

发现
数学
丛书

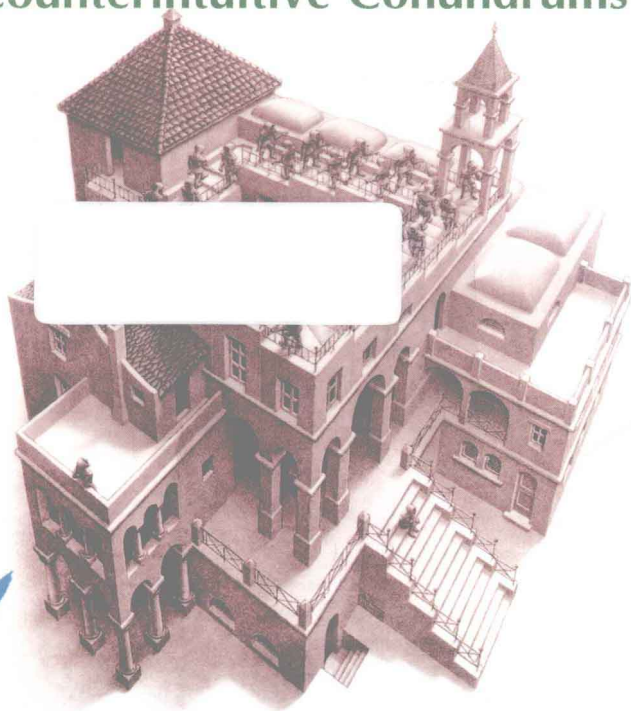
[英] 朱利安·哈维尔 著
涂泓译 冯承天译校

不可思议？

有悖直觉的问题及其令人惊叹的解答

IMPOSSIBLE?

Surprising Solutions to
Counterintuitive Conundrums



上海科技教育出版社

[英] 朱利安·哈维尔 著

涂泓 译 冯承天 译校

发现
数学
丛书

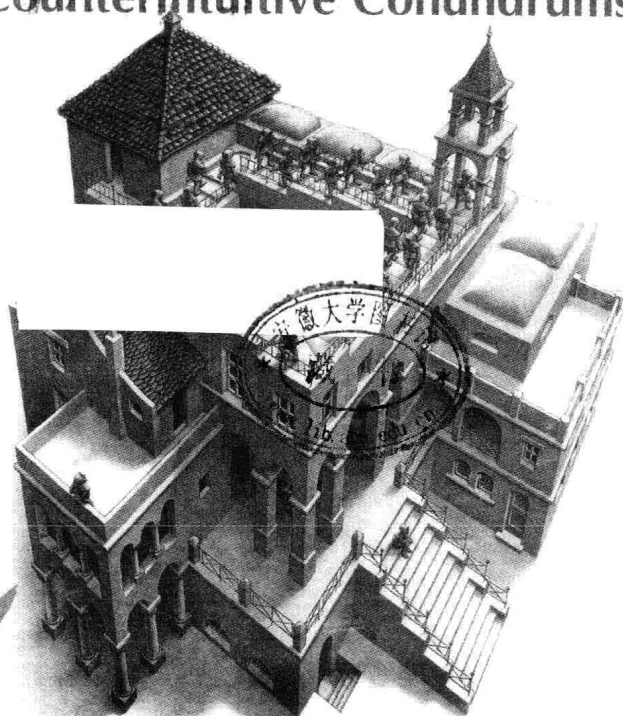
不可思议？

有悖直觉的问题及其令人惊叹的解答

上海科技教育出版社

IMPOSSIBLE?

Surprising Solutions to
Counterintuitive Conundrums



Impossible?
Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums

by

Julian Havil

Copyright © 2008 by Julian Havil

Chinese(Simplified Character) Trade Paperback Copyright © 2012 by

Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House

ALL RIGHTS RESERVED

No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher.

上海科技教育出版社经

Julian Havil

取得本书中文简体字版版权

责任编辑 卢源 封面设计 汪彦 杨静

发现数学丛书

不可思议?

——有悖直觉的问题及其令人惊叹的解答

[英]朱利安·哈维尔 著

涂弘 译 冯承天 译校

上海世纪出版股份有限公司 出版发行

上海科技教育出版社

(上海市冠生园路393号 邮政编码200235)

网址: www.ewen.cc www.sste.com

各地新华书店经销 常熟华顺印刷有限公司印刷

ISBN 978-7-5428-5568-8/O·817

图字 09-2012-175 号

开本 850×1168 1/32 印张 8.625 字数 223 000

2013年1月第1版 2013年1月第1次印刷

定价:23.00元

感谢无与伦比的马丁·加德纳^①

① 马丁·加德纳 (Martin Gardner, 1914—2010), 美国著名的数学普及作家, 他在《科学美国人》(*Scientific American*) 杂志上开设了 25 年的“数学游戏” (Mathematical Games) 专栏。——译注

马丁·加德纳将许多天真的孩子变成了数学教授,也将数以千计的数学教授变成了天真的孩子。

——佩尔西·戴康尼斯^①

医药使人病痛,数学使人悲伤,神学使人罪孽深重。

——马丁·路德^②

我是一名这种程度上的数学家:如果有一位私交好友在一块大黑板上慢慢地计算三重积分,我是能够看懂的。

——J. W. 麦克雷诺兹(J. W. McReynolds)

我知道你以为你自己理解了你认为我所说的话,但是我不确定你是否认识到你所听到的并不是我的本意。

——罗伯特·麦克克洛茨基^③

任何真理都要历经三个阶段:第一、它被嘲笑;第二、它被激烈反对;第三、它被不言自明地接受。

——亚瑟·叔本华^④

你原先本是无名小卒一个,然后你写了一本书,以致升到默默无闻了。

——马丁·梅尔斯(Martin Myers)

① 戴康尼斯(Persi Diaconis, 1945—), 美国数学家, 斯坦福大学的数学与统计学教授, 曾为职业魔术师。——译注

② 马丁·路德(Martin Luther, 1483—1546), 新教宗教改革发起人。——译注

③ 罗伯特·麦克克洛茨基(Robert McCloskey, 1914—2003), 美国儿童图画书籍作家。——译注

④ 亚瑟·叔本华(Arthur Schopenhauer, 1788—1860), 德国哲学家。——译注

致 谢

这些都是在酒店里骗傻瓜们笑笑的古老的歪诗。

《奥赛罗》，第一幕第一场^①

我很荣幸地再次感谢我的校长拉尔夫·汤森德(Ralph Townsend)博士所显示的那种理解与支持,同样也要感谢我教授过的各个班级中的那些年轻人,本书中的有些材料在他们身上进行了或公开或私下的试验。特别要感谢他们中的两位:弗雷迪·曼尼斯(Freddie Manners)和迈尔斯·吴(Miles Wu),感谢他们深受赞赏的编程技巧。

感谢微软公司(Microsoft)和设计科学公司(Design Science),他们以 WordTM和 MathtypeTM 为我提供了便利的工具,使我能非常方便地写下许多语句和符号。感谢 TeX 及其发明者高德纳^②,为我提供了将源文件转换为成书的手段。我对沃尔夫勒姆研究公司(Wolfram Research)的感激之情也应该写在这儿,因为几乎所有的曲线图和表格都是采用他们的产品 MathematicaTM绘制和构作的。还要感谢 Pedagoguery 软件公司(Pedagoguery Software)的程序 TessTM,让我得以制作各章的标题图案。还有普林斯顿大学出版社的执行总编薇琪·卡恩(Vickie

① 这句话应出自《奥赛罗》第二幕第一场,原文可能有误。此处引用朱生豪的译文,文中的“歪诗”一词原意为悖论(paradox),因此本书后文均译为悖论。——译注

② 高德纳(Donald Knuth, 1938—), 美国著名计算机科学家, 他的英文名直译为唐纳德·克努斯, “高德纳”这个中文名字是他 1977 年访问中国之前取的。——译注

Kearn),她舒缓了书籍创作这个有时富于挑战性的过程,谢谢她所做的一切。此外,在将原稿转换为专业复本方面,T&T 制作有限公司(T&T Productions Ltd)的乔恩·温莱特(Jon Wainwright)显示出了不起的技能和耐心,这给他添了从未有过的麻烦。

我必须再次提及 Wykeham Arms 酒店 Hamilton 酒吧的那些常客,其中几位的名字是:科林(Colin)、洛奇(Locky)、文思(Vince)、菲尔(Phil)、乔治(George)、布莱恩(Brian)、菲尔(Phil)……最后还有我自己的大家庭,其中的成员太多,无法一一提及,但是他们又太重要,无法一概忽略。居首位的是我了不起的妻子安妮(Anne),随后按年龄排序:罗布(Rob)、索菲(Sophie)、汤姆(Tom)、瑞秋(Rachael)、卡罗琳(Caroline)、西蒙(Simon)和丹尼尔(Daniel)。以上这些人全都不会去读这本书,但是如果他们没有他们,这本书就不值得一写了。

序 言

一个悖论，
一个非常巧妙的悖论！
我们曾在人群中听到托辞和遁辞，
但是没有有一个能够推翻这个悖论！

《潘赞斯的海盗》^①

我们从一个经典趣题开始。

设想有一根绳子，长度恰好够紧紧地围着球形地球的赤道绕一圈。现在想象这根绳子的长度增加了一米，然后再次围着地球，均匀地支撑这根绳子以使它形成一个圆环。地球和这根加长了的绳子之间的间隙是多少？

巨大的地球，微小的一米——延伸后的绳子实际上还是会和以前一样紧吧？不过，让我们来做一点小小的计算：用标准符号系统表示，如果用 $C = 2\pi r$ 表示地球赤道及绳子原来的长度，用 $C + 1 = 2\pi R$ 表示加长了的绳子长度，那么我们所要求的间隙的大小是

$$R - r = \frac{C + 1}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}。$$

式中出现的 C 已经约去，剩下部分即为间隙大小： $\frac{1}{2\pi} = 0.159 \cdots \text{m} \approx 16 \text{cm}$ 。这里的地球原本可以用任何一颗其他行星、一个橙子或者一个乒乓球来代替，其结果都将是一样的：一个推理过程无

^① 《潘赞斯的海盗》(The Pirates of Penzance)是一部描写海盗生活的两幕滑稽音乐剧，最早于1981年在百老汇上映，并被拍成电影。——译注



可辩驳、但也是难以接受的事实。

在《不要大惊小怪!》^①一书中,我们搜集了各种有悖直觉的情况,而在这本续集中,我们编写了另外 18 个独特的数学课题,如果你去思考这些课题,会对你的推理能力有极大的考验。将它们纳入本书的标准与《不要大惊小怪!》一样,那就是在不久以前或者很久以前,这些题材曾引起了作者的诧异。我们希望读者也会体验到这种诧异,尽管因人而异。

概率和统计依旧显示了它们是有悖直觉的一片富饶土地,它们构成了本书中大约一半素材,不过其余的部分仍然兼收并蓄,并且也是有意做到这样的。一些素材有着有趣的历史,只要有可能我们都会对此作详细介绍。有些素材具有更深远的意义,远远超出了我们在这里所介绍的内容,对此我们也将设法指出。总的来说,我们将令人迷惑的问题收集起来,并试图做出解释。

书中的数学层次差别甚大,我们设法在安排篇章时体现出循序渐进的效果,尽管对这类素材的读物来说,要做到这一点并不容易。有时,为了介绍某个内容,有必要回避数学的严密性,而满足于我们所希望的富于启发性的论证,即使不能十分完善,也要具有说服力才行。巴拿赫·塔斯基悖论并不是这种情况的唯一例子,但也许是最确切的例子,这个悖论深奥至极,人们为此撰写了相关的研究论文和书籍。这个悖论处于抽象数学的最中心,但是忽略它将比纳入它(即使作些略显粗浅的讨论)犯有更大的罪过。这绝对令人难以置信。对于我们所介绍的所有思想,读者如果有意愿可以进行更加深入的探究,为此我们设法在相应的地方列入了恰当的参考文献。

① 《不要大惊小怪!》(*Nonplussed!*) 是本书作者的另一部数学科普书, 2010 年由普林斯顿大学出版社出版,上海科技教育出版社引进出版。——译注



我们希望,随着你翻动这些书页,你将回忆起那些从前的最爱,或者发现一些正在孕育的新的最爱——并希望西蒙·纽康 (Simon Newcomb) 对于他的那些对数表格的评述(我们将在第 16 章中讨论)不会在这儿占上风!

目 录

致谢	I
序言	III
第1章 这是常识	1
第2章 辛普森悖论	10
第3章 不可能的问题	22
第4章 布雷斯悖论	34
第5章 复数的乘幂	43
第6章 提升赢率	55
第7章 康托尔的乐园	75
第8章 伽莫夫-斯特恩电梯	92
第9章 抛硬币	99
第10章 百搭扑克牌戏	115
第11章 两个级数	126
第12章 扑克戏法二则	147
第13章 一根针的旋转	164
第14章 最佳选择	186
第15章 幂的力量	198
第16章 本福特定律	212
第17章 古德斯坦数列	224
第18章 巴拿赫-塔斯基悖论	234
各章标题图案	243
附录	247



第1章 这是常识

数学是用简单的词语来表达艰深思想的科学。

爱德华·卡斯纳和詹姆斯·纽曼^①

史蒂薇·尼克斯 (Stevie Nicks) 2003 年为佛利伍麦克合唱团 (Fleetwood Mac) 的歌“每个人都发觉了” (Everybody Finds Out) 所谱写的部分歌词也许描述了读者对这第 1 章的主题所产生的反应：

我知道你不同意……

好吧, 我知道你不同意。

① 爱德华·卡斯纳 (Edward Kasner, 1878—1955) 和詹姆斯·纽曼 (James Newman, 1907—1966) 在他们两人合著的《数学与想象力》(*Mathematics and Imagination*) 一书中首先提出了“Googol”这个数学名词, 用以表示 10 的 100 次幂, 现在全球最大的互联网搜索引擎 Google 的名称即来源于此词。——译注



这首歌的标题也成为了美国国家广播公司(NBC)情景电视连续喜剧《老友记》(*Friends*)中的一集的标题,即“每个人都发觉了”那一集(*The One Where Everybody Finds Out*),该集于1999年2月首播,其中包含下面这段对话:

瑞秋:菲比已经发现莫妮卡和钱德勒的事了。

乔伊:你的意思是他们是朋友,就是这件事吧?

[朝瑞秋瞪眼]

瑞秋:不,乔伊,她知道了。我们刚才在丑裸男的公寓里,通过窗户看到他们在做。[乔伊倒抽了一口冷气]实际上,我们看见他们靠着窗户在做。

菲比:好吧,那么现在他们知道你晓得,但是他们不知道瑞秋是否已经晓得了?

乔伊:对,不过你知道些啥?谁知道什么已经都不重要了。现在我们有足够多人知道,可以告诉他们我们晓得了!这样所有的谎言和秘密终于要结束了!

菲比:或者,我们也可以不告诉他们我们晓得了,自己给自己找点乐子。

瑞秋:什……什么意思?

我们将要考虑的事情结合了以下这些内容:流行歌曲的歌词、大众电视节目和一种重要的思想,这种思想为数学及其应用提供了一个相当大的主体。

常识与共识

以上的这段对话似乎不太可能是有意要探索数学逻辑的深度,但是它确实两个表面看来等价的观念(即共识和常识)之



间提取出了一个重要的明显区别。例如,我们可能会提出,以日常用语来说,“澳大利亚的首都是堪培拉”是一个常识,而这意味着所有知道这个国家的人都有充分理由知道这个事实。另举一个例子,我们也许会说,所有道路使用者都知道红灯的意思是“停”而绿灯的意思是“行”,这是一个常识。在一般情况下,诸如“常识”这样的普通措辞的使用是不错的,但是我们将要论述的是这个术语的一种更为严格的解释,并将它与它的表亲——共识区别开来。

数学有把普通的语言用于专业目的的倾向:群(*group*)、环(*ring*)、域(*field*)、有理的(*rational*)、超越的(*transcendental*),等等。这些词中的每一个在词典中都有其标准的定义,但是每一个又在数学世界中意味着某种全然不同的、精确的、专业的东西。常识这个说法也是如此,这个词的日常用法使人联想到,它所指代的东西是所有人都知道的。至关重要的一点是,某个人是否知道另一个人晓得澳大利亚的首都是堪培拉,这并不十分重要。但是为了确保安全的交通流动,所有的道路使用者都晓得交通信号灯所采取的颜色约定还是不够,他们必须要知道所有其他的道路使用者也都晓得这种约定,否则,一个司机也许会看见一辆车驶向红灯,却又疑惑那辆车的司机是否晓得要停在那里的这种约定。

因此,我们要作出两种定义。第一种是共识的定义。一群人中的每个人如果都知道某个陈述 *S*,那么就说这个陈述 *S* 是这群人中的共识。共识本身并不意味着任何人都知道这一知识(如果存在着什么知识的话)也为其他人所知。堪培拉的例子足以说明它是一个共识。常识的专业定义则含有更深层的含义:每个人都知道人人都晓得(而每个人也都知道人人都晓得每个人都知道……) *S*。交通信号灯的例子就需要常识。

在上文的对话中,菲比的陈述:



好吧,那么现在他们知道你晓得,但是他们不知道
瑞秋是否已经晓得了?

给出了乔伊与那对情侣(莫妮卡与钱德勒)之间共享的常识和
瑞秋与他们之间共享的共识之间的区别。

共识有可能转化为常识。例如,我们可以把一群陌生人集合在一个房间里,然后宣布:澳大利亚的首都是堪培拉。如果我们假设每个人之前都已经晓得了这个事实(因此这已经是一个共识了),乍看起来,这番宣告似乎没有增加任何信息,但是它已把共识转化成了常识,因为现在房间里的每个人都知道了,房间里的所有人都晓得澳大利亚的首都是堪培拉。处于本章主要难题中心的,正是这个特征。

儿童文学中有一个关于此现象的一个著名例子。在安徒生^①的寓言《皇帝的新装》(*The Emperor's New Clothes*)中,两个无赖说动了爱虚荣的皇帝,使他相信他们能够用丝线和金线缝制出一件华丽的衣服,这件衣服“对所有的愚蠢的人或者不称职的人来说都是看不见的”。在皇帝给他们钱和材料去做这件皇家服饰以后,他们根本什么都没给他穿,但是皇帝却因为害怕被扣上愚蠢或不称职的标签,因而不敢承认自己没有看见任何衣服,当然,他的朝臣们就更不用说了。为了展示这件绝妙的新衣,他们安排了一次游行大典,当皇帝经过时,民众都鼓掌欢呼。

所有旁观的和站在窗口的人们都在欢呼叫喊:
“噢,皇帝的新衣多气派啊。”

① 安徒生(Hans Christian Andersen, 1805—1875), 丹麦作家、诗人, 创作了许多世界闻名的童话故事。——译注



然后一个孩子发表评论了：

“但是他什么都没有穿啊。”

从这一刻开始，皇帝赤身裸体这个原来的共识变成了常识。

这完全不是语义上的卖弄，我们将要考虑一个令人讨厌的例子，来说明将共识转化为常识的含义。其中将用到数学归纳技巧，附录中对此给出了相关的介绍。

红帽子和蓝帽子问题

假设在一个房间里集中了一群人，还有许多帽子，每人一顶，这些帽子的颜色非红即蓝（也可以全部都是一种颜色）。为了明确起见，我们假设其中恰好有 15 顶帽子是红色的，而这意味着余下的帽子都是蓝色的，尽管集会参加者们并不知道这种布局。我们还假设每个人都是完美的逻辑学家。

帽子戴在每个人的头上，使得戴着它的人不知道它的颜色，而其他所有人都能看到。然后这群人坐在房间里相互观察而不能交流，房间里还有一个钟，每小时准点敲响，所有人都能看到和听到。每个人都得到指示说，在敲钟后能确定自己戴的是红帽子的人，就得立即离开房间。

这群人坐在那个房间里，等着钟一小时一小时地敲响。那些戴着红帽子的人会看到 14 顶红帽子，而那些戴着蓝帽子的人会看到 15 顶红帽子。如果没有额外的信息，他们谁都无法确定自己戴着的帽子是什么颜色：共有 14 顶、15 顶还是 16 顶红帽子？幸运的是，有一个访问者来到了这个房间，四下观望了一下大家戴着的帽子后宣称：“这里至少有一个人戴着红帽子。”

这看起来似乎并没什么启示作用。尽管这个宣称看似毫不相干，不过一旦做出了这个宣称，在接下去的第 15 次钟响后，所有的 15 个戴着红帽子的人必将同时走出房间。



要考虑这里的推理过程,采用一些标记会比较方便。“至少有一个人戴着红帽子”这个陈述用符号 R_1 表示,“A 知道 X”这个陈述用式子 $A \rightarrow X$ 表示。

首先,我们来考虑只有一顶红帽子的情况。在给出这个陈述以前,那个戴红帽子的人 A 看到的都是蓝帽子,且不可能知道他自己帽子的颜色,也就是说 $A \nrightarrow R_1$ 。在做出宣称以后, $A \rightarrow R_1$,那么他将确定自己的帽子是红色的,并在钟下一次敲响后,也就是此宣称做出后的第一次钟响后走出去。由这条宣称所传递的信息导致了一顶红帽子的情况立即得到解决。

现在我们来讨论有两顶红帽子的情况。在做出宣称以前, R_1 是共识而非常识。也就是说,每个人都至少可以看到一顶红帽子,而且如果戴红帽子的人是 A 和 B,那么 $A \rightarrow R_1$ 且 $B \rightarrow R_1$,因为他们俩都能看到对方的红帽子。然而 $A \nrightarrow (B \rightarrow R_1)$,这是因为 $B \rightarrow R_1$ 是 B 看到 A 的红帽子的一个直接结果,而 A 完全不知道自己的帽子是不是确实是红色的。这个宣称告诉了所有人, R_1 是真实的,因此现在的情况是 $A \rightarrow (B \rightarrow R_1)$ (并且 $B \rightarrow (A \rightarrow R_1)$)。由于从这个宣称中获得了信息,因此戴红帽子者之间的共识变成了他们之间的常识。现在钟敲了第一下,没有人能对自己的帽子颜色做出结论:有可能只有一顶红帽子,在这种情况下,以 A 的观点看来, B 正戴着它。然后钟又敲了第二下,于是事态就变化了。A 认为,既然在第一次敲钟后 B 没有离开,那么他必定看到了一顶红帽子,因此就有着两顶这样的红帽子, A 和 B 头上各戴着一顶;他们俩都会离开房间。

对有 3 顶红帽子的情况,在做出宣称以前,戴红帽子者 A、B 和 C 的情形具有如下特征: $B \rightarrow R_1$,这是因为 B 能看到 A 和 C 都带着红帽子; $A \rightarrow (B \rightarrow R_1)$,这是因为 A 能看到 C 带着红帽子,但是 $C \nrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow R_1))$,这是因为 C 完全不知道自己的帽子是红色的还是蓝色的。

在做出宣称以后, R_1 又一次成为了常识,因此 $C \rightarrow (A \rightarrow (B$