$

则称当 $n\to\infty$ 时, P_n 以 P_0 为**极限**, 或称当 $n\to\infty$ 时, P_n**收敛于**P_0, 记作

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad 或 \quad P_n \to P_0 \quad (当\ n\to\infty).$$

从定义 14.1.2 可知, P_n 收敛于 P_0 的意思是当 $n\to\infty$ 时, P_n 与 P_0 之间的距离越来越小以至于无限地趋近于零. 采用 ε-N 的语言, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 是指对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $N\in\mathbf{N}$, 使得对任意的 $n>N$ 都有

$$d(P_n, P_0) = |P_n - P_0| < \varepsilon.$$

由于点之间的距离是通过它们的坐标之差的平方和再开方来计算的, 所以点列的极限与由它们的坐标形成的数列的极限可以相互表示.

定理 14.1.1　设 $P_n=(x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})$, $n=1,2,\cdots$, $P_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{m0})$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} x_{jn} = x_{j0}, \qquad j=1,2,\cdots,m, \tag{14.1.1}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 的充要条件是对每个 $1\leqslant j\leqslant m$, P_n 的第 j 个坐标形成的数列 x_{jn} $(n=1,2,\cdots)$ 以 P_0 点的相应坐标 x_{j0} 为极限.

证明　由于

$$\begin{aligned} d(P_n,P_0) &= \sqrt{(x_{1n}-x_{10})^2+(x_{2n}-x_{20})^2+\cdots+(x_{mn}-x_{m0})^2} \\ &\leqslant |x_{1n}-x_{10}|+|x_{2n}-x_{20}|+\cdots+|x_{mn}-x_{m0}|, \qquad n=1,2,\cdots, \end{aligned}$$

所以当式 (14.1.1) 成立时, 必然也有 $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n,P_0)=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 成立. 反之由于

$$|x_{jn}-x_{j0}| \leqslant d(P_n,P_0), \qquad j=1,2,\cdots,m,$$

所以当 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n, P_0) = 0$ 时, 显然也有式 (14.1.1) 成立. 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 与式 (14.1.1) 等价. 证毕.

应用定理 14.1.1, 可以把数列极限的除涉及大小比较关系之外的所有命题, 都类推到 $\mathbf{R}^m$ 中点列的极限. 当然也可类似于数列的极限直接从 $\mathbf{R}^m$ 中点列极限的定义推出这些命题.

定理 14.1.2 一个点列如果收敛, 那么它的极限是唯一的.

定理 14.1.3 如果点列 $\{P_n\}$ 收敛, 那么它必是有界的, 即存在常数 $C > 0$ 使成立

$$d(P_n, O) \leqslant C, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

其中 O 表示 $\mathbf{R}^m$ 中的原点.

定理 14.1.2 和定理 14.1.3 的简单证明我们留给读者.

定理 14.1.4(柯西收敛准则) 点列 $\{P_n\}$ 有极限的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意的 $l, n > N$ 都有

$$d(P_l, P_n) < \varepsilon.$$

证明 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意 $n > N$ 都有 $d(P_n, P_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 由此可知对任意的 $l, n > N$ 都有

$$d(P_l, P_n) \leqslant d(P_l, P_0) + d(P_n, P_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 设对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意的 $l, n > N$ 都有 $d(P_l, P_n) < \varepsilon$. 对每个正整数 $1 \leqslant j \leqslant m$, 考虑由 P_n 的第 j 个坐标构成的数列 $\{x_{jn}\}$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由于当 $l, n > N$ 时有

$$|x_{jl} - x_{jn}| \leqslant d(P_l, P_n) < \varepsilon,$$

所以 $\{x_{jn}\}$ 满足柯西准则的条件, 于是 $\{x_{jn}\}$ 收敛. 记 $x_{j0} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{jn}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, 并令 $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{m0})$, 则根据定理 14.2.1 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$, 因此 P_n 收敛于 P_0. 证毕.

定理 14.1.5(列紧性原理) $\mathbf{R}^m$ 中的任意有界点列都有收敛的子列.

证明 我们只以 $m = 2$ 的情况为例来证明, 因为对 $m \geqslant 3$ 的一般情况证明是类似的, 只是记号更加复杂. 设 $\{P_n\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界点列, 并设 $P_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界数列. 由 $\{x_n\}$ 是有界数列, 根据数列的列紧性原理 (定理 2.4.3) 知, $\{x_n\}$ 有收敛的子列, 设为 $\{x_{n_k}\}$. 再考虑数列 $\{y_{n_k}\}$, 因为 $\{y_n\}$ 是有界数列, 所以 $\{y_{n_k}\}$ 作为 $\{y_n\}$ 的子列也是有界数列, 从而它也有子列收敛, 设为 $\{y_{n_{k_l}}\}$. 令 $P_{n_{k_l}} = (x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$, $l = 1, 2, \cdots$, 则因为 $\{x_{n_{k_l}}\}$ 和 $\{y_{n_{k_l}}\}$ 都是收敛数列, 所

以根据定理 14.2.1 知, 点列 $\{P_{n_{k_l}}\}$ 收敛. 这就证明了 $\{P_n\}$ 有收敛的子列 $\{P_{n_{k_l}}\}$. 证毕.

和数列的情况类似, 定理 14.1.5 也叫做**波尔查诺–魏尔斯特拉斯列紧性原理**.

14.1.3　$\mathbf{R}^m$ 中的点集

在讨论一元函数的极限、连续性以及可微性等性质时, 经常需要考虑邻域、开区间、闭区间等概念. 为了研究多元函数的同类性质, 我们也需要使用一些类似的概念. 下面给出这些概念的定义.

定义 14.1.3　对任意 $x_0 \in \mathbf{R}^m$ 和 $r > 0$, 我们记

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbf{R}^m : d(x,x_0) < r\}, \quad \overline{B}(x_0,r) = \{x \in \mathbf{R}^m : d(x,x_0) \leqslant r\}.$$

$B(x_0,r)$ 称为以点 x_0 为心、以 r 为半径的**开球**; $\overline{B}(x_0,r)$ 称为以点 x_0 为心、以 r 为半径的**闭球**. $B(x_0,r)$ 也称为点 x_0 的r **邻域**; $\overline{B}(x_0,r)$ 也称为点 x_0 的r **闭邻域**.

$B(x_0,r)$ 和 $\overline{B}(x_0,r)$ 也分别记作 $B_r(x_0)$ 和 $\overline{B}_r(x_0)$.

需要注意的是 "球" 是针对 $m \geqslant 3$ 的情况使用的术语. 在 $m = 2$ 的情况则改称为 "圆盘", 即 $\mathbf{R}^2$ 中的 $B(x_0,r)$ 称为以 x_0 为心、以 r 为半径的**开圆盘**; $\bar{B}(x_0,r)$ 叫做以 x_0 为心、以 r 为半径的**闭圆盘**. 不过, 在没有特别指明 $m = 2$ 时, 无论是否包含这种情况, 我们都笼统地把 $B(x_0,r)$ 叫做开球, 把 $\bar{B}(x_0,r)$ 称为闭球.

定义 14.1.4　设 S 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个非空点集, x_0 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个点.

(1) 如果 $x_0 \in S$, 且存在 $\delta > 0$, 使得点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$ 完全包含于 S, 即 $B(x_0,\delta) \subseteq S$, 则称 x_0 为 S 的**内点** (图 14-1-1). S 的全部内点组成的集合叫做 S 的**内域**, 记作 S°.

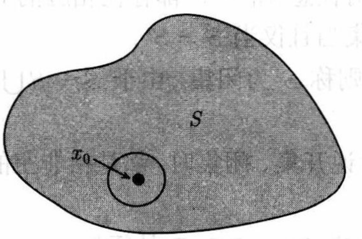


图 14-1-1　内点

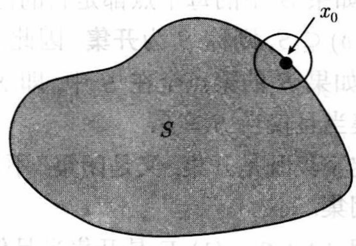


图 14-1-2　边界点

(2) 如果对任意 $\delta > 0$, 点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$ 中都既含有 S 中的点又含有 S 以外的点, 即 $B(x_0,\delta) \bigcap S \neq \varnothing$ 且 $B(x_0,\delta) \bigcap S^c \neq \varnothing$, 这里 S^c 表示 S 的余集: $S^c = \mathbf{R}^m \backslash S$, 则称 x_0 为 S 的**边界点** (图 14-1-2). S 的全部边界点组成的集合称为 S 的**边界**, 记作 ∂S.

(3) 如果对任意 $\delta > 0$, x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$ 中都含有 S 中异于 x_0 的点, 即 $B(x_0,\delta) \bigcap (S\backslash\{x_0\}) \neq \varnothing$, 则称 x_0 为 S 的**聚点或极限点**(图 14-1-3). S 的全部聚点组

成的集合称为 S 的**导集**, 记作 S'.

(4) S 与其导集 S' 的并集称为 S 的**闭包**, 记作 $\overline{S}$, 即 $\overline{S}=S\bigcup S'$.

(5) 如果 $x_0\in S$, 且存在 $\delta>0$, 使得点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$ 中除 x_0 之外没有其他 S 中的点, 即 $B(x_0,\delta)\bigcap S=\{x_0\}$, 则称 x_0 为 S 的**孤立点** (图 14-1-4).

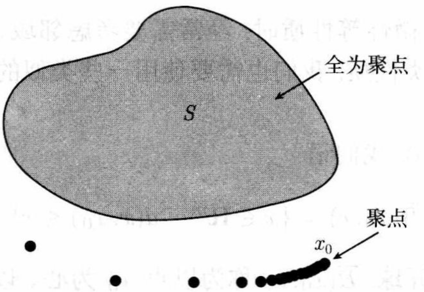


图 14-1-3　聚点

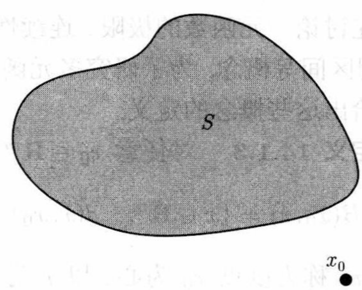


图 14-1-4　孤立点

显然, 内点都是聚点, 即 $S^\circ\subseteq S'$. 又显然, 孤立点都必然是边界点, 即如果 x_0 是 S 的孤立点, 则 $x_0\in\partial S$. 不是孤立点的边界点都显然是聚点. 需要注意的是集合 S 的内点和孤立点都在 S 中, 但 S 的边界点和聚点可能在 S 中, 也可能不在 S 中. 另外, 不难证明 $\overline{S}=S\bigcup\partial S$(见本节习题 10).

对于集合 S 以外的、不是 S 的边界点的点 x_0, 显然一定存在 $\delta>0$, 使得 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0,\delta)$ 与 S 不相交即 $B(x_0,\delta)\bigcap S=\varnothing$, 因而 $B(x_0,\delta)\subseteq S^c$. 我们称这样的点 x_0 与集合 S**有正的距离**.

定义 14.1.5　设 S 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个非空点集.

(1) 如果 S 中的每个点都是它的内点, 即对任意 $x_0\in S$, 都存在相应的 $\delta>0$, 使得 $B(x_0,\delta)\subseteq S$, 则称 S 为**开集**. 因此 S 是开集当且仅当 $S=S^\circ$.

(2) 如果 S 的聚点全在 S 中, 即 $S'\subseteq S$, 则称 S 为**闭集**. 由于 $\overline{S}=S\bigcup S'$, 所以 S 是闭集当且仅当 $S=\overline{S}$.

规定空集既是开集, 又是闭集. 不过, 以后说开集、闭集时, 都是指非空的开集和非空的闭集.

定理 14.1.6　(1) E 是开集当且仅当其余集 $E^c=\mathbf{R}^m\backslash E$ 是闭集.

(2) 任意多个开集的并是开集, 任意多个闭集的交是闭集.

(3) 有限多个开集的交是开集, 有限多个闭集的并是闭集.

证明　(1) 设 E 是开集, 要证明它的余集 E^c 是闭集. (反证法) 设 E^c 不是闭集, 则存在 E^c 的聚点 x_0 不在 E^c 中. 于是 $x_0\in E$. 因为 E 是开集, 所以存在 $\delta>0$ 使得 $B(x_0,\delta)\subseteq E$. 这意味着 $B(x_0,\delta)\bigcap E^c=\varnothing$, 而这与 x_0 是 E^c 的聚点相矛盾. 因此 E^c 是闭集.

再设 E^c 是闭集. 对任意 $x_0\in E$, 因为 $x_0\notin E^c$ 而 E^c 是闭集, 所以存在 $\delta>0$ 使

得 $B(x_0,\delta)\bigcap E^c=\varnothing$. 这意味着 $B(x_0,\delta)\subseteq E$, 所以 E 是开集.

(2) 设 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集. 对任意 $x_0\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$, 必存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $x_0\in E_{\lambda_0}$. 由于 E_{λ_0} 是开集, 所以存在 $\delta>0$ 使得 $B(x_0,\delta)\subseteq E_{\lambda_0}$. 而这蕴涵着 $B(x_0,\delta)\subseteq\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$, 所以 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ 也是开集.

又设 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族闭集, 则 $\{F_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集, 从而 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda^c$ 是开集. 因为 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda^c=\Big(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\Big)^c$, 所以 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ 是闭集.

(3) 设 $E_1, E_2, \cdots, E_N$ 是有限个开集. 对任意 $x_0\in\bigcap\limits_{j=1}^N E_j$, 有 $x_0\in E_j$, $j=1,2,\cdots,N$. 因为每个 E_j 都是开集, 所以存在 $\delta_j>0$ 使得 $B(x_0,\delta_j)\subseteq E_j$, $j=1,2,\cdots,N$. 令 $\delta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\delta_j$, 则 $\delta>0$, 且 $B(x_0,\delta)\subseteq\bigcap\limits_{j=1}^N B(x_0,\delta_j)\subseteq\bigcap\limits_{j=1}^N E_j$, 所以 $\bigcap\limits_{j=1}^N E_j$ 是开集. 这就证明了有限多个开集的交是开集. 应用取余运算, 由此又可推知有限多个闭集的并是闭集. 证毕.

14.1.4 几个重要定理

在一元函数的情形我们已经看到, 刻画实数域完备性的几个与戴德金完备性原理相等价的定理, 即单调有界原理、致密性原理、柯西收敛准则、区间套定理、有限覆盖定理等, 在建立一元函数的微积分理论时起到了重要的作用. 这些定理都可推广到一般的欧氏空间 $\mathbf{R}^m$. 前面已经把致密性原理和柯西收敛准则进行了这样的推广. 下面我们再推广区间套定理和有限覆盖定理. 先给出致密性原理用点集表述的一个等价形式.

定理 14.1.7(聚点原理) 设 E 是 $\mathbf{R}^m$ 中一个含有无穷多个点的有界集合, 则 E 必有聚点, 即其导集 E' 非空.

证明 因为 E 含有无限多个点, 所以必存在一个各项互异的点列 $P_n\in E$, $n=1,2,\cdots$. 由于 E 是有界集合, 所以 $\{P_n\}$ 是有界点列. 因此根据致密性原理, $\{P_n\}$ 有收敛的子列, 设为 $\{P_{n_k}\}$. 令 $P_0=\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}$, 我们来证明 $\boldsymbol{P}_0\in E'$. 事实上, 对任意给定的 $\delta>0$, 由 $P_0=\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}$ 知存在相应的 $N\in\mathbf{N}$, 使当 $k>N$ 时, $P_{n_k}\in B(P_0,\delta)$. 因为 $\{P_{n_k}\}$ 中的点互不相同, 所以在所有满足条件 $k>N$ 的点 P_{n_k} 中, 至少有一个异于 P_0. 因而 $B(P_0,\delta)\bigcap(E\backslash\{P_0\})\neq\varnothing$. 这就证明了 $P_0\in E'$. 证毕.

定理 14.1.8 也叫**波尔查诺聚点原理**.

对于 $\mathbf{R}^m$ 中的一个非空点集 S, 如果存在正数 M 使得 $S\subseteq\bar{B}(O,M)$, 即 S 包含

在一个以原点为心的闭球中, 则称 S 为**有界集**. 这时称 $\sup\{d(x,y):x,y\in S\}$ 为 S 的**直径**, 记作 $\operatorname{diam}(S)$, 即

$$\operatorname{diam}(S)=\sup_{x,y\in S}d(x,y)=\sup\{d(x,y):x,y\in S\}.$$

当 S 是无界集时, 也记 $\operatorname{diam}(S)=\infty$.

定理 14.1.8(闭集套定理) 设 $\{E_n\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一列非空点集. 假设

(1) 每个 E_n 都是闭集;

(2) $E_1\supseteq E_2\supseteq\cdots\supseteq E_n\supseteq E_{n+1}\supseteq\cdots$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(E_n)=0$,

则存在 $\mathbf{R}^m$ 中唯一的点 P_0, 使得该点包含于所有这些闭集 E_n: $P_0\in E_n$, $n=1,2,\cdots$.

证明 对每个正整数 n, 任取 E_n 中一点记作 P_n. 这样就得到了 $\mathbf{R}^m$ 中的一个点列 $\{P_n\}$. 易见这个点列满足柯西准则的条件. 事实上, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(E_n)=0$, 所以对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在相应的正整数 N, 使当 $n>N$ 时就有

$$d(P,Q)<\varepsilon,\qquad \forall P,Q\in E_n.$$

据此和条件 (2) 知当 $l,n>N$ 时有

$$d(P,Q)<\varepsilon,\quad \forall P\in E_n,\quad \forall Q\in E_l.$$

特别地, 有

$$d(P_n,P_l)<\varepsilon,\qquad \forall n,l>N.$$

说明 $\{P_n\}$ 满足柯西准则的条件, 因此 $\{P_n\}$ 有极限. 记 $P_0=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$. 我们来证明

$$P_0\in E_n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

(反证法) 假设这个结论不成立, 即存在某个正整数 n_0 使得 $P_0\notin E_{n_0}$. 因为 E_{n_0} 是闭集, 条件 $P_0\notin E_{n_0}$ 意味着 P_0 既不在 E_{n_0} 中, 也不是 E_{n_0} 的聚点. 因此必存在 $\delta>0$, 使得 $B(P_0,\delta)\bigcap E_{n_0}=\varnothing$. 再应用条件 (2), 即知对所有 $n\geqslant n_0$ 都有 $B(P_0,\delta)\bigcap E_n=\varnothing$. 另外, 由 $P_0=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ 可知必存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时就有 $P_n\in B(P_0,\delta)$. 而 $P_n\in E_n$, $n=1,2,\cdots$, 这就得到了矛盾, 从而证明了上述断言.

最后再来证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 中只有一个点. (反证法) 假设这个集合含有两个不同的点 P 和 Q. 由于 $P\neq Q$, 所以 $d(P,Q)>0$. 由 $P,Q\in E_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 和条件 (3) 可知

$$d(P,Q)\leqslant\operatorname{diam}(E_n)\to 0\quad(\text{当 } n\to\infty).$$

这就得到了矛盾. 因此, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 中只能有一个点. 证毕.

定理 14.1.8 也叫**康托尔闭集套定理**.