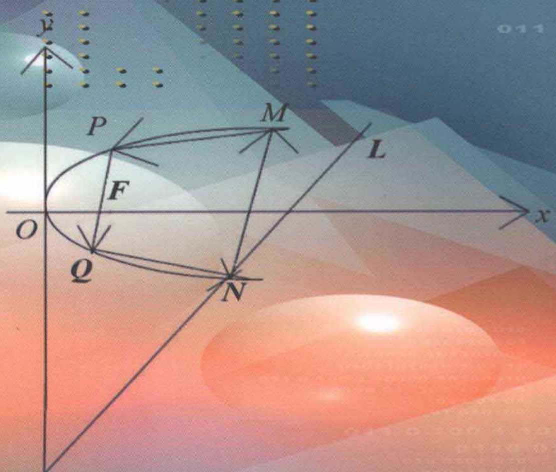
新世纪

面向21世纪高等院校教材

高等数学

（下）

主编　邱淦俤



大连理工大学出版社

新世纪

面向21世纪高等院校教材

高等数学

（下）

主编 邱淦俤

副主编 白黎明 吴学玲 符方健 陈金通

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 邱淦俤主编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2010.10

面向21世纪高等院校教材

ISBN 978-7-5611-5691-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①邱… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第147728号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路80号　邮政编码：116023

发行：0411-84708842　邮购：0411-84703636　传真：0411-84701466

E-mail：dutp@dutp.cn　URL：http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　印张：11.25　字数：258千字

印数：1～3000

2010年10月第1版　　2010年10月第1次印刷

责任编辑：欧阳碧蕾　　责任校对：周双双

封面设计：张　莹

ISBN 978-7-5611-5691-9　　定　价：22.00元

前　言

随着高等教育改革的不断深入开展和科学技术的迅猛发展，高等数学不仅在理工学科中有着举足轻重的基础地位，而且在人文学科以及经济发展中有着十分重要的应用. 因此，高等数学课程不仅为学生学习相关学科及后续课程提供了必备的基础知识，同时也向学生灌输、渗透数学思想和数学方法，提高学生的数学能力.

本教材以“数学思想是数学教学的灵魂”为指导思想，在数学的知识、能力和素质三个方面构建教学体系，尽力突出高等数学的基本思想、基本理论与基本方法，注重培养学生的创新意识、创新精神和创新能力，提高学生发现问题、提出问题和解决问题的实际应用能力.

本教材按照教育部关于高等数学课程教学的基本要求，在内容的组织上力求兼顾理工与经管类不同层次的教学与学习需要，以便各专业能根据不同需求有所侧重与取舍.

为使学生更好地掌握所学知识，提高实际应用能力，本教材在每章后均配备大量的练习题、自测题和总复习题，以适应不同层次学生的不同学习需要.

本教材共分五章：第七章无穷级数；第八章微分方程；第九章向量代数与空间解析几何；第十章多元函数的微分学；第十一章多元函数的积分学.

本教材由宁德师范学院邱淦俤担任主编，由厦门软件职业技术学院白黎明、贵阳职业技术学院吴学玲、琼台师范高等专科学校符方健、泉州儿童发展职业学院陈金通担任副主编. 贺

爱军参与了本教材的编写.

本教材在编写过程中,得到了宁德师范学院数学系及兄弟院校诸多教师的帮助,在此一并向他们表示衷心的感谢.

鉴于编者知识与水平的局限,教材中错误与疏漏之处在所难免,敬请专家、读者不吝赐教.

所有意见和建议请发往:gzjckfb@163.com
欢迎访问我们的网站:http://www.dutpgz.cn
联系电话:0411—84707492　84706104

编　者
2010年10月

目　　录

第 7 章　无穷级数 …… 1

7.1　常数项级数 …… 1

7.1.1　级数定义及敛散性 …… 1

7.1.2　无穷级数的基本性质 …… 3

习题 7-1 …… 4

7.2　常数项级数的收敛性判别法 …… 5

7.2.1　正项级数及其收敛性判别法 …… 5

7.2.2　交错级数及其判别法 …… 9

7.2.3　绝对收敛与条件收敛 …… 10

习题 7-2 …… 10

7.3　幂级数 …… 12

7.3.1　幂级数及其收敛区间 …… 12

7.3.2　幂级数的运算 …… 14

习题 7-3 …… 15

7.4　函数展开成幂级数 …… 16

习题 7-4 …… 19

7.5　傅立叶(Fourier)级数 …… 19

7.5.1　三角级数 …… 20

7.5.2　周期为 2π 的周期函数展开成傅立叶级数 …… 20

7.5.3　周期为 $2l$ 的周期函数展开成傅立叶级数 …… 24

习题 7-5 …… 26

第 7 章　自我测验题 …… 27

第 7 章　总复习题 …… 27

第 8 章　微分方程 …… 29

8.1　基本概念 …… 29

习题 8-1 …… 30

8.2　一阶微分方程 …… 30

8.2.1　可分离变量方程 …… 30

8.2.2　齐次方程 …… 32

8.2.3　线性方程 …… 33

8.2.4　全微分方程 …… 37

习题 8-2 …… 38
8.3 几类特殊的高阶微分方程 …… 38
习题 8-3 …… 40
8.4 二阶常系数线性微分方程 …… 40
8.4.1 二阶常系数齐次线性方程 …… 40
8.4.2 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 44
习题 8-4 …… 48
第 8 章 自我测验题 …… 48
第 8 章 总复习题 …… 50
第 9 章 向量代数与空间解析几何 …… 52
9.1 向量代数 …… 52
9.1.1 空间直角坐标系与点的坐标 …… 52
9.1.2 向量的概念 …… 53
9.1.3 向量的线性运算 …… 53
习题 9-1 …… 58
9.2 空间中的平面和直线 …… 59
9.2.1 平面及其方程 …… 59
9.2.2 直线及其方程 …… 61
习题 9-2 …… 65
9.3 空间的曲面和曲线 …… 65
9.3.1 球面、柱面、锥面、旋转曲面 …… 65
9.3.2 标准二次曲面 …… 68
习题 9-3 …… 69
第 9 章 自我测验题 …… 70
第 9 章 总复习题 …… 70
第 10 章 多元函数的微分学 …… 72
10.1 二元函数的概念 …… 72
习题 10-1 …… 72
10.2 二元函数的极限与连续 …… 73
10.2.1 二元函数的极限 …… 73
10.2.2 二元函数的连续性 …… 74
习题 10-2 …… 74
10.3 偏导数与全微分 …… 75
10.3.1 偏导数的概念 …… 75
10.3.2 偏导数的几何意义 …… 76
10.3.3 高阶偏导数 …… 77
10.3.4 全微分 …… 77

习题 10-3 …… 79
10.4 多元复合函数的求导法则 …… 79
10.4.1 多元函数与一元函数的复合 …… 79
10.4.2 多元函数与多元函数的复合 …… 80
习题 10-4 …… 81
10.5 隐函数求导公式 …… 81
习题 10-5 …… 82
10.6 二元函数的极值与最值 …… 83
10.6.1 二元函数的极值 …… 83
10.6.2 二元函数的最值 …… 84
习题 10-6 …… 86
10.7 条件极值与拉格朗日乘数法 …… 86
习题 10-7 …… 89
10.8 最小二乘法 …… 89
习题 10-8 …… 91
10.9 偏导数在几何上的应用 …… 91
10.9.1 空间曲线的切线与法平面 …… 91
10.9.2 曲面的切平面与法线 …… 92
习题 10-9 …… 94
第 10 章 自我测验题 …… 94
第 10 章 总复习题 …… 95

第 11 章 多元函数的积分学 …… 98
11.1 二重积分 …… 98
11.1.1 曲顶柱体的体积 …… 98
11.1.2 平面薄片的质量 …… 99
11.1.3 二重积分的定义 …… 99
11.1.4 二重积分的性质 …… 100
11.1.5 二重积分的直角坐标计算法 …… 101
11.1.6 二重积分的极坐标计算法 …… 104
习题 11-1 …… 107
11.2 三重积分 …… 109
11.2.1 三重积分的定义与计算公式 …… 109
11.2.2 柱面坐标与球面坐标的三重积分计算公式 …… 110
习题 11-2 …… 114
11.3 二、三重积分的应用 …… 115
11.3.1 物理中的应用 …… 115
11.3.2 几何上的应用 …… 118
习题 11-3 …… 122

11.4 曲线积分 …… 123
11.4.1 对弧长的曲线积分 …… 123
11.4.2 对坐标的曲线积分 …… 126
11.4.3 格林(Green)公式 …… 130
11.4.4 平面上第二型曲线积分与路径无关的条件 …… 132
习题 11-4 …… 134
11.5 曲面积分 …… 135
11.5.1 第一型曲面积分 …… 135
11.5.2 第二型曲面积分 …… 137
11.5.3 奥—高公式 …… 138
11.5.4 斯托克斯公式 …… 140
习题 11-5 …… 141
第 11 章 自我测验题 …… 142
第 11 章 总复习题 …… 143
习题答案与提示 …… 147
附 录 …… 161
附录 1 积分表 …… 161
附录 2 Mathematica 入门 …… 169

第 7 章

无穷级数

无穷级数是高等数学的重要组成部分，它是表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的一种工具.本章介绍无穷级数的概念和性质，讨论常数项级数的收敛、发散判别法，以及幂级数的一些最基本的结论和初等函数的幂级数展开.

7.1 常数项级数

7.1.1 级数定义及敛散性

给定数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数，简称为级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 u_1 叫做首项，第 n 项 u_n 叫做级数的一般项或通项.有时也将 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 简记为 $\sum u_n$.

记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和，当 n 依次为 1,2,3,… 时，便得到一个新的数列

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

数列 $\{S_n\}$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列.

定义 1 若部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称极限值 S 为级数的和，记作 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$；如果 $\{S_n\}$ 没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.发散级数没有和.

当级数收敛时，级数的和与部分和的差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的余项.

例 1 讨论等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots (a \neq 0)$$

的敛散性(这个级数又称为几何级数).

解 由等比级数前 n 项和公式,如果 $|q| \neq 1$,则部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

因为当 $|q| < 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

级数收敛;

当 $|q| > 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$,所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

级数发散;

当 $q = 1$ 时,$S_n = na$,$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,级数发散;

当 $q = -1$ 时,这时,级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots,$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ a & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在,级数发散.

综上所述,当 $|q| < 1$ 时,等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛;当 $|q| \geqslant 1$ 时,等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

例 2 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$$

的敛散性.

解 由于 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$,于是

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ 收敛且其和为 1.

7.1.2 无穷级数的基本性质

根据级数的收敛及发散的定义可知,级数的敛散性问题实际上就是级数的部分和数列的极限存在与否的问题,因此,根据数列极限的有关性质,容易得到级数的一系列重要性质.

性质 1 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$C$为常数,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Cu_n$收敛且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}Cu_n=C\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

性质 2 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$的部分和分别为$S_n,\sigma_n,\tau_n$,则有

$$\begin{aligned}\tau_n&=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_n)\pm(v_1+v_2+\cdots+v_n)\\&=S_n\pm\sigma_n.\end{aligned}$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,设它们分别收敛于$S,\sigma$,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$$

这就证明了$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=S\pm\sigma.$

性质 2 说明收敛级数可以逐项相加或逐项相减.

性质 3 在级数的前面加上或去掉有限项,不影响级数的敛散性.

性质 4 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$S$,则对其各项任意加括号后所得级数仍收敛,且其和不变.

注意:原级数收敛,加括号后所成的新级数也收敛,但反之不然,即如果加括号后级数收敛,则原级数未必收敛.例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0,但级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的.

性质 5(级数收敛的必要条件) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列为$\{S_n\}$,由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则部分和数列$\{S_n\}$的

极限存在,记作$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = S$.

又由 $u_n = S_n - S_{n-1}$,则

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}S_n - \lim_{n\to\infty}S_{n-1} = S - S = 0$$

这一性质告诉我们,如果级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 的一般项 u_n 不趋于零,则级数一定是发散.但是,一般项 u_n 趋向于零的级数不一定收敛.

例 3 判别级数

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} + \cdots$$

的敛散性.

解 由于 $u_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}$不存在,即 $n\to\infty$ 时,u_n 不趋向于 0,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ 发散.

习题 7-1

1. 设 $S = 1+2+4+8+16+\cdots$,那么 $2S = 2+4+6+16+32+\cdots = S-1$,从而得 $S=-1$ 这个结果对吗?为什么?

2. 用以下指明的方法,证明级数 $1+2r+2r^2+\cdots+2r^n+\cdots$,当$|r|<1$ 时收敛,它的和为$(1+r)/(1-r)$:

(1) 从 $-1+2(1+r+r^2+\cdots)$ 出发;

(2) 从 $1+2(r+r^2+r^3\cdots)$ 出发;

(3)$1+r+r^2+\cdots$ 与 $r+r^2+r^3\cdots$ 相加出发;并说明这样做的每一步的根据.

3. 当级数 $q+\frac{q}{1+q}+\frac{q}{(1+q)^2}+\cdots+\frac{q}{(1+q)^n}+\cdots$ 收敛时,求它的和.

4. 判别下列各级数是收敛的还是发散的:

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; (2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$; (3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$; (4)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$;

(5)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n}$; (6)$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$;

(7)$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}+\cdots$.

5. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 收敛,并求它的和.

$\left[\text{提示:}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

7.2 常数项级数的收敛性判别法

7.2.1 正项级数及其收敛性判别法

若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $u_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，由于 $u_n \geqslant 0, S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 必为单调增加数列，根据单调有界数列必有极限及收敛数列必有界的性质可得到正项级数收敛的充要条件.

定理 1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 1 判别调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 假定该级数收敛，设它的部分和为 S_n，且 $S_n \to S(n \to \infty)$，则对 S_{2n}，有 $S_{2n} \to S$，于是

$$S_{2n} - S_n \to S - S = 0(n \to \infty),$$

但另一方面

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

即

$$S_{2n} - S_n \not\to 0 \quad (n \to \infty),$$

与前面的结论矛盾，这矛盾说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

这个例子也说明了 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛.

定理 2（比较判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $u_n \leqslant v_n (n = 1,2,\cdots)$，

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证 (1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和为 σ_n，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛知 σ_n 有界，即存在 $M > 0$，使 $\sigma_n \leqslant M$，又

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leqslant v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \sigma_n$$

所以 $S_n \leqslant M$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则部分和数列 $\{S_n\}$ 必趋向无穷大，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的对应项 $v_n \geqslant u_n$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和数列 $\{\sigma_n\}$ 也趋向无穷大，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

由于级数的每一项同乘以一个不为零的常数 k，以及去掉级数的有限项不会影响级数的敛散性，所以可以把比较判别法的条件适当放宽，得到如下结论：

推论 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，满足 $u_n \leqslant kv_n$（$n > N$，N 为某一正整数）

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

解 因为 $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$，而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 发散.

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ 的敛散性.

解 因为 $n^2-n+1 > \frac{n^2}{2}$，所以 $\frac{1}{n^2-n+1} < \frac{2}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ 收敛.

例 4 讨论 $p-$ 级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots (p > 0)$$

的敛散性.

解 当 $p \leqslant 1$ 时，$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$，由于调和级数是发散的，根据比较法当 $p \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p > 1$ 时，设 $p-$ 级数的部分和为 S_n，由于 $S_n < S_{n+1}$，且

$$\begin{aligned}
S_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p} \\
&= 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}\right] + \left[\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^p}\right] \\
&< 1 + 2\left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}}\left[1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} S_n = 1 + 2^{1-p} S_n
\end{aligned}$$

于是 $S_n \leqslant S_{2n+1} \leqslant 1+2^{1-p}S_n$，即 $S_n \leqslant \frac{1}{1-2^{1-p}}$，因此部分和数列$\{S_n\}$有界. 当 $p>1$ 时，p－级数收敛.

因此，当 $p \leqslant 1$ 时，p－级数发散；当 $p>1$ 时，p－级数收敛.

推论（比较判别法的极限形式） 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,$$

则

（1）当 $0<l<+\infty$ 时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

（2）当 $l=0$ 时，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

（3）当 $l=+\infty$ 时，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

例 5 判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛，由比较判别法的极限形式可知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 是收敛的.

定理 3（比值判别法） 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数（且当 $n>N$ 时 $u_n>0$），如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

则

（1）当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

（2）当 $\rho>1\left(或\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty\right)$时，级数发散；

（3）当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

证 （1）由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$，根据极限定义$\exists N$，使当 $n>N$ 时有（$\rho<q<1$）

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1$$

即

$$u_{n+1}\leqslant qu_n,\ u_{n+2}\leqslant qu_{n+1}\leqslant q^2u_n,\cdots,$$

于是

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}q^{n-N-1}u_{N+1}=u_{N+1}\cdot q^{N-1}\cdot\sum_{n=N+1}^{\infty}q^n$$

由于 $0<q<1$,所以 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} q^n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收敛,根据级数收敛性质知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 时,易见 $\{u_n\}$ 单调递增,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 当 $\rho=1$ 时,级数可能收敛也可能发散. 例如:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

根据 p—级数的收敛性知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

又调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = 1,$$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

所以当 $\rho=1$ 时,必须另找其它方法进行判别.

例 6 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1,$$

由比值判别法知,级数收敛.

例 7 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$$

由比值判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!}$ 收敛.

例 8 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} > 1,$$

由比值判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散.

与比较判别法相比,比值判别法用起来比较简便,只要根据 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 的值就可以判定