高級中学課本代数第三册

教学参考资料

（下 册）

江苏人民出版社

说　明

这册教学参考資料，是在南京市教育局组织編写的高級中学三年級代数教材研究函授讲义的基础上改編而成的。全书分上下两个分册出版，供高三上下两学期使用。

改編这册教学参考資料的意图，主要是提供一些資料，帮助教师备課。內容包括“教材研究”、“参考材料”、“参考題”三部分。教师在使用本书时，可根据教学具体情况，灵活运用，不要受其限制。

由于編者水平有限，編写时間比較匆促，缺点和錯誤在所难免，希望教师和读者提出意见，以便再版时研究修改。

江苏省教育厅教材編輯室

1961 年 12 月

目　录

第十章 不 等 式

一、本章是在学生学过了一元一次不等式的解法的基础上，进一步系統地全面地介紹了不等式的意义、种类和基本性质，应用这些知识来证明不等式。然后通过同解不等式的定义和定理引入一元一次不等式、一元一次不等式组的解法。在此基础上对一元一次方程、二元一次方程组及其应用問题进行讨论。最后再通过实系数二次三項式的讨论引入一元二次不等式的解法。

二、本章的教学要求主要是：

1。使学生透徹的理解和牢固的掌握不等式的意义和基本性质；

2。使学生能应用不等式的定义和基本性质来证明不等式，以培养学生分析、綜合、邏輯推理的能力；

3。使学生理解同解不等式的意义和同解不等式的定理，并能运用它們正确熟练地解不等式；

4。使学生明确一元一次方程和二元一次方程组讨论的意义与方法，并能根据未知数許可值的范围求出适合应用問題的解；

5。使学生理解实系数二次三項式讨论的意义和作用，并能应用这一知识来解一元二次不等式。

三、本章的重点是不等式的基本性质、不等式的同解定理和不等式的解法，这些知识中尤其是不等式的基本性质应使学生牢固掌握。因为不等式的同解定理、一元一次不等式及不等式组的解法和讨论，一元一次方程的讨论、二元一次方程组的

讨论以及实系数的二次三項式的讨论等，都需用这些性质来验证；在生产劳动中也常会遇到用初等方法求函数的最大值或最小値問題；在高等数学中，也常要用到有关絕对値不等式的知识，所以在本章教学这部分教材时应予以足够的重視。

四、清楚的理解两数的差大于、等于或小于零是确定两数大小的唯一手段，也是学好不等式基本性质的关鍵。

五、本章教材教学时数估計約需 22 課时

第一单元：	§125—§128	7 課时
第二单元：	§129—§132	4 課时
第三单元：	§133—§134	3 課时
第四单元：	§135	2 課时
第五单元：	§136—§137	6 課时

第一单元 §125—128

教材研究

本单元首先是通过数軸上两个点的位置关系，说明了两数的差大于、等于或小于零与两数間大于、等于或小于的等价关系，以此为论据来证明了不等式的基本性质，然后通过不等式的基本性质引入了不等式的证明以及求某些初等函数的最大或最小值的問題。通过絕对値不等式的四个性质引入了絕对値不等式的证明。总的来说，本单元是以不等式的性质为基础来解决不等式的证明問題，以培养学生分析、綜合、邏輯推理的能力，并为下一单元不等式的同解定理以及解不等式打下基础。

一、本单元的教学要求主要是：

1. 使学生理解并掌握不等式的意义和基本性质；

2. 使学生能应用不等式的性质来比較两个代数式値的大

小以及证明不等式，以培养学生分析、綜合、邏輯推理的能力，

3。使学生能应用不等式的知识来求某些初等函数的最大或最小值。

二、本单元几个問題的研究：

1。在复数一章里我們知道任意两个复数間沒有大小的规定，因此本章里不等式的理论是在实数范围内来研究的。

2。課本§125所讲的 $a-b>0$ 和 $a>b$，$a-b<0$ 和 $a<b$ 以及 $a-b=0$ 和 $a=b$ 都是等价的，要证明甲式大于（或小于）乙式，只須证明甲式减去乙式所得的差大于（或小于）0即可，§126不等式的基本性质就是根据这一原則来进行证明的。

3。§127例1是一个很重要的不等式，今后有許多不等式要借助于本例来推证。本例实际上可看作是一个定理，幷可叙述成"两个正数的算术平均数不小于它們的几何平均数"，

即 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$(a>0,\ b>0)$ 当 $a\neq b$ 时不等号适用，当 $a=b$ 时等号适用。

这个定理可以得出两个推论：

推论Ⅰ：两个正量的积为一定时，其和以二量相等时为最小。

用不等式表示即：$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当积 ab 为定值，且 $a=b$ 时，和 $a+b$ 有最小值 $2\sqrt{ab}$。

推论Ⅱ：两个正量的和为一定时，其积以二量相等时为最大。

即 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当和 $a+b$ 为定值且 $a=b$ 时，积 ab 有最大值 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$。

可以要求学生把本例作为定理来記忆。

关于两个推论的应用，举例说明如下：

例 1　若 $y=ax+\frac{b}{x}$，$(a>0,\ b>0,\ x>0)$ 求 y 的最小值。

解　根据推论 I

$ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ab}$，仅当 $ax=\frac{b}{x}$，即 $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时，y 有最小值 $2\sqrt{ab}$。

例 2　求 $(2+3x)(3-2x)$ 的最大值。（习题 38 第 22 題）

解　将原式变换成 $\frac{1}{6}(4+6x)(9-6x)$，并設 $4+6x>0$，$9-6x>0$。

根据推论 II　有 $\frac{(4+6x)+(9-6x)}{2}\geqslant\sqrt{(4+6x)(9-6x)}$

仅当 $4+6x=9-6x$，即 $x=\frac{5}{12}$；且 x 的值符合：

$$4+6x=4+6\times\frac{5}{12}>0$$

以及 $9-6x=9-6\times\frac{5}{12}>0$ 时，

$(4+6x)(9-6x)$ 有最大值 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$。

由此可得，原式 $=(2+3x)(3-2x)=\frac{1}{6}(4+6x)(9-6x)$，有最大值 $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{24}$。

4. 不等式的证明：

若有 A、B 两个給定的代数式，如果对于式中变数允許值中的一切值，恒能使 $A>B$ 或 $A<B$，那末，我們说这个不等式对于变数在允許值范围内是恒成立的。如課本 §127 例 2 不等式

$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$，在变数 a, b, c 为互不相等的变数时恒成立。

又如不等式 $a+\frac{1}{a}>2$，只要变数 a 是不等于 1 的正数，这个不等式是恒成立的。

所以丢开了变数的允許値来研究不等式是无根据的。

証明不等式时，常須根据不等式的性质把不等式进行等价变換，直到可以判定不等式中的变数在允許値范围內恒成立为止，这才算証明完結。

由于不等式的形式和証明的方法是多种多样的，很难建立一种一般的方法，举例如下：

（1）比較法　要証明甲式大于（或小于）乙式，只要証明甲式減去乙式的差恒大于（或小于）零即可。

例　設 a、b 为任意实数，且 $a \neq b$，

求証 $a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2)$。

証　$\because$　$a^4+6a^2b^2+b^4-4ab(a^2+b^2)$

$$=(a^2+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)+4a^2b^2$$

$$=(a^2+b^2-2ab)^2$$

$$=(a-b)^4>0$$

由于 a 与 b 为不相等的实数，它們差的偶次冪必为正数，故原不等式成立。

（2）綜合法　就是利用某些已証过的正确的不等式如 $a^2+b^2>2ab$（a, b 为不等的实数）；$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$（$a, b$ 为任意实数）等等，作为基础，从这些式子开始，再应用不等式的性质导出所求証的不等式。

例　設 $a^2+b^2+c^2=1$，$x^2+y^2+z^2=1$，其中所有的字母均为实数。求証 $ax+by+cz \leqslant 1$。

证 $\because \quad a^2+x^2\geqslant 2ax;$

$b^2+y^2\geqslant 2by;$

$c^2+z^2\geqslant 2cz$。

将上面三个不等式相加得

$$a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2\geqslant 2(ax+by+cz)。$$

但 $a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2=2$，

即 $2\geqslant 2(ax+by+cz)$，

$\therefore \quad ax+by+cz\leqslant 1$。

（3）分析法　就是假定原不等式成立，应用不等式的性质和某些恒等变换，进行等价逆推，直到所得的不等式也成立。那末就证明了原不等式也成立。很显然，分析法的推论过程也就是綜合法的构思过程，所以分析法是培养学生邏輯推理能力的一个重要方面，在教学中应予足够重視。

例　如果a，b是不等的正数，求证 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$。

证　为了要证明　$a^3+b^3>a^2b+ab^2$，

必须先证　$(a+b)(a^2-ab+b^2)>ab(a+b)$，

$(\because \quad a+b>0)$

即　$a^2-ab+b^2>ab$，

$a^2-2ab+b^2>0$，

$(a-b)^2>0$。

由于a，b是不等的正数，所以最后的不等式是成立的，且每一步的推证都是可逆的，由此可知原不等式是成立的。

5. 变数涉及自然数的不等式，也常可用数学归納法来证明，如复习题十第7题(2)。

例： 用数学归納法证明 $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$。

$(a>0,\ b>0,\ n$ 是正整数)

证：（1）当$n=1$时，$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$；

当 $n=2$ 时，$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

$$\therefore\quad 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2,$$

$$(a-b)^2\geqslant 0。$$

显然不等式是成立的。

(2) 假設 $n=k$ 时不等式是成立的。

即 $\frac{a^k+b^k}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^k$ ……………………………(1)

令 $n=k+1$，要求证明

$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$ ……………………………(2)

也成立。

将不等式(1)两边同乘以 $\frac{a+b}{2}$（因由題設 $a>0$，$b>0$，故 $\frac{a+b}{2}>0$）

得 $\frac{a^k+b^k}{4}(a+b)\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$ ………………(3)

这样，不等式(2)及(3)的右端就成为相同的式子，这里特别指出的是只須证明不等式(2)的左端不小于不等式(3)的左端，也就是要证明不等式

$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}\geqslant\frac{(a^k+b^k)(a+b)}{4}$ ……………………(4)

成立，则不等式(2)也成立。由不等式(4)得

$$2(a^{k+1}+b^{k+1})\geqslant a^k\cdot b+a\cdot b^k+a^{k+1}+b^{k+1},$$

即 $a^{k+1}+b^{k+1}\geqslant a^kb+ab^k$ ……………………………(5)

将(5)改写成 $(a^k-b^k)(a-b)\geqslant 0$ ……………………(6)

若 $a>b$，则 $a^k>b^k$，那末不等式(6)的左端是两个正数的积。

若 $a=b$，则 $a-b=0$，那末不等式(6)的左端为 0 。

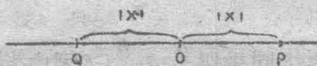
若 $a<b$,則 $a^k<b^k$,那末不等式(6)的左端是两个負数的积。

上面的三种情形都使不等式(6)成立。这就证明了当 $n=k+1$ 数时，原不等式也是成立的，故原不等式对于任意自然数 n 恒成立。

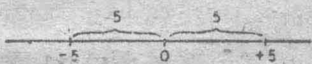
6。在讲絕对值不等式的性质时，建议先复习实数絕对值的定义，并使学生能明确实数絕对值的几何表示法，这对于学习課本 §128 以及今后学习高等数学都有一定的作用，根据实数絕对值的定义：

$$x\geqslant 0\text{ 时，} |x|=x;$$
$$x<0\text{ 时，} |x|=-x。$$

在数軸上 $|x|$ 就是表示距原点等于 $|x|$ 的两个点 P 和 Q



例如 $|x|=5$，即可表示成



如 $|x|<m(m>0)$，表示 x 的点与原点的距离比 m 个单位小，故 x 必在区間 $(-m, m)$ 內。如图：

所以 $|x|<m(m>0)$ 是与 $-m<x<m$ 等价的。

如 $|x|>m(m>0)$，表示 x 的点与原点的距离比 m 个单位大，故点 x 在数軸上的位置必在点 $(-m)$ 的左边和点 (m) 的右边，如图

所以 $|x|>m(m>0)$ 与 $x>m$ 或 $x<-m$ 等价的。

7。不等式 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$ 是证明絕对值不等式性质(1)的預备知识，兹先证明如下：

证：∵ $|x|<m(m>0)$ 与 $-m<x<m$ 等价，

现在假定 $a\geqslant 0$，则 $a=|a|$，那末 $a\geqslant -|a|$，

（$a=0$ 时等号适用）

$a<0$ 时，则 $a=-|a|$，那末 $a\leqslant|a|$

（$a=0$ 时等号适用）

故当 a 为任意实数时，我們有 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$。

8、关于絕对値不等式的性质，证明如下：

性质（1）：$|a|+|b|\geqslant|a+b|$。

证：根据上面（6）我們有 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$。

同理有 $-|b|\leqslant b\leqslant|b|$。

将这两个同向不等式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|。$$

上面的不等式与 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 是等价的，

∴ $|a|+|b|\geqslant|a+b|$。

性质（2）：$|a|-|b|\leqslant|a+b|$。

证：根据性质（1）可得 $|a+b|+|-b|\geqslant|a+b-b|$，

即 $|a+b|+|b|\geqslant|a|$。

因此有 $|a+b|\geqslant|a|-|b|$，

∴ $|a|-|b|\leqslant|a+b|$。

关于性质（3）和（4），可由实数乘除法的法则直接推得。

参考材料

一、不等式 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_n}$。

（其中 a_1 a_2 $a_3\cdots\cdots a_n$ 是 n 个正整数）

这是一个著名的不等式，可以叙述成“若干个正量的算术平均数不小于它們的几何平均数”。（证明可参见諾注塞洛夫著代数与初等函数第六章 §77）

它有两个推论：

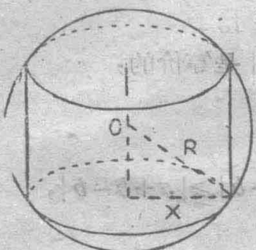
推论Ⅰ：如果 n 个正量的和为一定时，其积以諸量相等时为最大。

推论Ⅱ：如果 n 个正量的积为一定时，其积以諸量相等时为最小。

应用这两个推论可以解决有关三个正量以上的求最大或最小值的問題。

例 1 旋工要将一个半径为 R 的铁球車成圓柱形的零件，为了使旋去的铁屑为最少，問此圓柱的尺寸应如何？

解 設圓柱的底圓直径为 $2x$（如图），



則圓柱的高为 $2\sqrt{R^2-x^2}$；

圓柱的体积为 $V=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2}$；

两边平方得：$V^2=4\pi^2x^4(R^2-x^2)$。

上式可变换成：

$$\frac{V^2}{4\pi^2}=x^2\cdot x^2(R^2-x^2)$$

但 $x^2+x^2+R^2-x^2=x^2+R^2$ 不是常量，因此原式又可变换成：

$$\frac{V^2}{16\pi^2}=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}(R^2-x^2)$$

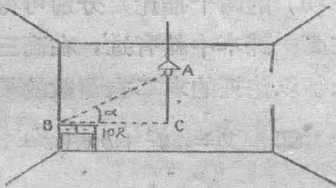
由此可使 $\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+R^2-x^2=R^2$ 为常量。

根据推论Ⅰ，当 $\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}=R^2-x^2$ 时，$\frac{V^2}{16\pi^2}$ 有最大值，当 $\frac{V^2}{16\pi^2}$ 有最大值时，V 也有最大值。

因此，$\frac{x^2}{2}=R^2-x^2$ 即 $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R=\frac{\sqrt{6}}{3}R$，并且高为 $2\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{R^2-\frac{2}{3}R^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$ 时，圓柱体积为最

大，这时旋去的铁屑为最少。

例2 教室宽为2丈，要在宽的中点安装电灯(如图)，为了使位于电灯两侧墙座边緣的桌面上得到最大的亮度，問电灯距桌面应是多少尺？



解 設墙壁边緣所受的照度数为y，由于灯光的照度数与光线落角的余弦成正比，与距离的平方成反比，故可得

$$y=\frac{k}{10^2}\cos(90^\circ-\alpha)\cos^2\alpha=\frac{k}{100}\sin\alpha\cos^2\alpha。$$

其中k数为常数，α为光线与地面所成的角。

$\angle BAC=90^\circ-\alpha$ 为光线的落角。

变换 $\sin\alpha\cos^2\alpha=\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$，

求照度数y的最大値，只須求$\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$的最大値。

但$\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$与$\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)^2$同时到达最大，这个式子又可变换成：

$\frac{1}{2}[2\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)]$。

根据推论I，当$2\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha$时，照度数$y$有最大值，即 $\sin^2\alpha=\frac{1}{3}$。取适合題意的一解

即 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

亦即 $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

所以灯距桌面为 $AC=10\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{10}{2}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$(尺)。

答：电灯距桌面为$5\sqrt{2}$尺时，墙壁边緣的桌面上可得最大的亮度。

二、課本习題三十八中有許多求最大値或最小值的問題，如果归納一下，大体有四种，即应用定理 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a>0$，$b>0$）的两个推论，分别可得求最大値与最小值的两法。另外在高一課本中就有过，在高三課本中再度出现的应用不等式概念加以论证的求二次函数的最大值或最小值的两法。

即 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，

当 $a>0$，$x=-\frac{b}{2a}$ 时，

有 $y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

当 $a<0$，$x=-\frac{b}{2a}$ 时，

有 $y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

故以上共有四法。

此外用初等方法求二次函数的最大值或最小值，还有一法，簡介如下：

即利用二次方程实根的判别式 $b^2-4ac\geqslant0$ 来求最大値或最小値。

我們知道二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中变数 x 及 y 的取值范围都是在实数范围內的，现在用 y 来表示 x，我們可得

$$ax^2+bx+(c-y)=0,$$

則有 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$。

由于变数 x 的允許値是在实数范围內的，由上式可知使 x 为实数的充要条件是 $b^2-4a(c-y)\geqslant0$。

变换上式可得 $4ay\geqslant4ac-b^2$。

当 $a>0$ 时，将不等式两边同除以 $4a$ 得

$$y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}。$$

这个不等式就是表示，$a>0$ 时 y 在实数范围内可取值的范围。

故有 $y_{最小}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

又当 $a<0$ 时，将不等式 $4ay \geqslant 4ac-b^2$ 的两边同除以 $4a$，

得 $y \leqslant \dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

这个不等式就是表示当 $a<0$ 时，y 在实数范围的可取値的范围，

故有 $y_{最大}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

这一結论和上面小結課本中求二次函数的最大或最小値的結论是一致的。

例 1 (a) 求函数 $y=x^2-2x+4$ 的最小値；

(b) 求函数 $y=-2x^2+4x-8$ 的最大値。

解(a) 将原式变换成

$$x^2-2x+(4-y)=0。$$

要使 x 为实数，就必须使

$$(-2)^2-4\cdot1\cdot(4-y) \geqslant 0。$$

即 $4-16+4y \geqslant 0$，

亦即 $4y \geqslant 12$，

则 $y \geqslant 3$。

这就是说 y 值应不小于 3。

$\therefore \quad y_{最小}=3$。

解(b) 将原式变换成

$$-2x^2+4x-(8+y)=0。$$

要使 x 为实数，就必須使

$$4^2-4\cdot(-2)[-(8+y)]\geqslant 0。$$

即 $\quad 16-64-8y\geqslant 0,$

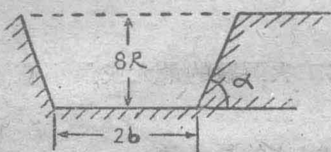
则 $\quad y\leqslant -6。$

这就是说 y 値应不大于 -6，

$\therefore \quad y_{最大}=-6。$

例 2 某农村人民公社要修建灌溉渠。渠的横断面成等腰梯形，为了节約成本，必須尽量减少水和渠底壁的接触面，以节省渠底建筑材料。若规定渠深为 8 尺，渠的横断面面积为一定，则渠壁的傾斜角应多大？

解 設渠的横断面面积为 A 平方尺，(A 为常量)(如图)



渠宽为 26 尺；

渠壁的傾斜角为 α，

$(0^\circ<\alpha<90^\circ)$

则渠面的宽为 $2b+2\cdot 8\mathrm{ctg}\alpha$；

渠壁的斜面长为 $\dfrac{8}{\sin\alpha}$，则渠的横断面面积为：

$$A=\tfrac{1}{2}(4b+16\mathrm{ctg}\,\alpha)\times 8=8(2b+8\mathrm{ctg}\,\alpha)。$$

解之得 $\quad 2b=\dfrac{A}{8}-8\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{A}{8}-\dfrac{8\cos\alpha}{\sin\alpha}。$

再設渠壁横断面的总长(即等腰梯形三边的长)为 L，

$$\begin{aligned}则\quad L&=2\frac{8}{\sin\alpha}+2b\\&=\frac{16}{\sin\alpha}+\left(\frac{A}{8}-\frac{8\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\frac{A}{8}+8\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}。\end{aligned}$$

要使水和渠底壁的接触面面积为最小，就必須使渠壁横断