数学五百题

SHUXUEWUBAITI

常州市教育局教研室

前　　言

本书编集的习题，大部分是江苏师院金品教授生前所作。

金品先生从事中等、高等教育工作近五十年，是国内知名的数学家之一，尤其对几何这门学科有很高的造诣。在粉碎“四人帮”后，在高校招生制度改革的鼓舞下，金品先生为了使祖国早日实现四个现代化，他抱病工作，精心编写了一批有利于提高中学生数学水平的习题。它的特点是选题严谨，解法灵活，对启发学生的解题思路，培养学生的逻辑思维能力有一定帮助。

本集题集是在金品先生逝世后由他的女儿常州市六中教师金佩玉老师整理补充而成。常州市五中数学教研组认真地进行校对。尽管这样，由于编辑水平有限，时间仓促，错误缺点在所难免，恳切希望读者批评指正。

目　　录

(一) 代　数　式

1　计算$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right]^{-\frac{1}{2}}-7.5\left({}^{-\frac{3}{4}}\sqrt{4}\right)^{2}-(-2)^{-4}$

$+81^{\frac{1}{4}}$

解　原式$=1-7.5\times\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+3=3$.

2　化简$\dfrac{\sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$

解　原式$=\dfrac{5^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{4-2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2(2-\sqrt{3})}=\dfrac{3\sqrt{5}(2+\sqrt{3})}{2(4-3)}$

$=\dfrac{6\sqrt{5}+3\sqrt{15}}{2}$.

3　化简$\sqrt{45}+\sqrt{8}-\sqrt{80}-\sqrt{18}+\sqrt{7+\sqrt{40}}$

解　原式$=3\sqrt{5}+2\sqrt{2}-4\sqrt{5}-3\sqrt{2}+(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

$=0$.

4　化简$\sqrt{4x^{2}+12x+9}+\sqrt{4x^{2}-20x+25}$

解　原式$=\sqrt{(2x+3)^{2}}+\sqrt{(2x-5)^{2}}$

$$=|2x+3|+|2x-5|=\begin{cases}4x-2 & \text{当}x>2\frac{1}{2}\text{时；}\\ 8 & \text{当}-1\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\frac{1}{2}\text{时；}\\ -4x+2 & \text{当}x<-1\frac{1}{2}\text{时．}\end{cases}$$

5　已知$a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

求a^2+ab+b^2的值

解　$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(2\sqrt{3})^2-(3-2)=11.$

6　设$a=5$，求$a+\sqrt{1-2a+a^2}$的值

解　$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+|a-1|$

$=5+|5-1|=9.$

7　化简$\dfrac{1+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{7}+3}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

解　原式$=\dfrac{(1+\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})+(\sqrt{7}+3)}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{3-\sqrt{7}}{9-7}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}$$

$=1.$

8　如$f(2x)=3x-1$，且$f(a)=4$，求a的值

解　根据$f(2x)=3x-1$，可知$f(a)=f\left(2\cdot\frac{a}{2}\right)=3\cdot\frac{a}{2}-1$

故从$f(a)=4$，得$\frac{3a}{2}-1=4$

$\therefore$　$a=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

9　化简$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}}+\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^5}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}}$

解　原式$=\sqrt[3]{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^6}+\sqrt[3]{(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^6}$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})^2$

$=a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{a-1}+(a-1)+a+2\sqrt{a}\cdot$

$\cdot\sqrt{a-1}+(a-1)=4a-2$.

10　求证$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

证　$\because$　$10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}=10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}$

$+2\sqrt{15}=(2+3+5)+(2\sqrt{2\times3}+2\sqrt{2\times5}$

$+2\sqrt{3\times5})=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$.

$\therefore$　$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

11　设$\frac{8y-3x}{2x-y}=3$　求$\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}$的值

解　从$\frac{8y-3x}{2x-y}=3$　得$8y-3x=6x-3y$,

$\therefore$　$x=\frac{11}{9}y$.

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}=\sqrt{\frac{\frac{11}{9}y+y}{\frac{11}{9}y-y}}=\sqrt{\frac{20y}{2y}}=\sqrt{10}.$$

12 已知$x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}(n\geqslant 1)$，化简$\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$

解 $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{x^2[(x+1)^2+(x-1)^2]}{(x^2-1)^2}$

$$=\frac{2x^2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2\cdot\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{n-1}{n+1}+1\right)}{\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)^2}=\frac{4n(n-1)}{4}$$

$=n(n-1)$.

13 设$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$，求$\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}{(ax+by+cz)^2}$的值

解 令$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$,

则$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{k^2(a^2+b^2+c^2)^2}{k^2(a^2+b^2+c^2)^2}=1$.

14 分解因式$x^2+4x+4-xy-2y$

解 原式$=(x^2+4x+4)-(xy+2y)=(x+2)^2-y(x+2)$

$=(x+2)(x-y+2)$.

15 分解因式x^4+x^2+1

解 $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

16 分解因式x^4+4

解 $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

17　分解因式$x^2-4xy-12y^2$

解　原式$=x^2-4xy+4y^2-16y^2=(x-2y)^2-(4y)^2$

$=(x-2y+4y)(x-2y-4y)=(x+2y)(x-6y)$。

18　因式分解x^3+x-30

解　原式$=x^3-27+x-3=(x-3)(x^2+3x+9)+(x-3)$

$=(x-3)(x^2+3x+10)$。

19　因式分解$x^2+3xy+y^2$

解　把y看作常量，解方程$x^2+3xy+y^2=0$　得

$$x=\frac{(-3\pm\sqrt{5})y}{2}$$

∴　原式$=(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}y)(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}y)$

$=\frac{1}{4}(2x+3y-\sqrt{5}y)(2x+3y+\sqrt{5}y)$。

20　因式分解$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$

解　原式$=(x^4-2x^2y^2+y^4)-2z^2(x^2-y^2)+z^4-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2)^2-2z^2(x^2-y^2)+(z^2)^2-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-(2yz)^2$

$=(x^2-y^2-z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2-2yz)$

$=[x^2-(y^2-2yz+z^2)][x^2-(y^2+2yz+z^2)]$

$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$

$=(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)(x+y+z)$。

21　因式分解$a^3+b^3+c^3-3abc$

解　原式$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+c^3-3ab(a+b+c)$

$=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$。

22　分解因式$x^2+4xy+4y^2-5x-10y+6$

解①　原式$=(x+2y)^2-5(x+2y)+6$

$=(x+2y-2)(x+2y-3)$

解②　设原式为0，即$4y^2+2(2x-5)y+x^2-5x+6=0$

解得$y=\frac{1}{8}\Big[-2(2x-5)\pm$

$\pm\sqrt{4(2x-5)^2-16(x^2-5x+6)}\Big]$

化简得　$y=\frac{1}{2}(-x+3)$，即$x+2y-3=0$

又　$y=\frac{1}{2}(-x+2)$，即$x+2y-2=0$

∴　原式$=(x+2y-3)(x+2y-2)$。

23　分解因式$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

解　原式$=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^5-1}{x-1}$

$\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}=(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$。

24　分解因式$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

解　令$c=a$，则原式$=ba(b+a)+a^2(a-a)-ab(a+b)$

$=0$

∴　原式有$(c-a)$因式

同理令$a=-b$和$b=-c$，原式均为0

则$(a+b)$，$(b+c)$也是原式的因式

∴　原式$=k(a+b)(b+c)(c-a)$

令$a=0$，$b=c=1$，则$k=1$

∴　$bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

$=(a+b)(b+c)(c-a)$.

25 分解因式$8x^3(y+z)-y^3(z+2x)-z^3(2x-y)$

解 轮换以x,y,z的降幂排列，得

原式$=8(y+z)x^3-2(y^3+z^3)x-yz(y^2-z^2)$

$=(y+z)[8x^3-2x(y^2-yz+z^2)-yz(y-z)]$

$=(y+z)[-(2x+z)y^2+(2xz+z^2)y+2x(4x^2-z^2)]$

$=(y+z)(2x+z)[-y^2+zy+2x(2x-z)]$

$=(y+z)(2x+z)[z(y-2x)+(4x^2-y^2)]$

$=(y+z)(2x+z)(2x-y)[-z+2x+y]$

$=(y+z)(2x+z)(2x-y)(2x+y-z)$.

26 分解因式$x^4+2x^2-20x-16$

解 可设$x^4+2x^2-20x-16=(x^4+ux^2+\frac{u^2}{4})$

$-\left[(u-2)x^2+20x+(\frac{u^2}{4}+16)\right]$

如果$(u-2)x^2+20x+(\frac{u^2}{4}+16)$成为完全平方，那么原式可化为两平方的差，因而可分解为两个因式.它的条件是：

$20^2-4(u-2)(\frac{u^2}{4}+16)=0$，$u^3-2u^2+64u-528=0$

$(u-6)(u^2+4u+88)=0$

$\therefore$ $u=6$，（其他二根为复根） $\therefore$ 取$u=6$代入得：

$x^4+2x^2-20x-16=(x^4+6x^2+9)-(4x^2+20x+25)$

$=(x^2+3)^2-(2x+5)^2=(x^2+2x+8)(x^2-2x-2)$

$=(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{7}i)(x+1-\sqrt{7}i)$.

27 化简$\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}$

解 原式$=\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$=\dfrac{2x^2+2}{x^4+x^2+1}$.

28 化简$\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{6}{x^2-x-2}$

解 原式$=\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{6}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{1}{x-2}$

$-\dfrac{6}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{x-5}{(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{x-5}{x^2-x-2}$.

29 求证$\sqrt[3]{2+\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{2-\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}=2$

证 左边$=\sqrt[3]{\dfrac{54+30\sqrt{3}}{27}}+\sqrt[3]{\dfrac{54-30\sqrt{3}}{27}}$

$=\dfrac{1}{3}\left[\sqrt[3]{(3+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{3})^3}\right]=2=$右边.

30 化简$\sqrt{(\log_{\frac{1}{2}}8)^2}+\sqrt{18}-\sqrt{\dfrac{9}{2}}-(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}$

$\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}-0.0016^{-\frac{1}{4}}-3\left|\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right|$.

解 原式$=\sqrt{(-3)^2}+3\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}$

$\left[(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{4}{3}}-(0.2)^{-1}-3\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$

$$=3+\frac{3}{2}\sqrt{2}-2-5-\frac{3}{2}\sqrt{2}=-4.$$

31 计算$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{5\pi}{12}$

解 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin\frac{5\pi}{12}=(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})$

$$=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2})=1.$$

32 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证$a$、$b$、$c$三数中必有两个等值且反号

证 $\because$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，

$\therefore$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}=0$

$\frac{b+c}{bc}+\frac{b+c}{a(a+b+c)}=0$

$(b+c)[a(a+b+c)+bc]=0$,

$(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=0$,

即$(b+c)(c+a)(a+b)=0$,

故$b+c=0$, $c+a=0$, $a+b=0$中必有一个成立，即必有两数等值且反号.

33 求证四个连续自然数的乘积加1必为某数的平方

证 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2.$

34 求证n^5-5n^3+4n能被120整除

证 $n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-1)(n^2-4)$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

这是 5 个连续自然数的乘积，显然有$2\times3\times4\times5=120$的因子

$\therefore\quad n^5-5n^3+4n$能被120整除。

35 求证每一个自然数总可表示为一个 9 的倍数与这个数的各个数字的和

证 $N=a_0 10^n+a_1 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\cdot10+a_n$

数字之和 $P=a_0+a_1+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$

$$N-P=a_0(10^n-1)+a_1(10^{n-1}-1)+\cdots\cdots+a_{n-1}(10-1)$$

由于右边的各项都有因子$(10-1)$，所以都是 9 的倍数，

$\therefore\quad N=M(9)+P$，其中$M(9)$表示 9 的倍数。

36 求证一个整数的数字排列的顺序正好与另一整数的数字排列的顺序相反时，则此两个整数的差，能被 9 除尽

证 设原数是$P=a_0 10^n+a_1 10^{n-1}+a_2 10^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}\times10^2+a_{n-1}\times10+a_n$，顺序颠倒后的数是

$$Q=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\cdots\cdots+a_2 10^2+a_1 10+a_0$$

$$\therefore\quad P-Q=[a_0(10^n-1)+a_1(10^{n-1}-1)+\cdots\cdots]-[a_1(10-1)+a_2(10^2-1)+\cdots\cdots+a_{n-2}(10^{n-2}-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+a_n(10^n-1)]$$

$$\therefore\quad P-Q=[a_0(10^n-1)+a_1(10^{n-1}-1)+\cdots\cdots]-[a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\cdots\cdots]=M(9)$$

$\therefore\quad(P-Q)$能被 9 除尽。

37 当某n位数的奇位数字和与偶位数字的和，二者之差能被11整除的时候，那么这个n位数也一定能被11整除

证 设所求n位数是$N=a_0 10^n+a_1 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\times 10+a_n$，并设$P,Q$分别是奇位数字和与偶位数字的和

(1) 当n为偶数，即$n=2m$时，

$$P=a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2m},\ Q=a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2m-1}$$

令$P-Q=M(11)$即$(a_0+a_2+\cdots+a_{2m})-(a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1})=M(11)$,

$$N-M(11)=a_0(10^{2m}-1)+a_1(10^{2m-1}+1)+\cdots\cdots+a_{2m-1}(10+1)$$

$$\therefore\quad N=M(11)+a_0(10^{2m}-1)+a_1(10^{2m-1}+1)+\cdots\cdots+a_{2m-1}\times 11$$

但$10^{2m}-1=(10+1)(10^{2m-1}+\cdots)$等等，故$N$能被11整除

(2) 当n为奇数，即$n=2m+1$时，

$$P-Q=(a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2m})-(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2m+1})=M(11),$$

$$N+M(11)=a_0(10^{2m+1}+1)+a_1(10^{2m}-1)+\cdots\cdots+a_{2m}(10+1)$$

因为右边能被11整除，故N也能被11整除。

38 假如一个数的末三个数码所组成的数与其余的数码所组成的数的差等于0，或能被7，11，13中的一个数整除，那么这个数就能被7，或11，13中的一个数所整除

解 设所求数是$N=a_0 10^n+a_1 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-2}\times 10^2+a_{n-1}\times 10+a_n$，末三个数码所成的数是：

$Q=a_{n-2}\times 10^2+a_{n-1}\times 10+a_n$，其余数码所成的数是：

$$P=a_0 10^{n-3}+a_1\times 10^{n-4}+\cdots\cdots+a_{n-3}$$

如果$P-Q=0$，或$M(7)$或$M(11)$或$M(13)$，则N也是如此

因为：当$P>Q$时，　$N=P\times 10^3+Q=P(10^3+1)-(P-Q)$

由于$10^3+1=1001=7\times 11\times 13$

$\therefore\quad N=7\times 11\times 13P-(P-Q)$，当$(P-Q)$能被7，11，13整除时，则$N$也可用7或11或13整除。当$P<Q$时，可同理证明而得出结论。

39 某数除以3余1，除以5余2，求此数。又若某数除以3余1，除以5余2，除以7余4，那么这数该是多少？

解：在第一种情形下，某数除以5余2，可知某数如果增加了8就可被5整除，由于某数除以3余1，所以某数增大3以后，还是除3余1，但是如果某数增加8，那么增大后的数被3，5都能整除，所以增大后的数，必然是$3\times 5=15$的倍数，从而所求数$=15n-8$，当$n=1$时就得最小数7

在第二种情况下，我们可以利用第一种情况来进行，从第一种情况可知，某数增加8，那么增加后的数便能被3和5所整除，而且用7去除所得余数比原来增加1即为5，故知某数增加38以后，便能被3，5，7所整除，故增加后的数最小是$3\times 5\times 7=105$，故所求最小数$=3\times 5\times 7-38=105-38=67$。

40 甲、乙、丙三人都是孙老师过去的学生，现在这三人还是定期到孙老师家请教。甲每六天来一次，乙每八天来一次，丙每九天来一次，如果4月17日他们都来了，问：下次他们三人同一天到孙老师家是几月几日？

解：$\because\quad 6=2\times 3,\ 8=2\times 2\times 2,\ 9=3\times 3$。

所以6，8，9最小公倍数为$8\times 9=72$天，即每隔72天，三人可再会见一次

但是4月17日到4月30日有13天，从5月1日到5月31日计31天

$\therefore\quad 72$天-13天-31天$=28$天

故知，在6月28日三人同到孙老师家

41　求三个正整数 a，b与c，使①$a<b<c$，②它们两两互质，③任两数的和必是第三数的倍数。并证明你所找到的这三个数是唯一的一组，其它任何三个数都不能同时满足上述条件

解　根据三个条件可知：$\begin{cases} b+c=ma & ① \\ c+a=nb & ② \\ a+b=pc & ③ \end{cases}$

其中m，n，p都是正整数

根据③可知：$P=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}<2$，从而$p=1$

又知 $m=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}>2$，　∴　$m\neq 2$

∵　$p=1$　　∴　$a+b=c$。

代入前二式得：$b+(a+b)=ma$，　即$2b=(m-1)a$，　④

又　　$(a+b)+a=nb$，　即$2a=(n-1)b$　　⑤

④⑤两式相乘得：$(m-1)(n-1)=4=4\times 1=2\times 2$　　⑥

把①②相减得：$b-a=ma-nb$

∴　$(n+1)b=(m+1)a$

于是可知$m\neq n$，否则将导致$a=b$与第一个条件矛盾

故知：$\begin{cases} m-1=1 \\ n-1=4 \end{cases}$　$\begin{cases} m-1=2 \\ n-1=2 \end{cases}$ 都不能成立，只能是

$\begin{cases} m-1=4 \\ n-1=1 \end{cases}$

∴　$m=5$，$n=2$，$p=1$是仅有的一组解

从⑤得$2a=b$，从$a+b=c$得$c=3a$

∴　$a:b:c=a:2a:3a=1:2:3$

故知所求的唯一解答是$a=1$，$b=2$，$c=3$

这三数互为质数，符合第二个条件

至于$a=2$，$b=4$，$c=6$等等，它们虽符合①③两个条件，但不符合第二个条件，因此其它三数都不能同时满足三个条件。

42 当a，b取正整数，行列式$\begin{vmatrix}36, a\\81, b\end{vmatrix}$所取得的最小正整数$c$是多少？在满足这一最小正整数$c$的各组正整数解$(a,b)$中，哪一组数使$a+b$的值最小？

解 从$\begin{vmatrix}36, a\\81, b\end{vmatrix}=c$，得$36b-81a=c$

因而$b=\dfrac{81a+c}{36}=2a+\dfrac{9a+c}{36}$

因为b是正整数，$\therefore\ \dfrac{9a+c}{36}=t$也是整数

$a=\dfrac{36t-c}{9}=4t-\dfrac{C}{9}$ 故c的值最小是9，

从而$a=4t-1$

$b=2a+t=2(4t-1)+t=9t-2$， $a+b=13t-3$，

设$t=1$，这时$a=3$，$b=7$，$a+b=13-3=10$为最小。

43 求证$n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n-1$对任何正整数$n$都是整数，并且用3除时余2

证 $n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n-1=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot(2n+1)-1$

对任何整数n来说，$\dfrac{n(n+1)}{2}$必为整数，故原式必为整数