高等学校工科数学系列丛书

微积分教程

（上册）

主　编　林　锰　于　涛

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

微积分教程

上册

主编　林　锰　于　涛

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书依据最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，吸收国内外同类教材中的优点，并结合多年教学中积累的经验，注意教学过程中发现的问题，经由应用数学系多位教师的共同研究和推敲编写而成。

本书分上、下两册。上册主要内容有：函数与极限，导数与微分，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及定积分的应用；下册主要内容有：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数及常微分方程。本书思路清晰、语言精炼、讲解透彻，叙述详尽、例题丰富，内容适应面广，富有弹性，可作为高等院校工科本科生“微积分”课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分教程.上/林锰，于涛主编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5661-0214-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①林… ②于… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 166888 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省地质测绘印制中心
开　　本 787mm×960mm　1/16
印　　张 14.75
字　　数 312 千字
版　　次 2011 年 8 月第 1 版
印　　次 2011 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 28.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

随着科学技术的发展与教学改革的深入，近年来我校微积分课程的教学思想与内容要求发生了很大变化，为了使这一教育理念与培养目标贯穿于微积分教学并得以实现，编者结合多年教学研究和改革实践，参照最新的本科数学课程教学要求，借鉴当前国内外相关教材的优点，编写了这本适合培养应用型人才的高校工学类本、专科教学使用的《微积分教程》。

本教材不仅是在高等数学课程建设和教学改革的基础上形成的，同时也是对原有教材《微积分》多年使用实践的总结和提高。其主要特点是：特别注重对微积分的基本思想和基本方法的阐述，尽可能突出极限、导数和积分等重要概念，努力从多种视角解释这些数学概念的背景、内涵以及它们之间的有机联系。本书为上册，分别由姚红梅，柴艳有（第一章），李斌（第二章），李强（第三章），李明（第四章），王晓莺（第五章），张文颖（第六章）等同志编写。

全书由林锰，于涛主编；林锰，王淑娟统稿。

在本书的编写过程中，得到了哈尔滨工程大学理学院应用数学系广大教师的支持和帮助，也得到学校各级有关领导的鼓励和指导，在此表示衷心的感谢。

编　　者

2011 年 6 月

目录

第一章　函数与极限

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象，初等数学基本上研究不变的量，而高等数学则是研究变化的量，并且一般是在实数集上讨论变量之间的依赖关系，即高等数学是研究客观世界中各种变量变化方式的数学理论，其中最基本的概念和方法是极限。本章将介绍集合、映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念与它们的一些性质。

第一节　集合与映射

一、集合

1. 集合

在日常生活中，常常会碰到集合这个概念。下面给出集合的一个描述性定义。

定义 1　具有某种特定性质的事物的总体称为集合，简称集。组成这个集合的事物称为该集合的元素，简称元。

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示。例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

另一种是描述法，若集合 B 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可以表示成

$$B = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，集合 C 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集，就可表示成

$$C = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$$

通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$。一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集。

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

全体正整数的集合记为 $\mathbf{N}^+$，即

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^{*}$ 为排除数 0 的实数集合,$\mathbf{R}^{+}$ 为全体正实数的集合。

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A)。

如果集合 A 与 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$。例如,设

$$A=\{1,2\},B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$$

则 $A=B$。

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneq B$,例如 $\mathbf{N}\subsetneq\mathbf{Z}\subsetneq\mathbf{Q}\subsetneq\mathbf{R}$。

不含任何元素的集合称为空集,例如

$$\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^2+1=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的,空集记作 $\varnothing$,且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subset A$。

集合的基本运算有以下几种:并、交、差。

设集合 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 A/B,即

$$A/B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

有时,我们研究某个问题限定在一个大集合 Z 中进行,所研究的其他集合 A 都是 Z 的子集。此时,我们称集合 Z 为全集或基本集,称 Z/A 为 A 的余集或补集,记作 A^C。例如在集合 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x|0<x\leqslant 1\}$ 的余集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x>1\}$$

集合的并、交、余运算满足下列法则。

设 A、B、C 为任意三个集合,则有下列法则成立:

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3)分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

(4)对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证,这里不再赘述。

在两个集合之间还可定义直积或笛卡尔(Descartes)乘积。设 A、B 是任意两个集合,在集合 A 中任取一个元素 x,在集合 B 中任取一个元素 y,组成一个有序对(x,y),把这样的有序对作为新的元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$。

2. 区间与邻域

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$。集合

$$\{x\mid a<x<b;x\in\mathbf{R}\}$$

称为开区间,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b;x\in\mathbf{R}\}$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,集合

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b;x\in\mathbf{R}\}$$

称为闭区间,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b;x\in\mathbf{R}\}$$

a 和 b 称为闭区间$[a,b]$的端点。

类似地可说明:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b;x\in\mathbf{R}\}$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b;x\in\mathbf{R}\}$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间。

以上这些区间都称为有限区间。$b-a$ 称为这些区间的长度。从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段。将闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来,分别如图 1-1(a)与(b)所示。此外还有无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如

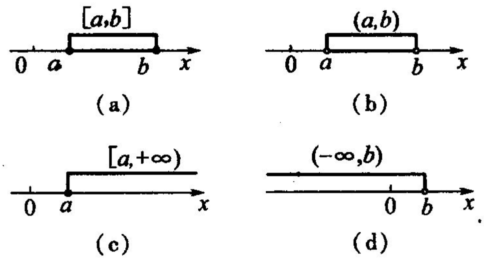

图1-1

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\leqslant a\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c),(d)所示。

实数集 $\mathbf{R}$ 也可记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间。

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示。

邻域也是一个经常用到的概念。以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$。设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径（图1－2）。

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体。

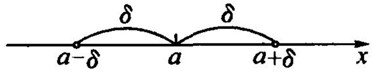

图1－2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉。点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$。

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域。

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域，例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$。

3. 确界

定义2 设 E 是一个实数集，如果存在一个实数 M，使得对一切的 $x\in E$，有 $x\leqslant M$（或 $M\leqslant x$），则称实数集 E 有上界（或有下界）。如果实数集 E 既有上界又有下界，则称实数集 E 有界，反之则称实数集 E 无界。

显然，实数集 E 如果有上界，则它就有无数个上界；实数集 E 如果有下界，则它有无数个下界。

定义3 设 E 是一个非空实数集，如果存在一个实数 β，满足下列条件：

(1) E 中任何一个数 $x\leqslant\beta$；

(2) 不论任意给定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，至少存在一个数 $x_0\in E$，使

$$x_0>\beta-\varepsilon$$

则称实数 β 为非空实数集 E 的上确界，记为

$$\beta=\sup E \text{ 或 } \beta=\sup_{x\in E}\{x\}$$

定义 4 设 E 是一个非空实数集，如果存在一个实数 α，满足下列条件：

(1) E 中的任何一个数 $x \geqslant \alpha$；

(2) 不论任意给定的 $\varepsilon > 0$ 怎样小，至少存在一个数 $x_0 \in E$，使

$$x_0 < \alpha + \varepsilon$$

则称实数 α 为非空实数集 E 的下确界，记为

$$\alpha = \inf E \text{ 或 } \alpha = \inf_{x \in E}\{x\}$$

例 1 求实数集 $E = \left\{\frac{1}{n}\middle| n \text{ 是正整数}\right\}$的上确界及下确界。

解 在 E 中的任一个元素$\frac{1}{n} < 1$；并且对任意给定的 $\varepsilon > 0$，E 中存在元素$\frac{1}{n_0}$，使得$\frac{1}{n_0} > 1 - \varepsilon$（这里只要取自然数 $n_0 = 1$ 即可），按上确界的定义，$\sup E = 1$。同时易知 $\inf E = 0$，这是因为，在 E 中的任一元素 $\frac{1}{n} > 0$，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，E 中存在元素 $\frac{1}{n_0}$，使得 $\frac{1}{n_0} < 0 + \varepsilon$ $\left(\text{这里只要取自然数 } n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \text{即可}\right)$。可以看出数集 E 的最大元素一定是上确界。

例 2 求数集 $F = \left\{\frac{2n}{n+1}\middle| n \text{ 是正整数}\right\}$的上确界及下确界。

解 在 F 中的任一个元素$\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} < 2$；又对任意给定的 $\varepsilon > 0$，只要取 $n > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，就有$\frac{2n}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1} > 2 - \varepsilon$，故 $\sup F = 2$。另外，又易证 $\inf E = 1$，同时也可以看出数集 F 的最小元素一定是下确界。

对于有限数集，总是存在最大的元素和最小的元素，故有限集必有上、下确界。

实数集确界的性质：有上界的非空实数集必有唯一的上确界；有下界的非空实数集必有唯一的下确界。注意这一性质只在实数集中才能成立，在有理数集中是不能成立的。

读者可以在全体有理数所构成的数集 $\mathbf{Q}$ 中，取子集 $A = \{r | r^2 < 2 \text{ 的正有理数}\}$ 时，A 虽有上界，但在有理数集 $\mathbf{Q}$ 中无上确界。

二、映射

1. 映射

定义 5 设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

从上述映射的定义中，需要注意的是：

（1）构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围 $R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应。

（2）对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像未必是唯一的。

例 3 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$。显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集。对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的，如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个。

例 4 设 $X=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$Y=\{(x,0)\mid |x|\leqslant 1\}$，$f:X\to Y$，对每个 $(x,y)\in X$ 有唯一确定的 $(x,0)\in Y$ 与之对应。显然 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$。在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1,1]$ 上。

例 5 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$。这 f 是一个映射，其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$。

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）。

例 3 中的映射，既非单射，又非满射；例 4 中的映射不是单射，是满射；例 5 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射。

映射又称为算子。根据集合 X、Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称。例如，从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函，从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换，从实数集（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数。

2. 逆映射与复合映射

定义 6 设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$。于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g:R_f\to X$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$。这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$。

按上述定义，只有单射才存在逆映射。所以，在例 3、4、5 中，只有例 5 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,x\in[-1,1]$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

定义 7 设有两个映射

$$g:X\to Y_1,f:Y_2\to Z$$

其中 $Y_1\subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$。显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g:X\to Z$$

$$f\circ g(x)=f[g(x)],x\in X$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$。否则，不能构成复合映射。由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义。即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同。

例 6 设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$。则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f\circ g(x):\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f\circ g(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$$

三、函数

1. 函数

定义 8 设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中 x 称为自变量，D 称为函数 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$；y 称为因变量，即函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

按照上述函数的定义，需要注意的是：

(1) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值。但为了叙述方便，习惯上常用记号"$f(x),x\in D$"或"$y=f(x),x\in D$"来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f。

(2) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的符号"f"也可用其他字母，如"F"，"φ"等，这时函数就应记为 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等。有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$。

(3) 两个函数相等，当且仅当两个函数的定义域相同，对应法则也相同。

(4) 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背

景中自变量的实际意义确定；另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定其定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合。

(5) 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，因此可以称为单值函数。如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不是唯一的，那么这个对应法则并不符合函数的定义，通常称这种法则确定了一个多值函数。

函数 $y=f(x)$ 可以用各种不同方式表达，例如 $y=x^2$，$y=\sin x$ 等，这种函数表达方式的特点是：等式左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子，用这种方式表达的函数叫做显函数。有些函数的表达方式却不是这样，例如方程 $x+y^3-1=0$，当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，y 有唯一确定的值与之对应，故此方程表示一个函数，这种函数表达方式的特点是：用方程 $F(x,y)=0$ 表示 x 与 y 的对应关系，即在一定条件下，当 x 取某区间内的任意值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，用这种方式表达的函数叫做隐函数。值得注意的是有些隐函数是可以化成显函数的，例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成了显函数。但有些隐函数想化成显函数是困难的，例如方程 $y=\dfrac{1}{2}\sin(x+y)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi-1}{2},\dfrac{\pi-1}{2}\right)$ 上定义了一个以 x 为自变量，y 为因变量的隐函数，但由此方程解出 y 是困难的。

2. 函数的几种特性

(1) 单调性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（严格单调增加的），如图 1－3；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的（严格单调减少的），如图 1－4 所示。单调增加或单调减少的函数统称为单调函数。

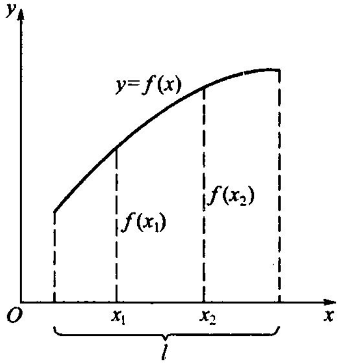

图 1－3

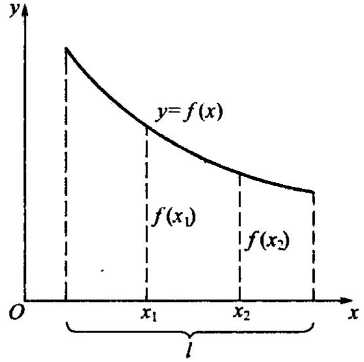

图 1－4

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调的，如图 1－5 所示。

(2)有界性

设函数$f(x)$的定义域为$D,X\subset D$。如果存在实数K_1,使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对一切的$x\in X$都成立,则称函数$f(x)$在X上有上界,K_1称为函数$f(x)$在X上的一个上界。如果存在实数K_2,使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对一切的$x\in X$都成立,则称函数$f(x)$在X上有下界,K_2称为函数$f(x)$在X上的一个下界。如果在X上,$f(x)$既有上界又有下界,即存在正数M,使得

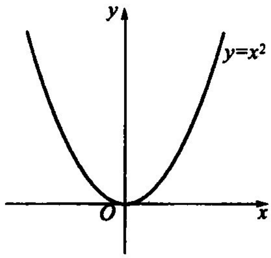

图1-5

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一$x\in X$都成立,则称函数$f(x)$在X上有界。如果这样的M不存在,就称函数$f(x)$在X上无界,即如果对任意正数M,总存在$x_1\in X$,使$|f(x_1)|>M$,那么函数$f(x)$在X上无界。

例如,函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上1是它的一个上界,-1是它的一个下界(当然,大于1的任何数也是它的上界,小于-1的任何数也是它的下界)。又

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任意实数x都成立,故函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,这里$M=1$(当然也可取大于1的任何数作为M,而使$|\sin x|\leqslant M$对任一实数x都成立)。

又如函数$y=\dfrac{1}{x}$在开区间(0,1)内无上界,但有下界,例如1就是它的一个下界。函数$y=\dfrac{1}{x}$在开区间(0,1)内无界,因为不存在这样的正数M,使$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$对于(0,1)内的一切$x$都成立($x$接近0时,不存在确定的正数$K_1$,使$\dfrac{1}{x}\leqslant K_1$成立)。但是$y=\dfrac{1}{x}$在区间(1,2)内有界,例如可取$M=1$而使$\dfrac{1}{x}\leqslant 1$对于一切$x\in(1,2)$都成立。

(3)奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称。如果对于任一$x\in D$,有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称$f(x)$是偶函数;如果对于任一$x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称$f(x)$是奇函数。

例如,$f(x)=x^2$在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数,因为$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$。偶函数的图像关于y轴对称,如图1-6所示。$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数,因为$f(-x)=$

$-x^3 = -f(x)$。奇函数的图像关于原点对称，如图 1-7 所示。

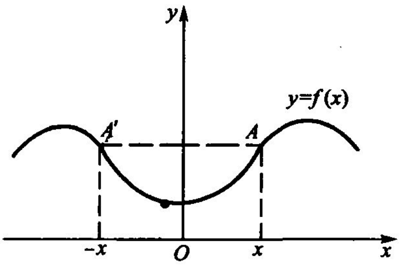

图 1-6

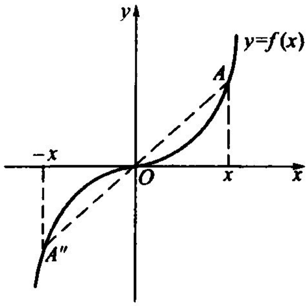

图 1-7

偶函数的图形关于 y 轴对称，而奇函数的图形关于原点对称。但值得注意的是，有些函数即非奇函数，又非偶函数，例如 $f(x) = \sin x + \cos x$。

(4)周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D。如果存在一个正数 l，使得对任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$，且

$$f(x \pm l) = f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期。例如，$y = \sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数。

并非每个周期函数都有最小正周期。例如狄立克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$$

其中 Q^c 代表无理数集，$D(x)$ 是一个周期函数，任何正有理数 r 都是它的周期。因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期。

3. 反函数

作为逆映射的特例，我们有以下反函数的概念。

定义 9 设函数 $f:D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D) \to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数。

按此定义，对每个 $y \in f(D)$，有唯一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，于是有

$$f^{-1}(y) = x$$

这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的。

例如，函数 $y = x^3, x \in \mathbf{R}$ 是单射，所以它的反函数存在，其反函数为 $x = y^{\frac{1}{3}}, y \in \mathbf{R}$。

由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是 $y = x^3, x \in \mathbf{R}$ 的反函数通常写作 $y = x^{\frac{1}{3}}, y \in \mathbf{R}$。

一般的，$y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$。