高等代數

（上 册）

數學系　方嘉琳 編

東北師範大學

一九五五年一月·長春

高 等 代 數

（上冊目錄）

1 綫 性 代 數 初 步

高 等 代 數

一九五四——一九五五學年第一學期

數學系一年用　數學系　方嘉琳 編

第一章 行 列 式

§1. 數 環 和 數

代數這門科學，有悠久的發展歷史，豐富而廣泛的內容，特別是在近百年來，得到了空前的發展，不僅擴大了代數的研究範圍，也加深了代數的方法和結果，對於其它門科學的影響。初看起來，似乎與代數無關的某些問題，也得到了解答。例如，把群論和環論應用到微分方程式論桁樸學、代數幾何等各門科學裡，都得到了很大的成就，因之某些獨立的課程也被聯合在一起並得到了蓬勃的發展。

在高等代數這門課程裡，僅僅能初步的掌握代數的方法和結果，爲了明確討論的範圍，先介紹數環和數體的概念。

在中學已經學到了各種數：如正數、負數、整數、分數、有理數、無理數、實數、虛數等等，並且初步掌握了各種數的運算。但是對於某些數的概念，在中學的課本裡並沒能給予明確的說明，以致有些學生在概念上不够清楚如常錯誤的以爲每一個無理數都是開不盡根的數，是從有理數開平方得來的，或者是經有理數與有根號的數所表示出來的。各種數中間關係也不清楚，如複數能否是正數，也不能正確

的解答，

爲了學習高等代數，首先必須正確的掌握幾種重要的數集，然後才能使我們的討論的一些結果，得到廣泛的應用，特別是明確討論範圍，才能使我們逐步掌握代數方法。

全體正負整數和零構成整數集，以後用符號Z來表示。全體正負分數和零構成有理數集，以後用符號來R表示。顯然有理數集包含着整數集。這些數集都是大家所熟悉的。

無理數的概念，雖然在中學裏掌握得不够清楚，將來在數學分析裡要詳細講授對於學習高等代數來說，只要能正確地掌握了中學代數的知識就已足够，也就是說，無理數是無限非循環小數。全體有理數及無理數構成實數集，以後用符號D來表示。

在中學裏最後引入複數，全體複數構成複數集，以後用符號K來表示。當然在中學所學過的複數，是從『虛』數出發的，未曾明確它實際意義，因而它的眞實性和合理性都值得懷疑。實際上在十八世紀以前，即複數的概念還沒有被充份認識以前，是被人看做很神秘的，虛想出來的數；及至十九世紀才得到充分的認識，以後複數的應用是很廣泛的，在許多工程上和科學理論上，都起了很大的作用，因此我們以後要完整的討論複數。

我們曾用數集這一名詞來表示某些數的集合，亦即合乎某種條件的數之全體，數集是很多的，不只是上面所提過的整數集，有理數集，實數集，複數集，等四種譬如全體正整數（即自然數）、全體偶數、全體負實數等也都各構成數集。但是各種數集，都有它的特殊性質譬如在正整數集中可以進行加法及乘法運算，其中任二數的和與積仍屬於正整數集中，但不能進行減法及除法運算，在複數集中可以進行加、減、乘、除（以〇除除外）四種運算，其和、差、積、商仍在複數集中，但複數間却沒有大小關係等等。然而從某些數集的特殊性質裡，也可以找到一些共同的性質，譬如在Z、R、D、K等數集中，都可以進行加法、減法、乘法、運算，其和。差、積仍屬於原數集中，在R、D、K等數集中，可以進行加法、減法、乘

法、除法（以〇除除外）的運算，其和、差、積、商仍屬於原數集中等等。我們就着一些共同的性質，來討論一些價值更大的數集，先定義數環。

定義。凡是能够進行加法、減法及乘法運算的數集，即其中任意二數的和、差、積仍屬於其中的數集，叫做數環，上述的Z，R，D，K都是數環，但正整數集，不是數環，負實數集也不是數環。是否只有上述的四個數集才是數環呢？不是，數環是很多的，我們現在舉幾個例子：

1．偶數集是數環，但奇數集不是數環。

2．分母是2的乘幂之既約分數的全體是數環。

3．a，b 爲任意有理數，則形如 $a+b\sqrt{2}$的數集是數環，這個數環含有理數集及$\sqrt{2}$.

實際上，在形如$a+b\sqrt{2}$的數集中，任意兩個數$a_1+b_1\sqrt{2}$及$a_2+b_2\sqrt{2}$的和爲$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}$，差爲$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2}$積爲$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_3+b_3\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$，顯然都是$a+b\sqrt{2}$的形式，係數也都是有理數，因此這個數集是數環。當 a 爲任意有理數 b 爲0時，則得出全部有理數。而當 a 爲零，b 爲1時，則爲$\sqrt{2}$故有理數集及$\sqrt{2}$都被包含在這個數環中。

4．a，b 爲任意偶數時，形如 $a+b\sqrt{2}$的數集也是數環。

5．a，b 爲任意有理數，形如$\sqrt[3]{2}$的數集不是數環，因爲$\sqrt[3]{2}$同它自己的乘積不能寫成$a+b\sqrt[3]{2}$的形式。但所有形如

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$$

的數集構成數環，其中 c 也是任意有理數，其證明留給讀者。

6．現在來考察讀者所熟悉的數π，它同有理數經過有限次的加、減、乘三種運算而產生的所有實數，也構成數環.

實際上，這樣的數都可以表示成

$$a_0+a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots\cdots+a_n\pi^n \tag{1}$$

的形式，其中$a_0, a_1, \cdots, a_n$都是有理數，n 爲非負整數。而任意兩個（1）形之數的和、差、積仍爲（1）形的數，故構成數環。

以上的一些例子都是在實數範圍裡的，在複數的範圍裡，也可以舉出一些數環的例子來，由於我們對於複數還需要重新建造，所以在這裡暫時不舉。

數環的例子是不勝枚舉的，在這些數環裡，再討論一種最重要的特殊的數環，即數體（域）。

定義。若一數環中任意二數的商（除數不得爲0）仍在其中，則此數環稱爲數體（數域），但是只含有一個數零的數集，不是數體，因爲在其中並沒有除法。所以在數體的條件上，實質上還限制着至少含有兩個不同的數之數環，或者至少含有一個不等於零的數之數環。

以上我們曾經見到R，D，K中都能實行除法，所以都是數體。即有理數體，實數體，複數體，但整數環不是數體。

在數環中的一些例子裡，有的是數體，有的不是數體。顯然例1和例2都不是數體因爲在其中不能實行除法；而例3是數體.

實際上，任意兩個數$a_1+b_1\sqrt{2}$及$a_2+b_2\sqrt{2}$，如$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，則$a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$.

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})\ (a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})\ (a_2-b_2\sqrt{2})}=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+$$

$$\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$$

其商仍爲$a+b\sqrt{2}$的形式，且其係數也都是有理數，故此數環是數體。同理，我們將$\sqrt{2}$換爲R中任意一個非平方數的平方根時，也都可以構成數體。

讀者以後會知道，當a，b，c爲任意有理數時，形如

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$$

的數集也構成數體。

從上面這些數體的例子裡，我們可以看到它們都含有有理數體，但是否所有的數體都包含有理數體呢？我們有下面的定理.

定理。任何數體內均含有有理數體R.

證明。用p 表示任一數體，因爲數體中最少要有兩個不相同的數，當然P中最少有一個不爲零的數，沒a爲P中任一不爲零的數，則p含有a除a的商卽1.以1與其自已重複相加，可得出全部整數也屬於P. 在P中也含有差a—a，卽零，及零減任一正整數的差，卽全部負整數。在p中也含有任二整數（分母不爲0),的商，卽全部有理數，所以任一數體P均含有有理數體R。

由此也推得有理數體是最小的數體。

掌握了數環和數體的概念，我們就開始在任意的數體上展開綫性代數初步的討論。

§2. 二階與三階行列式

在中學我們曾經初步討論了二元一次聯立方程式，知道了求解公式及其各種情形，但理論上很不嚴整。爲了掌握普遍的理論，在這兩章裡我們來研究帶有許多未知量的綫性方程組，卽多元一次聯立方程組。爲了討論方便起見，首先規定用 x_1，$x_2,\cdots,x_n$ 表示未知量. 用a_{ij} …表示各未知量的係數，用b_i 表示常數項，下標 i 表示第 i 個方程式；j 表示第 j 個未知量，我們所討論的方程式，其係數屬於一固定的數體 P，卽a_{ij}及b_i 都是數體 P的數。於是綫性方程組的一般形式可以寫成：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+a_{s3}x_3+\cdots\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{array}\right\} \quad (1)$$

將方程組（1）的係數寫成下表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1}n \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots a_{2}n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{31} & a_{32}\cdots\cdots\cdots a_{3}n \end{pmatrix} \tag{2}$$

稱爲s 行 n 列矩陣，aij 稱爲矩陣的元素。如果s=n 則稱爲 n 階矩陣， 或方陣。

從左上方到右下方的對角綫（亦卽由元素 a_{11}，a_{22}，…anu 所 組 成 的）稱爲主對角綫.

從右上方到左下方的對角綫（亦卽由元素 $a_{2}n_{-1}$，…，an_{1} 所組成的）稱爲第二對角綫.

如果有一組數 k_1，k_2，…，kn，用ki 代替對應的未知量 xi後， 方程組（1）都成爲恒等式時，則這組數 ki 稱爲方程組（1）的解.

如同在中學看到的一樣綫性方程組可能含有唯一解，可能含有很多的解，也可能沒有解例如，方程組

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2&=1, \\ 6x_1-2x_2&=2 \end{aligned}\right\}$$

就有無窮的解：$x_1=k$，$x_2=3k-1$，不論 k 爲任何數都是方程組的解，而 方 程組

$$\left.\begin{aligned} x_1+5x_2&=1, \\ x_1+5x_2&=7 \end{aligned}\right\}$$

就沒有解，任何一組數都不能使這兩個方程式同時成爲恒等式，這樣的方程組叫做矛盾方程組.

綫性方程組的問題，主要是判斷方程組是否有解？有若干解？如何求解？普遍的理論在第二章中討論。在本章裡只就方程式的個數等於未知量的個數而且僅有唯一解的特殊情形來討論。

首先從含有兩個與三個未知量的綫性方程組開始，設已予有兩個未知量兩個方程式的綫性方程組.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

其係數構成矩陣.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

對（3）式用消去法，我們得出

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}b_2-b_1a_{22}.$$

設$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，則

$$x_1=\frac{b_1\ a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (4)$$

將這組值代入方程組（3），容易驗證是組（3）的解，關於這一個解的唯一性的問題，以後就可以看到.

（5）式的公分母，可經矩陣（4）的元素表示出來，它等於主對角綫上元素的乘積，減去另外兩個元素的乘積. 這個數稱爲矩陣（4）的行列式. 因爲矩陣是一個二階方陣，所以也叫做二階行列式，用下面符號表示之:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (6)$$

乘積$a_{11}a_{22}$及$a_{12}a_{21}$稱爲二階行列式的項.

例如，

（1） $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot4-7\cdot1=5;$

（2） $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot5-(-2)3=11.$

顯然能看出矩陣與行列式的區別，矩陣是一些數排成的表，而行列式却是一個數。

在（5）式中，分子和分母有相類似的形狀，當然分子也可以表爲二 階 行 列

式，其中x_1的分子，是從矩陣（4）中，把第一列換爲組（3）的常數項列所決定的行列式，而x_2的分子是從矩陣（4）中把第一列換爲組（3）的常數項列所決定的行列式.

現在可以把（5）式寫成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

於是得到了關於含兩個未知量兩個方程式的綫性方程組之求解法則（克萊姆法則）：

如果方程組（3）的係數矩陣（4）的行列式（6）不等於零，那麼我們可以這樣來得出組（3）的解，解都是分數，以行列式（6）爲其公分母，而未知量x_i（$i=1,2$）的分子是從矩陣（4）中，把第 i 列（亦即所求未知量的係數列）換爲組（3）的常數項列所得出的行列式.

例. 解方程組

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2&=7, \\ x_1-3x_2&=-2, \end{aligned}\right\}$$

其係數行列式爲

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7;$$

其值不爲零，故可應用克萊姆法則求解，分子應各爲

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11$$

於是得到了方程組的解爲

$$x_1=\frac{19}{7}, \quad x_2=\frac{11}{7}.$$

引入二階行列在解含兩個未知量的兩個綫性方程組時，並不感到簡便，但是用

同樣的方法對於含三個未知量三個方程式的綫性方程組，却很有用。

設已予方程組

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\
&a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其係數方陣爲

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{pmatrix}.
\tag{9}
$$

如果我們在方程組（8）中，以$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$乘第一式的兩端，以$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$乘第二式的兩端，以$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘第三式的兩端，而後將三個方程相加，顯然可以得出$x_2$與$x_3$的係數都等於零，亦即這兩個未知量同時消去，我們得出等式.

$$
(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})\,x_1=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{12}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.
\tag{10}
$$

在這一等式中，x_1的係數稱爲矩陣（9）的三階行列式.以下列的符號表示之：

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}
-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.
\tag{11}
$$

雖然三階行列式的表示式是很繁雜的，但是它從矩陣（9）的元素來組成是非常簡易的。事實上，在表示式（11）中，含有正號的三項裡有一項爲主對角綫上三個元素的乘積，其它二項是位於主對角綫的平行綫上之元素與其對角上之元素的乘積，其中有負號的三項，可以從第二對角綫類似的得出，於是我們得一個計算三階

行列式的方法，可以很快的求得結果，其規則如下圖

三階行列式共有六項，左圖爲共三個正項，右圖爲共三個負項。

例子.

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot21(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3$$
$$=30+2-24-12+20-6=10.$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot30+0\cdot2\cdot1+(-5)(-2)(-2)-(-5)\cdot3\cdot1-$$
$$0(-2)\cdot0-1\cdot2(-2)=-20+15+4=-1.$$

回頭再來研究等式（10），其右節仍是一個三階行列式，它是將矩陣（8）中，第一列換爲組（8）的常數項列所決定的行列式，如果我們以符號 d 來表示行列式（11），以 d_j 表示將矩陣（9）中第 j 列換爲常數項列所決定的行列式，於是等式（10）成爲 $dx_1=d_1$ 的形狀，故當 $d\neq0$ 時，

$$x_1=\frac{d_1}{d}. \tag{12}$$

用同樣的方法，以 $a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$，$a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$ 依次乘組（8）的各方程式，我們得出

$$x_2=\frac{d_2}{d}. \tag{13}$$

最後，以 $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$，$a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 依次乘組（8）的各方程式我們得出

$$x_3=\frac{d_3}{d}. \tag{14}$$

把表示式（12）—（14）代入方程組（8）中，經過整理顯然可以看到，組

（8）都成為恒等式。所以如果含三個未知量三個方程式的綫性方程組的係數行列式不為0，則可用克萊姆法則求解，其求法和含兩個未知量兩個方程式的綫性方程組的情形是很相像的.

例如，解方程組

$$\left.\begin{aligned} &2x_1-x_2+x_3=0,\\ &3x_1+2x_2-5x_3=1,\\ &x_1+3x_2-2x_3=4.\end{aligned}\right\}$$

這個方程組的係數行列式不為零：

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=28.$$

故可用克萊姆法則求解，其分子行列式各為

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=13,\qquad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=47,$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=21,$$

亦即方程組的解是.

$$x_1=\frac{13}{28},\qquad x_2=\frac{47}{28},\qquad x_3=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

§3. 對換和置換

在上面我們看到了應用二階和三階行列式，根據克萊姆法則，可以求某些綫性方程組的解。為了討論未知量的個數和方程式的個數，不只限於2個或3個的情

形，我們需要引進 n 階行列式的定義和它的性質，因此，我們先來討論兩個新的概念，即對換和置換.

假設在一個含有 n 個元素的某一個排列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,am$$

中，任意交換兩個元素的位置，如a_1 和a_3 相交換，其餘的都不變，我們就可以得到一個新的排列

$$a_3,\ a_2,\ a_1,\cdots,an$$

這種對排列的變換方法叫做對換，並用記號（a_1，a_3）表示之.

重復利用對換的方法可將 n 個元素的任意一個排列，換成這 n 個元素另外的任意個排列。實際上，可由排列的前面開始，根據需要做對換，由於元素的個數是有限的，顯然經過有限次對換即可得到我們所要求的排列。

排列中，元素本身的性質如何是無關緊要的，主要的是下標 的 順 序，故可以 1，2，…，n. 爲元素討論之。

在一個排列中任意二數 i 和 j ，如 $i<j$ 而 j 位於 i 的前 面 時 ， 則 ij 講 成一個反序，一個排列中共有共若干個反序，這個反序的個數，叫做這個排列的反序數例如，排列 132 的反序數爲1，而 312的反序數爲 2。計算反序數的方法是先計算有多少個數排在 1 的前面，然後把 1 劃去，再計算有多少個數排在 2 的前面，然後在劃去 2 等等，其餘依此類推下去，如果 1 前面有m_1個數，2 前面有m_2 個 數，…，n 前面有m_n 個數，則這個排列的反序數應等於 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 反序數是偶數的排列叫做偶排列，反之叫做奇排列，例如，1，2，…，n對於任意正整數 n 都是偶排列，因其反序數爲零。排列451362的反序數是 8 ，所以是一個偶排列，而排列38524671的反序數爲15，所以是一個奇排列。

定理 1．每一個排列經過一個對換都變更它的奇偶性.

證明．首先討論一個特殊的情形，當排列中相鄰的兩個數對換時，換句話說，假設所與的排列是AijB的形式，A表示 i 前邊的一些數，B表示 j 字 後邊的一些數，施

以對換（ij）後，得到AjiB．顯然經過這樣的對換，i與A及B間的反序數並沒有受到變化。j也是這樣。在排列AijB中，如果ij是依自然順序排列着的，那麼在AjiB中ji就有一個反序。由此，我們知道經過一次對換後增加了一個反序；反之，假如在AijB中ij有一個反序，經過對換後反序數就減少了一個，無論是那種情形反序的數目都產生了±1的變化，換句話說，就是變更了排列的奇偶性。

現在再討論一般的情形，設在ij之間有m個數，就是說所與的排列是

$$Aii_1i_2\cdots i_mjB$$

的形式．

先使i向後面移動，依次與i_1，i_2，…，i_m對換，經過m次對換後得到排列

$$Ai_1i_2\cdots i_mijB.$$

其次再使j向前移動，依次與i，i_m，…，i_1對換，經過m＋1次對換後得到

$$Aj\,i_1i_2\cdots i_m\,iB,$$

在此共需要經$m+(m+1)=2m+1$次相鄰二數的對換，使i排在j的位置，而使j排在i的位置．每一次相鄰二數的對換都變更排列的奇偶性，而$2m+1$又是一個奇數，所以這個對換將排列的奇偶性變更了奇數次，也就是說，每一個排列經過一個對換都變更了它的奇偶性．

於是我們可以得到，當$n\geq 2$時在全部n個數的排列中，有$\frac{n!}{2}$個偶排列及$\frac{n!}{2}$個奇排列．

實際上，在中學我們已經知道n個數共可以構成n！個不同的排列，僅設在這n！個排列中，有p個偶排列及q個奇排列，如果對於每一個偶排列都施以同一的個對換，例如（1，2）由上面證明的定理可知都變成爲奇排列，而且任何兩個都不相同。由此得$p\leq q$．

同樣，如果對於每一個奇排列，都施以同一的個對換（1,2），則得出q個不同的偶排列，這就是說$q\leq P$．　由於$q\leq P$及，$P\leq q$，就得出$P=q$的結論．亦即$P=q=\frac{n!}{2}$．

我們再來討論一個較對換更爲普遍的運算——置換.

在 n 個元素組成的有限集合中，對於它自已的一個一一對應叫做 u 級置換；如在所給予的置換中，數 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 對應於di，則置換A可以寫爲：

$$A=\begin{pmatrix}1, & 2,\cdots\cdots, & n\\ d,_1, & d_2,\cdots, & dn\end{pmatrix} \tag{1}$$

亦卽在$1,2,\cdots,n$每一個數的下面，寫上它所對應的數，從一一對應知數ai $(i=1,2,\cdots,n)$是彼此相同的，亦卽第二行是數$1,2,\cdots,n$的某一個排列。

顯然對換是一種特殊的置換，這是一種數$1,2,\cdots,n$對它自已的的一個一對應，除兩個數彼此互相對應外，其餘都是自已對應自已，卽$(ij)=\begin{pmatrix}1\cdots i\cdots j\cdots n\\ 1\cdots j\cdots i\cdots n\end{pmatrix}$. 而所有的元素都沒有變動的一一對應叫做恒等置換，卽 $E=\begin{pmatrix}12\cdots\cdots n\\ 12\cdots\cdots n\end{pmatrix}$.

在（1）中的第一行是按照自然數的的次序寫出的，但也可以寫成任何一個排列，只是第二行必須相應的加以變更。如

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3&1&4&2\\2&4&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&3&4&2\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&3&4&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$等等，都是同一個四級置換的不同寫法，因爲所有這些寫法都是數 1，2，3，4 的集合中自身的一個一一對應，在任一寫法中都使 1 對應 4，2 對應 1，諸如此類. 其中第一行按自然數順序排列的形式爲標準形式反之，任意 n 個元素的兩個排列，把某一個放在另一個的下面，都確定一個 n 級置換.

每一個 n 級置換都可以寫成標準形式. 在這種寫法下，不同的置換，下面一行的排列也是不同的，所以 n 級置換的個數等於 n 個元素的排列數，亦卽等於 n！，

構成任一置換

$$A=\begin{pmatrix}i_1, & j_2,\cdots, & in\\ d_1, & d_2,\cdots, & du\end{pmatrix} \tag{1}$$

的兩個排列，其奇偶性不一定是相同的。但與寫法無關，卽不論怎樣表示. 奇偶性相同的置換永遠相同，相異的置換永遠相異，前一種置換叫做偶置換而後一種叫做奇置換顯然恒等置換是偶置換，而對換是奇置換.