

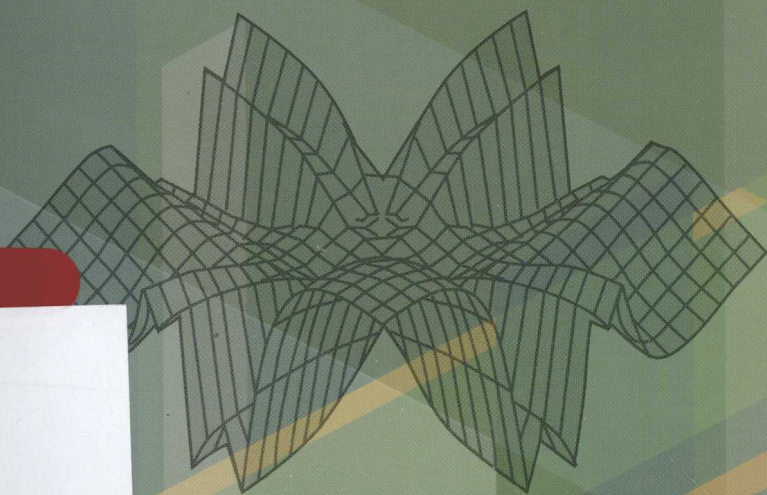


普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

(下册)

崔尚斌 编著



科学出版社

013033635

017-43

32

V3

普通高等教育“十二五”规划教材

数学分析教程

(下册)

崔尚斌 编著



科学出版社

北京



北航

C1640356

017-43

32

V3

013033832

内 容 简 介

本书是供综合性大学和师范院校数学类各专业本科一、二年级学生学习数学分析课程的一部教材,分上、中、下三册.本册为下册,讲授多元函数的数学分析理论,内容包括多元函数的极限和连续性、多元函数微分学及其应用、含参变量的积分、多元函数积分学及其应用、场论初步、微分形式和斯托克斯公式等.

本书对传统数学分析教材的编排做了一些与时俱进的改革,内容做了适当缩减和增补,除了如传统教材一样重视对基础知识和基本技巧的传授外,也增加了一些分析学的新内容.本书讲解十分清晰、浅显易懂,配有充足的例题和习题,并对数学分析各个组成部分的来龙去脉和历史发展有清楚并且引人入胜的介绍,不仅适合教师课堂讲授,也很适合学生自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程.下册/崔尚斌编著. —北京:科学出版社,2013

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-036807-2

I. ①数… II. ①崔… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第037799号

责任编辑:张中兴/责任校对:张凤琴
责任印制:阎磊/封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳艺恒彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年3月第一版 开本:720×1000 B5

2013年3月第一次印刷 印张:26

字数:515 000

定价:47.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

目 录

第 14 章 多元函数的极限和连续性	1
14.1 \mathbf{R}^m 中的点列和点集	1
14.1.1 \mathbf{R}^m 中的运算和距离	1
14.1.2 \mathbf{R}^m 中点列的极限	3
14.1.3 \mathbf{R}^m 中的点集	5
14.1.4 几个重要定理	7
习题 14.1	10
14.2 多元函数的概念	12
14.3 多元函数的极限	16
14.3.1 沿集合 S 的极限和全极限	16
14.3.2 方向极限和沿曲线的极限	21
14.3.3 累次极限	24
14.3.4 向量函数的极限	27
习题 14.3	29
14.4 多元连续函数	31
14.4.1 多元函数连续性的定义与运算	31
14.4.2 多元连续函数的性质	33
习题 14.4	38
第 15 章 多元数量函数的微分学	41
15.1 偏导数和全微分	41
15.1.1 偏导数	41
15.1.2 全微分	45
15.1.3 全微分与偏导数的关系	46
习题 15.1	50
15.2 方向导数和梯度	52

15.2.1	方向导数	52
15.2.2	梯度	53
15.2.3	微分中值定理	55
习题 15.2		56
15.3	复合函数的偏导数和隐函数定理	57
15.3.1	复合函数的偏导数	57
15.3.2	复合函数的全微分	60
15.3.3	隐函数的偏导数和隐函数定理	61
习题 15.3		67
15.4	高阶偏导数和泰勒公式	70
15.4.1	高阶偏导数和高阶全微分	70
15.4.2	m 重指标和高阶偏导数的简写记号	75
15.4.3	泰勒公式	77
习题 15.4		79
15.5	微分学的几何应用	83
习题 15.5		86
第 16 章	多元向量函数的微分学	89
16.1	线性变换与矩阵分析初步	89
16.1.1	线性变换与矩阵的代数理论	89
16.1.2	线性变换与矩阵的范数	93
16.1.3	可逆矩阵的摄动定理	97
习题 16.1		99
16.2	多元向量函数的偏导数与全微分	100
习题 16.2		105
16.3	隐函数定理和反函数定理	106
16.3.1	压缩映射原理	106
16.3.2	隐函数定理	107
16.3.3	反函数定理	111
16.3.4	满射定理和单射定理	112
习题 16.3		114
第 17 章	多元函数的极值	118
17.1	简单极值问题	118
习题 17.1		123
17.2	条件极值问题	125
17.2.1	求稳定点的拉格朗日乘数法	125

17.2.2	拉格朗日乘数法的几何解释	133
	习题 17.2	136
第 18 章	含参变量的积分	139
18.1	含参变量的定积分	139
	习题 18.1	146
18.2	含参变量的广义积分	149
18.2.1	含参量广义积分的一致收敛	149
18.2.2	含参量广义积分的性质	153
	习题 18.2	161
18.3	欧拉积分	164
18.3.1	伽马函数	164
18.3.2	贝塔函数	165
	习题 18.3	169
第 19 章	重积分	171
19.1	\mathbf{R}^m 中点集的若尔当测度	171
19.1.1	若尔当测度的定义	172
19.1.2	若尔当可测的等价条件	175
19.1.3	若尔当测度的运算性质	177
	习题 19.1	180
19.2	重积分的定义和性质	182
19.2.1	重积分的定义	182
19.2.2	函数可积的达布准则	185
19.2.3	重积分的性质	187
	习题 19.2	188
19.3	重积分的计算	189
19.3.1	化重积分为累次积分	189
19.3.2	二重积分的计算	191
19.3.3	三重积分的计算	195
19.3.4	m 重积分的计算	198
	习题 19.3	201
19.4	重积分的变元变换	204
19.4.1	变元变换的一般公式	204
19.4.2	一些常用的积分变元变换	210
19.4.3	m 维球坐标变换	218
	习题 19.4	221

19.5	曲面的面积	224
	习题 19.5	229
19.6	重积分的物理应用	229
19.6.1	质心的计算	230
19.6.2	转动惯量的计算	231
19.6.3	万有引力的计算	232
	习题 19.6	234
第 20 章	曲线积分和曲面积分	235
20.1	第一型曲线积分和曲面积分	235
20.1.1	第一型曲线积分	236
20.1.2	第一型曲面积分	239
20.1.3	物理应用	242
	习题 20.1	244
20.2	第二型曲线积分和曲面积分	246
20.2.1	第二型曲线积分	247
20.2.2	第二型曲面积分	254
	习题 20.2	261
20.3	三个重要公式	265
20.3.1	格林公式	265
20.3.2	高斯公式	269
20.3.3	斯托克斯公式	273
	习题 20.3	276
第 21 章	广义重积分和含参量的重积分	279
21.1	广义重积分和含参量的重积分	279
21.1.1	广义重积分	279
21.1.2	含参变量的重积分	284
	习题 21.1	287
21.2	函数的磨光及其应用	290
21.2.1	函数的磨光	290
21.2.2	截断函数和单位分解定理	297
21.2.3	延拓定理	299
	习题 21.2	303
第 22 章	场论初步	305
22.1	关于场的基本概念	305
22.1.1	等值面和积分曲线	306
22.1.2	方向导数和梯度 梯度场和势函数	309

习题 22.1	313
22.2 向量场的通量和散度	314
22.2.1 向量场的通量	314
22.2.2 向量场的散度	316
22.2.3 无源场及其性质	318
习题 22.2	319
22.3 向量场的环量和旋度	320
22.3.1 向量场的环量	320
22.3.2 向量场的旋度	321
22.3.3 无旋场及其性质	323
习题 22.3	325
22.4 一些重要定理	326
22.4.1 梯度、散度和旋度联合的一些运算公式	326
22.4.2 保守场及其等价条件	327
22.4.3 亥姆霍兹分解定理	330
习题 22.4	337
22.5 平面和曲面上的向量场	338
22.5.1 平面上的向量场	338
22.5.2 曲面上的向量场	340
习题 22.5	342
第 23 章 微分形式和斯托克斯公式	343
23.1 反对称多线性函数和外积	343
23.1.1 反对称多线性函数	343
23.1.2 外积运算	349
习题 23.1	350
23.2 微分形式和外微分	351
23.2.1 微分形式	351
23.2.2 外微分运算	353
23.2.3 闭形式和恰当形式	356
习题 23.2	360
23.3 微分形式的变元变换和积分	361
23.3.1 微分形式的变元变换	361
23.3.2 微分形式的积分	367
习题 23.3	376
23.4 斯托克斯公式	379
23.4.1 微分流形	379
23.4.2 流形上的积分	386

23.4.3 斯托克斯公式	388
习题 23.4	391
综合习题	393
参考文献	408
附录 I 常用数学符号	411
附录 II 常用数学公式	412
附录 III 常用数学定理	413
附录 IV 常用数学证明	414
附录 V 常用数学例题	415
附录 VI 常用数学习题	416
附录 VII 常用数学竞赛题	417
附录 VIII 常用数学竞赛题解答	418
附录 IX 常用数学竞赛题解答	419
附录 X 常用数学竞赛题解答	420
附录 XI 常用数学竞赛题解答	421
附录 XII 常用数学竞赛题解答	422
附录 XIII 常用数学竞赛题解答	423
附录 XIV 常用数学竞赛题解答	424
附录 XV 常用数学竞赛题解答	425
附录 XVI 常用数学竞赛题解答	426
附录 XVII 常用数学竞赛题解答	427
附录 XVIII 常用数学竞赛题解答	428
附录 XIX 常用数学竞赛题解答	429
附录 XX 常用数学竞赛题解答	430
附录 XXI 常用数学竞赛题解答	431
附录 XXII 常用数学竞赛题解答	432
附录 XXIII 常用数学竞赛题解答	433
附录 XXIV 常用数学竞赛题解答	434
附录 XXV 常用数学竞赛题解答	435
附录 XXVI 常用数学竞赛题解答	436
附录 XXVII 常用数学竞赛题解答	437
附录 XXVIII 常用数学竞赛题解答	438
附录 XXIX 常用数学竞赛题解答	439
附录 XXX 常用数学竞赛题解答	440

第 14 章

多元函数的极限和连续性

在上册和中册我们学习了一元函数的微积分,从现在开始要学习多元函数的微积分. 所谓多元函数,就是有多个自变量的函数. 这种函数在研究自然现象的过程中随处都可遇到. 因为研究自然现象总离不开空间和时间,单看空间,在取定一个直角坐标系之后,空间中全体点的集合便和由全体三元有序数组 (x, y, z) 组成的集合 \mathbf{R}^3 建立了一一对应关系,这样空间中的每个点就对应着三个实数 x, y, z ,所以当点在空间中变化时我们就有了三个自变量 x, y, z . 如果再把时间 t 作为一个自变量,则有四个自变量 x, y, z, t . 因此一般的物理量通常都有四个自变量因而是四元函数. 如果再需要把其他某些参量作为自变量来考虑,就得到了具有更多个自变量的多元函数. 因此,把一元函数的微积分理论加以发展,建立多元函数的微积分理论,是科学研究的必然需要.

本章讨论多元函数的极限和连续性. 在一元函数的微积分理论中已经看到,为了研究一元函数,必须首先了解实数域 \mathbf{R} 的性质. 与此类似,为了研究多元函数,必须首先了解欧几里得空间,简称欧氏空间 \mathbf{R}^m 的性质. \mathbf{R}^m 是由全体 m 元有序实数组 (x_1, x_2, \dots, x_m) 组成的一个数学体系,有 m 个自变量的多元函数都可看成是从 \mathbf{R}^m 的某个子集到 \mathbf{R} 的一个映射,所以它在多元函数的微积分理论中起着与实数域 \mathbf{R} 在一元函数的微积分理论中类似的作用. 14.1 节讨论 \mathbf{R}^m 的一些最基本的代数与分析性质. 14.2 节从一些具体的例子出发,引出多元函数的概念. 14.3 节和 14.4 节分别讨论多元函数的极限和连续性.

14.1 \mathbf{R}^m 中的点列和点集

14.1.1 \mathbf{R}^m 中的运算和距离

由全体 m 元有序实数组 (x_1, x_2, \dots, x_m) 组成的集合 \mathbf{R}^m 称为 m 维欧氏空间,即

$$\mathbf{R}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbf{R}\}.$$

从解析几何我们已经知道, 三维欧氏空间 \mathbf{R}^3 中的元素既可以叫点也可以叫三维向量, 因为在空间中建立直角坐标系后, \mathbf{R}^3 中的元素既与空间中的点存在一一对应关系, 也与空间中的向量存在一一对应关系. 把这些术语推广, \mathbf{R}^m 中的元素即 m 元有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_m) 既可以叫 \mathbf{R}^m 中的点, 也可以叫 m 维向量.

从线性代数课程我们知道, 在 \mathbf{R}^m 上有下列三种运算.

(1) 加法和减法运算: 对任意 $x, y \in \mathbf{R}^m$, 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 则它们的和 $x + y$ 与差 $x - y$ 定义为

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_m \pm y_m).$$

(2) 数乘运算: 对任意 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ 和任意实数 λ , λ 对 x 的数乘 λx 定义为

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m).$$

(3) 内积运算: 对任意 $x, y \in \mathbf{R}^m$, 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 则它们的内积 (x, y) 或点积 $x \cdot y$ 定义为

$$(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m.$$

内积 (x, y) 或点积 $x \cdot y$ 经常简写为 xy , 即

$$xy = (x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m.$$

这些运算已经在线性代数课程中有过详细的研究, 这里不再重复了. 由内积运算可以定义 x 的长度 (也称范数或模) $|x|$, 即

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

显然, 长度具有以下性质:

(1) $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ (非负性和非退化性);

(2) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R}^n$ (正齐次性);

(3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式).

如果 x 的长度为 1, 则称 x 为单位向量.

定义 14.1.1 对 \mathbf{R}^m 中任意两点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 称它们的差 $x - y$ 的长度为这两个点之间的距离, 记作 $d(x, y)$, 即

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}.$$

容易看出, 点的距离具有以下三个性质:

(1) $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性);

(2) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$ (非负性和非退化性);

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (三角不等式).

以后, 表示距离的两个记号 $d(x, y)$ 和 $|x - y|$ 我们将混合使用.

14.1.2 \mathbf{R}^m 中点列的极限

由 \mathbf{R}^m 中的点构成的序列叫做 \mathbf{R}^m 中的点列.

如果用

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

表示 \mathbf{R}^m 中的点列, 就会和 \mathbf{R}^m 中点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的坐标 x_1, x_2, \dots, x_m 产生混淆. 为此下面改用 P, Q 等大写符号表示 \mathbf{R}^m 中的点, 从而 \mathbf{R}^m 中的点列就相应地用 $\{P_n\}, \{Q_n\}$ 等符号表示.

定义 14.1.2 设 $\{P_n\}$ 是 \mathbf{R}^m 中的一个点列, P_0 是 \mathbf{R}^m 中的一个点. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n - P_0| = 0,$$

则称当 $n \rightarrow \infty$ 时, P_n 以 P_0 为极限, 或称当 $n \rightarrow \infty$ 时, P_n 收敛于 P_0 , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \quad \text{或} \quad P_n \rightarrow P_0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

从定义 14.1.2 可知, P_n 收敛于 P_0 的意思是当 $n \rightarrow \infty$ 时, P_n 与 P_0 之间的距离越来越小以至于无限地趋近于零. 采用 ε - N 的语言, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 是指对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意的 $n > N$ 都有

$$d(P_n, P_0) = |P_n - P_0| < \varepsilon.$$

由于点之间的距离是通过它们的坐标之差的平方和再开方来计算的, 所以点列的极限与由它们的坐标形成的数列的极限可以相互表示.

定理 14.1.1 设 $P_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})$, $n = 1, 2, \dots$, $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{jn} = x_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (14.1.1)$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 的充要条件是对每个 $1 \leq j \leq m$, P_n 的第 j 个坐标形成的数列 x_{jn} ($n = 1, 2, \dots$) 以 P_0 点的相应坐标 x_{j0} 为极限.

证明 由于

$$\begin{aligned} d(P_n, P_0) &= \sqrt{(x_{1n} - x_{10})^2 + (x_{2n} - x_{20})^2 + \dots + (x_{mn} - x_{m0})^2} \\ &\leq |x_{1n} - x_{10}| + |x_{2n} - x_{20}| + \dots + |x_{mn} - x_{m0}|, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

所以当式 (14.1.1) 成立时, 必然也有 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 成立. 反之由于

$$|x_{jn} - x_{j0}| \leq d(P_n, P_0), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

所以当 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n, P_0) = 0$ 时, 显然也有式 (14.1.1) 成立. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ 与式 (14.1.1) 等价. 证毕.

应用定理 14.1.1, 可以把数列极限的除涉及大小比较关系之外的所有命题, 都类推到 \mathbf{R}^m 中点列的极限. 当然也可类似于数列的极限直接从 \mathbf{R}^m 中点列极限的定义推出这些命题.

定理 14.1.2 一个点列如果收敛, 那么它的极限是唯一的.

定理 14.1.3 如果点列 $\{P_n\}$ 收敛, 那么它必是有界的, 即存在常数 $C > 0$ 使成立

$$d(P_n, O) \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

其中 O 表示 \mathbf{R}^m 中的原点.

定理 14.1.2 和定理 14.1.3 的简单证明我们留给读者.

定理 14.1.4 (柯西收敛准则) 点列 $\{P_n\}$ 有极限的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意的 $l, n > N$ 都有

$$d(P_l, P_n) < \varepsilon.$$

证明 必要性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意 $n > N$ 都有 $d(P_n, P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. 由此可知对任意的 $l, n > N$ 都有

$$d(P_l, P_n) \leq d(P_l, P_0) + d(P_n, P_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 设对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使得对任意的 $l, n > N$ 都有 $d(P_l, P_n) < \varepsilon$. 对每个正整数 $1 \leq j \leq m$, 考虑由 P_n 的第 j 个坐标构成的数列 $\{x_{jn}\}$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由于当 $l, n > N$ 时有

$$|x_{jl} - x_{jn}| \leq d(P_l, P_n) < \varepsilon,$$

所以 $\{x_{jn}\}$ 满足柯西准则的条件, 于是 $\{x_{jn}\}$ 收敛. 记 $x_{j0} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{jn}$, $j = 1, 2, \dots, m$, 并令 $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})$, 则根据定理 14.2.1 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$, 因此 P_n 收敛于 P_0 . 证毕.

定理 14.1.5 (列紧性原理) \mathbf{R}^m 中的任意有界点列都有收敛的子列.

证明 我们只以 $m = 2$ 的情况为例来证明, 因为对 $m \geq 3$ 的一般情况证明是类似的, 只是记号更加复杂. 设 $\{P_n\}$ 是 \mathbf{R}^2 中的有界点列, 并设 $P_n = (x_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界数列. 由 $\{x_n\}$ 是有界数列, 根据数列的列紧性原理 (定理 2.4.3) 知, $\{x_n\}$ 有收敛的子列, 设为 $\{x_{n_k}\}$. 再考虑数列 $\{y_{n_k}\}$, 因为 $\{y_n\}$ 是有界数列, 所以 $\{y_{n_k}\}$ 作为 $\{y_n\}$ 的子列也是有界数列, 从而它也有子列收敛, 设为 $\{y_{n_{k_l}}\}$. 令 $P_{n_{k_l}} = (x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$, $l = 1, 2, \dots$, 则因为 $\{x_{n_{k_l}}\}$ 和 $\{y_{n_{k_l}}\}$ 都是收敛数列, 所

以根据定理 14.2.1 知, 点列 $\{P_{n_{k_l}}\}$ 收敛. 这就证明了 $\{P_n\}$ 有收敛的子列 $\{P_{n_{k_l}}\}$. 证毕.

和数列的情况类似, 定理 14.1.5 也叫做波尔查诺-魏尔斯特拉斯列紧性原理.

14.1.3 \mathbf{R}^m 中的点集

在讨论一元函数的极限、连续性以及可微性等性质时, 经常需要考虑邻域、开区间、闭区间等概念. 为了研究多元函数的同类性质, 我们也需要使用一些类似的概念. 下面给出这些概念的定义.

定义 14.1.3 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}^m$ 和 $r > 0$, 我们记

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^m : d(x, x_0) < r\}, \quad \bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbf{R}^m : d(x, x_0) \leq r\}.$$

$B(x_0, r)$ 称为以点 x_0 为心、以 r 为半径的**开球**; $\bar{B}(x_0, r)$ 称为以点 x_0 为心、以 r 为半径的**闭球**. $B(x_0, r)$ 也称为点 x_0 的 **r 邻域**; $\bar{B}(x_0, r)$ 也称为点 x_0 的 **r 闭邻域**.

$B(x_0, r)$ 和 $\bar{B}(x_0, r)$ 也分别记作 $B_r(x_0)$ 和 $\bar{B}_r(x_0)$.

需要注意的是“球”是针对 $m \geq 3$ 的情况使用的术语. 在 $m = 2$ 的情况则改称为“圆盘”, 即 \mathbf{R}^2 中的 $B(x_0, r)$ 称为以 x_0 为心、以 r 为半径的**开圆盘**; $\bar{B}(x_0, r)$ 叫做以 x_0 为心、以 r 为半径的**闭圆盘**. 不过, 在没有特别指明 $m = 2$ 时, 无论是否包含这种情况, 我们都笼统地把 $B(x_0, r)$ 叫做开球, 把 $\bar{B}(x_0, r)$ 称为闭球.

定义 14.1.4 设 S 是 \mathbf{R}^m 中的一个非空点集, x_0 是 \mathbf{R}^m 中的一个点.

(1) 如果 $x_0 \in S$, 且存在 $\delta > 0$, 使得点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$ 完全包含于 S , 即 $B(x_0, \delta) \subseteq S$, 则称 x_0 为 S 的**内点** (图 14-1-1). S 的全部内点组成的集合叫做 S 的**内域**, 记作 S° .

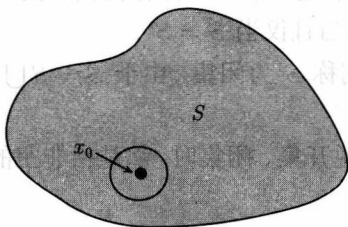


图 14-1-1 内点

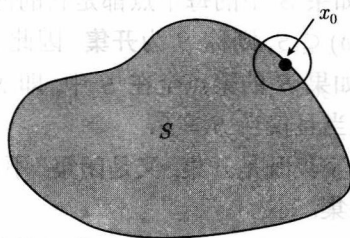


图 14-1-2 边界点

(2) 如果对任意 $\delta > 0$, 点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$ 中都既含有 S 中的点又含有 S 以外的点, 即 $B(x_0, \delta) \cap S \neq \emptyset$ 且 $B(x_0, \delta) \cap S^c \neq \emptyset$, 这里 S^c 表示 S 的余集: $S^c = \mathbf{R}^m \setminus S$, 则称 x_0 为 S 的**边界点** (图 14-1-2). S 的全部边界点组成的集合称为 S 的**边界**, 记作 ∂S .

(3) 如果对任意 $\delta > 0$, x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$ 中都含有 S 中异于 x_0 的点, 即 $B(x_0, \delta) \cap (S \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$, 则称 x_0 为 S 的**聚点或极限点** (图 14-1-3). S 的全部聚点组

成的集合称为 S 的导集, 记作 S' .

(4) S 与其导集 S' 的并集称为 S 的闭包, 记作 \bar{S} , 即 $\bar{S} = S \cup S'$.

(5) 如果 $x_0 \in S$, 且存在 $\delta > 0$, 使得点 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$ 中除 x_0 之外没有其他 S 中的点, 即 $B(x_0, \delta) \cap S = \{x_0\}$, 则称 x_0 为 S 的孤立点 (图 14-1-4).

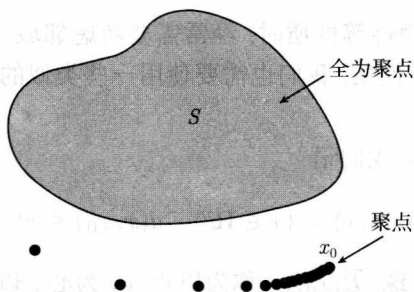


图 14-1-3 聚点

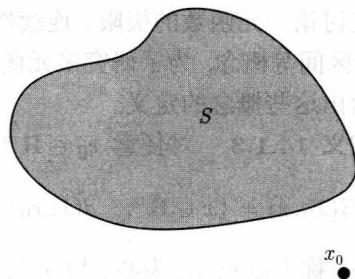


图 14-1-4 孤立点

显然, 内点都是聚点, 即 $S^\circ \subseteq S'$. 又显然, 孤立点都必然是边界点, 即如果 x_0 是 S 的孤立点, 则 $x_0 \in \partial S$. 不是孤立点的边界点都显然是聚点. 需要注意的是集合 S 的内点和孤立点都在 S 中, 但 S 的边界点和聚点可能在 S 中, 也可能不在 S 中. 另外, 不难证明 $\bar{S} = S \cup \partial S$ (见本节习题 10).

对于集合 S 以外的、不是 S 的边界点的点 x_0 , 显然一定存在 $\delta > 0$, 使得 x_0 的 δ 邻域 $B(x_0, \delta)$ 与 S 不相交即 $B(x_0, \delta) \cap S = \emptyset$, 因而 $B(x_0, \delta) \subseteq S^c$. 我们称这样的点 x_0 与集合 S 有正的距离.

定义 14.1.5 设 S 是 \mathbf{R}^m 中的一个非空点集.

(1) 如果 S 中的每个点都是它的内点, 即对任意 $x_0 \in S$, 都存在相应的 $\delta > 0$, 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq S$, 则称 S 为开集. 因此 S 是开集当且仅当 $S = S^\circ$.

(2) 如果 S 的聚点全在 S 中, 即 $S' \subseteq S$, 则称 S 为闭集. 由于 $\bar{S} = S \cup S'$, 所以 S 是闭集当且仅当 $S = \bar{S}$.

规定空集既是开集, 又是闭集. 不过, 以后说开集、闭集时, 都是指非空的开集和非空的闭集.

定理 14.1.6 (1) E 是开集当且仅当其余集 $E^c = \mathbf{R}^m \setminus E$ 是闭集.

(2) 任意多个开集的并是开集, 任意多个闭集的交是闭集.

(3) 有限多个开集的交是开集, 有限多个闭集的并是闭集.

证明 (1) 设 E 是开集, 要证明它的余集 E^c 是闭集. (反证法) 设 E^c 不是闭集, 则存在 E^c 的聚点 x_0 不在 E^c 中. 于是 $x_0 \in E$. 因为 E 是开集, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq E$. 这意味着 $B(x_0, \delta) \cap E^c = \emptyset$, 而这与 x_0 是 E^c 的聚点相矛盾. 因此 E^c 是闭集.

再设 E^c 是闭集. 对任意 $x_0 \in E$, 因为 $x_0 \notin E^c$ 而 E^c 是闭集, 所以存在 $\delta > 0$ 使

得 $B(x_0, \delta) \cap E^c = \emptyset$. 这意味着 $B(x_0, \delta) \subseteq E$, 所以 E 是开集.

(2) 设 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族开集. 对任意 $x_0 \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, 必存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $x_0 \in E_{\lambda_0}$.

由于 E_{λ_0} 是开集, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq E_{\lambda_0}$. 而这蕴涵着 $B(x_0, \delta) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$,

所以 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ 也是开集.

又设 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族闭集, 则 $\{F_\lambda^c\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族开集, 从而 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$ 是开集. 因为

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c$, 所以 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ 是闭集.

(3) 设 E_1, E_2, \dots, E_N 是有限个开集. 对任意 $x_0 \in \bigcap_{j=1}^N E_j$, 有 $x_0 \in E_j, j = 1, 2, \dots, N$. 因为每个 E_j 都是开集, 所以存在 $\delta_j > 0$ 使得 $B(x_0, \delta_j) \subseteq E_j, j = 1, 2, \dots, N$. 令 $\delta = \min_{1 \leq j \leq N} \delta_j$, 则 $\delta > 0$, 且 $B(x_0, \delta) \subseteq \bigcap_{j=1}^N B(x_0, \delta_j) \subseteq \bigcap_{j=1}^N E_j$, 所以

$\bigcap_{j=1}^N E_j$ 是开集. 这就证明了有限多个开集的交是开集. 应用取余运算, 由此又可推知有限多个闭集的并是闭集. 证毕.

14.1.4 几个重要定理

在一元函数的情形我们已经看到, 刻画实数域完备性的几个与戴德金完备性原理相等的定理, 即单调有界原理、致密性原理、柯西收敛准则、区间套定理、有限覆盖定理等, 在建立一元函数的微积分理论时起到了重要的作用. 这些定理都可推广到一般的欧氏空间 \mathbf{R}^m . 前面已经把致密性原理和柯西收敛准则进行了这样的推广. 下面我们再推广区间套定理和有限覆盖定理. 先给出致密性原理用点集表述的一个等价形式.

定理 14.1.7 (聚点原理) 设 E 是 \mathbf{R}^m 中一个含有无穷多个点的有界集合, 则 E 必有聚点, 即其导集 E' 非空.

证明 因为 E 含有无限多个点, 所以必存在一个各项互异的点列 $P_n \in E, n = 1, 2, \dots$. 由于 E 是有界集合, 所以 $\{P_n\}$ 是有界点列. 因此根据致密性原理, $\{P_n\}$ 有收敛的子列, 设为 $\{P_{n_k}\}$. 令 $P_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k}$, 我们来证明 $P_0 \in E'$. 事实上, 对任意给定的 $\delta > 0$, 由 $P_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k}$ 知存在相应的 $N \in \mathbf{N}$, 使当 $k > N$ 时, $P_{n_k} \in B(P_0, \delta)$. 因为 $\{P_{n_k}\}$ 中的点互不相同, 所以在所有满足条件 $k > N$ 的点 P_{n_k} 中, 至少有一个异于 P_0 . 因而 $B(P_0, \delta) \cap (E \setminus \{P_0\}) \neq \emptyset$. 这就证明了 $P_0 \in E'$. 证毕.

定理 14.1.8 也叫波尔查诺聚点原理.

对于 \mathbf{R}^m 中的一个非空点集 S , 如果存在正数 M 使得 $S \subseteq \bar{B}(O, M)$, 即 S 包含

在一个以原点为心的闭球中, 则称 S 为有界集. 这时称 $\sup\{d(x, y) : x, y \in S\}$ 为 S 的直径, 记作 $\text{diam}(S)$, 即

$$\text{diam}(S) = \sup_{x, y \in S} d(x, y) = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}.$$

当 S 是无界集时, 也记 $\text{diam}(S) = \infty$.

定理 14.1.8 (闭集套定理) 设 $\{E_n\}$ 是 \mathbf{R}^m 中的一列非空点集. 假设

- (1) 每个 E_n 都是闭集;
- (2) $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq E_{n+1} \supseteq \cdots$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(E_n) = 0$,

则存在 \mathbf{R}^m 中唯一的点 P_0 , 使得该点包含于所有这些闭集 E_n : $P_0 \in E_n, n = 1, 2, \cdots$.

证明 对每个正整数 n , 任取 E_n 中一点记作 P_n . 这样就得到了 \mathbf{R}^m 中的一个点列 $\{P_n\}$. 易见这个点列满足柯西准则的条件. 事实上, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(E_n) = 0$, 所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N , 使当 $n > N$ 时就有

$$d(P, Q) < \varepsilon, \quad \forall P, Q \in E_n.$$

据此和条件 (2) 知当 $l, n > N$ 时有

$$d(P, Q) < \varepsilon, \quad \forall P \in E_n, \quad \forall Q \in E_l.$$

特别地, 有

$$d(P_n, P_l) < \varepsilon, \quad \forall n, l > N.$$

说明 $\{P_n\}$ 满足柯西准则的条件, 因此 $\{P_n\}$ 有极限. 记 $P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$. 我们来证明

$$P_0 \in E_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

(反证法) 假设这个结论不成立, 即存在某个正整数 n_0 使得 $P_0 \notin E_{n_0}$. 因为 E_{n_0} 是闭集, 条件 $P_0 \notin E_{n_0}$ 意味着 P_0 既不在 E_{n_0} 中, 也不是 E_{n_0} 的聚点. 因此必存在 $\delta > 0$, 使得 $B(P_0, \delta) \cap E_{n_0} = \emptyset$. 再应用条件 (2), 即知对所有 $n \geq n_0$ 都有 $B(P_0, \delta) \cap E_n = \emptyset$. 另外, 由 $P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 可知必存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时就有 $P_n \in B(P_0, \delta)$. 而 $P_n \in E_n, n = 1, 2, \cdots$, 这就得到了矛盾, 从而证明了上述断言.

最后再来证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 中只有一个点. (反证法) 假设这个集合含有两个不同的点 P 和 Q . 由于 $P \neq Q$, 所以 $d(P, Q) > 0$. 由 $P, Q \in E_n (n = 1, 2, \cdots)$ 和条件 (3) 可知

$$d(P, Q) \leq \text{diam}(E_n) \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

这就得到了矛盾. 因此, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 中只能有一个点. 证毕.

定理 14.1.8 也叫康托尔闭集套定理.