中学教学参考

（理科版）

数学专辑

2
1981

南京市教师进修学院

目　　录

几何证题与添辅助线

南京市教师进修学院数学组凡群整理

几何证题是培养学生逻辑推理能力，提高学生分析问题、解决问题能力的重要手段。对于较简单的几何证题，我们往往只要先用分析法探求证题的途径，再用综合法叙述证明过程，即可解决问题，本文不再叙述。对于较难的题目，往往单用综合法，或单用分析法，都不能达到证题目的。我们常先用分析法逆求几步，再用综合法顺推几步就可完成。这叫做“两头挤”的方法，下面举两例来说明：

例 1　D、E、F 分别为△ABC 之 BC、CA、AB 边的中点，过 A 引一直线交 DE 于 G，交 FD 的延长线于 H。

求证：CG∥BH。

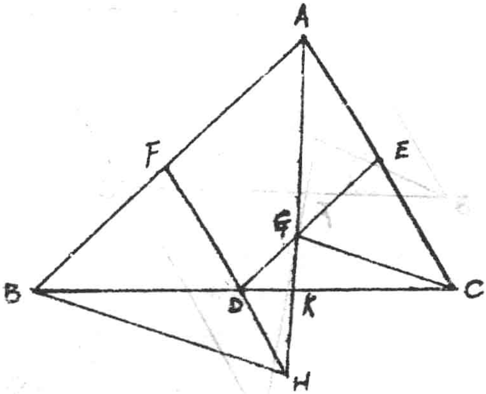

图1—1

分析：欲证 $CG \parallel BH$　只要证：$\frac{KH}{KG}=\frac{BK}{CK}$

综合：$\because DF \parallel AC$　$\therefore \frac{KH}{KA}=\frac{DK}{CK}$　①

$\because DE \parallel AB$　$\therefore \frac{KG}{KA}=\frac{DK}{BK}$　②

①÷②得　$\frac{KH}{KG}=\frac{BK}{CK}$

$\therefore CG \parallel BH$。

例 2　平行四边形ABCD中，过A点任意作一直线分别交BD、BC和DC的延长线于E、F、G三点。

求证：$\frac{1}{AE}=\frac{1}{AF}+\frac{1}{AG}$

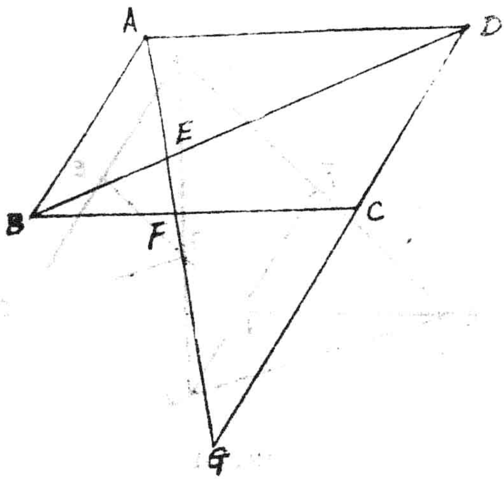

图1—2

分析：欲证 $\frac{1}{AE}=\frac{1}{AF}+\frac{1}{AG}$

只要证 $\frac{1}{AE}=\frac{AG+AF}{AF\cdot AG}$

只要证 $AF\cdot AG=AE\cdot AG+AE\cdot AF$

即证 $(AF-AE)AG=AE\cdot AF$

只要证 $EF\cdot AG=AE\cdot AF$

只要证 $\frac{EF}{AE}=\frac{AF}{AG}$

（AE、EF、AG 在一条直线上，想办法找不在这直线上的线段搭桥）

综合：$\because AD\parallel BC$　　$\triangle EFB\backsim\triangle EAD$，

$\therefore \frac{EF}{AE}=\frac{BF}{AD}$

$\because AB\parallel DC$　　$\triangle AFB\backsim\triangle GAD$

$\therefore \frac{AF}{AG}=\frac{BF}{AD}$　　$\therefore \frac{EF}{AE}=\frac{AF}{AG}$

以上两例，我们都是用“两头挤”的方法，以分析法为主完成从题设到题断的转化。更多的题目必须适当添加辅助线，以辅助线为“跳板”才能找到题设和题断之间的内在联系。

添辅助线是一个“老、大、难”问题，因此本文重点放在几何证题中怎样添辅助线。

先谈谈怎样用分析法，将辅助线“分析出来”。

例 3　G 是$\triangle ABC$的重心，过 AG 作圆与 BG 切于 G 点，延长 CG 交圆于 D。

求证：$AG^2 = CG \cdot DG$。

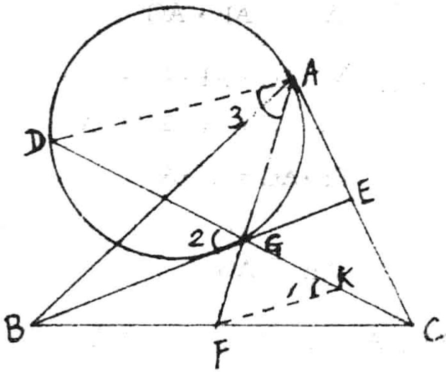

图1—3

分析：欲证　$AG^2 = CG \cdot DG$

只要证　$\dfrac{CG}{AG} = \dfrac{AG}{DG}$

能否通过相似三角形的性质来证明呢？

AG、CG 是$\triangle ACG$的二边。

AG、DG 是$\triangle ADG$的二边。

但$\triangle ACG$与$\triangle ADG$显然不相似。

只能另辟途径。G 是$\triangle ABC$的重心，充分利用重心分中线成定比的性质构造相似三角形，于是我们这样作辅助线。

过 F 点作$FK \parallel BG$　则 K 为 CG 的中点。$KG = \dfrac{1}{2}CG$

$FG = \dfrac{1}{2}AG$　　$\therefore \dfrac{CG}{AG} = \dfrac{KG}{FG}$

只要证 $\frac{KG}{FG}=\frac{AG}{AD}$ 连结AD 只要证$\triangle KGF\sim\triangle AGD$

$\angle AGD=\angle KGF$

$\because FK\parallel BG$ $\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because \odot AGD$ 与 BG 相切 $\therefore \angle 2=\angle 3$ $\therefore \angle 1=\angle 3$

$\therefore \triangle AGD\backsim\triangle KGF$. 此题得证.

例 4 设 CEDF 是一个已知圆内接矩形，过 D 作该圆的切线与 CE 的延长线相交于点 A，与 CF 的延长线相交于点 B.

求证：$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$

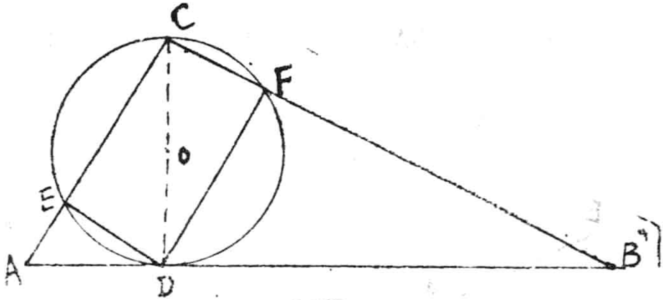

图1—4

分析：AB 是 $\odot O$ 的切线

D 是切点.

$BF\cdot BC=BD^2$ (1)

$AE\cdot AC=AD^2$ (2)

(1)÷(2)得 $\frac{BF}{AE}=\frac{BD^2}{AD^2}\cdot\frac{AC}{BC}$

欲证 $\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$

只要证 $\dfrac{BD^2}{AD^2}\cdot\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$

即证 $\dfrac{BD^2}{AD^2}=\dfrac{BC^4}{AC^4}$

即证 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC^2}{AC^2}$

只要找到一个线段"?"使 $\dfrac{BD}{?}=\dfrac{BC}{AC}$　$\dfrac{?}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$

显然 CD 就是所要找的"?"

辅助线应连线段 CD。

例 5　△ABC中，∠BAC＝120°，AD是平分角线交BC于D。

求证：$\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{AD}$

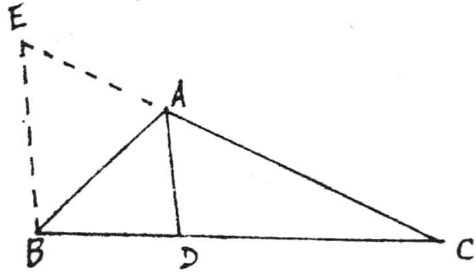

图1—5

分析：欲证 $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{AD}$

只要证 $\dfrac{AC+AB}{AB\cdot AC}=\dfrac{1}{AD}$

只要证 $\dfrac{AC+AB}{AC}=\dfrac{AB}{AD}$

这就启发我们先将线段 AC+AB 的和作出来，辅助线应这样作，延长 CA 到 E，使 AE=AB，连结 BE。

只要证 $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{AB}{AD}$

$\because \angle BAC=120°$ $\therefore \angle EAB=60°$

$\therefore \triangle AEB$ 是等边三角形 $BE=AB$

只要证 $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{BE}{AD}$ 即证 $\triangle CAD \backsim \triangle CEB$。

这是显然的。

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，M 是 $\triangle ABC$ 外接圆弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点。

求证：

$BM^2-MA^2=AB\cdot AC$。

分析：欲证

$BM^2-MA^2=AB\cdot AC$。

分解因式 只要证

$(BM+MA)(BM-MA)$

$=AB\cdot AC$。

这就启发我们先将和线段、差线段作出来，再证明这四个线段分别在两个相似

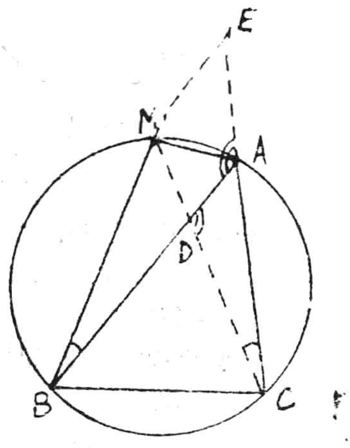

图1—6

三角形中。

延长 BM 到 E，使 ME＝MA，连结 AE。则和线段 BE 与 AB 位于△ABE 中。

差线段不能再在 BM 上截取，否则差线段与 AC 不能共居一个三角形，为此连 MC。因为 M 是 $\overset{\frown}{BAC}$ 的中点，所以 MB＝MC。

在 MC 上截取 MD＝MA，连结 AD。则差线段 CD 与 AC 位于△DCA 中。

只需证　△ABE∽△DCA。

$\angle ABE=\angle DCA$。　只需证　$\angle CDA=\angle BAE$

$$\angle CDA=180^\circ-\angle ADM=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AMC)$$

$$\overset{m}{=}90^\circ+\frac{1}{4}\overset{\frown}{AC}$$

$$\angle BAE=\angle BAM+\angle MAE\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AME)$$

$$\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+\frac{1}{2}\angle AMB\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{BM}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\right)$$

$$=90^\circ+\frac{1}{4}\overset{\frown}{AC}$$

例 7　已知在锐角△ABC 中高 BE，CF 交于 H。

求证：①$BA\cdot BF+CA\cdot CE=BC^2$

②$BE\cdot BH+CF\cdot CH=BC^2$

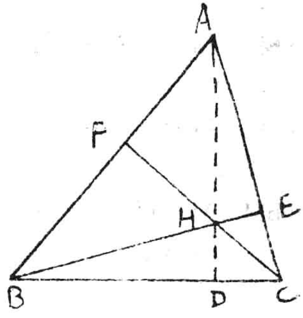

图1—7

分析：证明线段积的和、差等于线段的平方，通常都是把平方项拆成两项。

欲证 $BA \cdot BF + CA \cdot CE = BC^2$

关键是在 BC 上找一点 D。于是 $BC = BD + DC$。

改证 $BA \cdot BF = BC \cdot BD$

$CA \cdot CE = BC \cdot DC$。

欲使 $BC \cdot BD = BA \cdot BF$。

只须 D、C、A、F 四点共圆

因为 $\angle CFA = 90°$ 只需 $\angle ADC = 90°$

因此辅助线只要作 BC 边上的高 AD 即可。

证明：①连 AH 并延长交 BC 于 D。

则 $AD \perp BC$。 $CF \perp AB$。 $\therefore$ D、C、A、F 四点共圆。

$BA \cdot BF = BC \cdot BD$

又 $\because BE \perp AC$ $\therefore$ B、A、E、D 四点共圆

$\therefore CA \cdot CE = CB \cdot CD$

$\therefore BA \cdot BF + CA \cdot CE = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC^2$

②由读者自证。

例 8 自圆 O 的直径 AB 上一点 C 向此圆的切线 DE 作垂线 CE，E 是垂足。

求证：$CE \cdot AB = AC \cdot BC + CD^2$

分析：又遇到需要拆项的情形。

一般地拆平方项。

欲证

$CE \cdot AB = AC \cdot BC + CD^2$

只需证

$CD^2 = CE \cdot AB - AC \cdot BC$

关键是在 DC 的延长线上找一点 F；

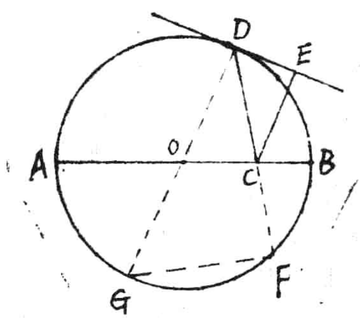

图1—8

使 $DC = DF - CF$ 且使

$CD \cdot DF = CE \cdot AB$ $\quad$ $CD \cdot CF = AC \cdot BC$。

欲使 $CD \cdot CF = AC \cdot BC$。只需A、F、B、D 四点共圆。

即 F 点在圆 O 上

因此，添加辅助线只要延长 DC 交⊙O 于 F。

证明：延长 DC 交 ⊙O 于 F，则 $CD \cdot CF = AC \cdot BC$。

（只需证 $CD \cdot DF = CE \cdot AB$。即证 $\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{DF}$，

AB 是直径可以换一条）

连接 DO 延长交 ⊙O 于G。连接 FG，则

$CE \parallel DG$。

$\because \angle CDE = \angle DGF$。 $\quad$ $\angle GFD = \angle CED = 90°$

$\therefore \triangle CED \backsim \triangle DFG$。

$\therefore \frac{CD}{CE} = \frac{DG}{DF} = \frac{AB}{DF}$ $\quad$ 即 $CD \cdot DF = CE \cdot AB$。

$\therefore CD \cdot DF - CD \cdot CF = CE \cdot AB - AC \cdot BC$

即 $CD^2 = CE \cdot AB - AC \cdot BC$

即 $CE \cdot AB = AC \cdot BC + CD^2$

以上几个例子，我们通过分析法探求证题途径，在探求证题途径的同时把辅助线找到了，也就完成了从题设到题断的转化。但并非所有的问题都能这样做，有时从题设到题断道路迂回曲折，一时无法找到它们的内在联系，有时题设中各个条件过于分散，无法应用任何已知定理。这时，往往需要我们先把辅助线这个“跳板”搭起来，通过这个“跳板”去寻找题设和题断的内在联系。

添加辅助线方法灵活多样，技巧性强，学生较难掌握。为了便于学生掌握添加辅助线的基本方法，我们将最常用的添辅

助线的方法编口诀如下：

延长中线好办法，
造全等形路打通。
角平分线加垂线，
等腰三角形在其中。
有中点必添中位线，
集中条件显神通。
作平行线巧搭桥，
转化矛盾常成功。
相交圆添公共弦，
相切圆加公切线，
直线切圆添什么？
过切点半径居首中。
图形变换实无穷，
掌握规律须下苦功，
探索真理无止境，
科学道路攀新峰。

下面我们通过例题来说明。

例 9　设 PA 为圆的切线，PCB 为任一割线，M 为 AC 中点，PM 交 AB 于 D。

求证：$\dfrac{PA^2}{PC^2}=\dfrac{BD}{AD}$

分析：利用切割线定理

化简 $\dfrac{PA^2}{PC^2}$

$$\frac{PA^2}{PC^2}=\frac{PB\times PC}{PC^2}=\frac{PB}{PC}$$

于是转化为求证

$$\frac{PB}{PC}=\frac{BD}{AD}$$

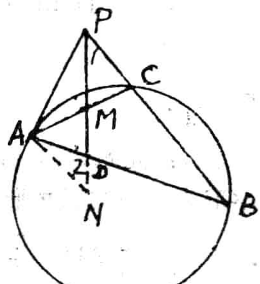

图1—9

M 是 AC 的中点，PM 是△PAC 的中线。

延长 PM 到 N，使 MN = PM。

于是△PMC≌△NMA　∴PC = AN　∠1 = ∠2。

只要证明　$\dfrac{PB}{AN}=\dfrac{BD}{AD}$.

而$\triangle PDB$和$\triangle NDA$中，$\angle BPD=\angle AND$，$\angle PDB=\angle NDA$

$\therefore \triangle PDB \backsim \triangle NDA$。问题就解决了。

由此题看出题设中有中线时，将中线延长一倍，通过全等三角形变换边、角位置能使分散的条件集中。但是是否一定是延长一倍，还要具体问题具体分析，有时利用重心的性质证题更为简便。

*例10　求证以三角形的三中线为边的三角形面积等于原三*角形面积的四分之三。

已知：AD、BE、CF分别为$\triangle ABC$的三条中线。

求证：以AD、BE、CF为三边的三角形面积等于$\triangle ABC$的面积的$\frac{3}{4}$。

分析：此题若作出以AD、BE、CF为三边的三角形就麻烦了。不妨以$\frac{2}{3}$AD、$\frac{2}{3}$BE、$\frac{2}{3}$CF为边作三角形，此三角形的面积等于以AD、BE、CF为三边的三角形面积的$\frac{4}{9}$。

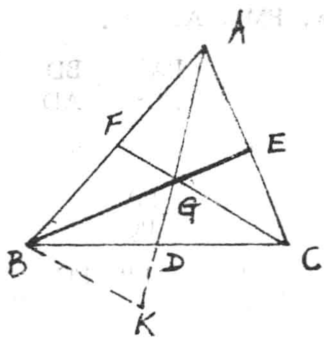

图1—10

延长AD到K，使GD=DK，连结BK

$\because S_{\triangle GBD}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$．

$\therefore S_{\triangle GBK}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$．

而 $BG=\frac{2}{3}BE$，$BK=\frac{2}{3}CF$，$GK=\frac{2}{3}AD$。

$\therefore S_{\triangle GBK}=$以 AD、BE、CF 为边的三角形面积的$\frac{4}{9}$。

$\therefore$以 AD、BE、CF 为边的三角形的面积

$=\frac{9}{4}S_{\triangle GBK}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$。

例11 ①在 $\triangle ABC$ 中，BD、CE 为角平分线，$AF\perp CE$、$AG\perp BD$，垂足为 F、G。

求证：$FG\parallel BC$。

②在 $\triangle ABC$ 中，BG、CF 为两外角的平分线，$AF\perp CF$ 于 F，$AG\perp BG$ 于 G。

求证：$GF=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$

分析：条件中出现垂直于角平分线的线段，延长此线段至角的另一边，就构成等腰三角形，垂足就成为中点，就可以应用中位线.

证明：

①延长AG交BC于 K，

延长AF交BC于 H.

则 $\triangle ABK$、$\triangle ACH$

为等腰三角形

G、F 分别为 AK、

AH 的中点。

$\therefore$ $FG\parallel HK$

即 $FG\parallel BC$。

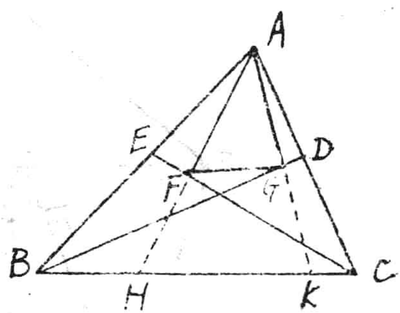

图1—11

②留给读者自证。

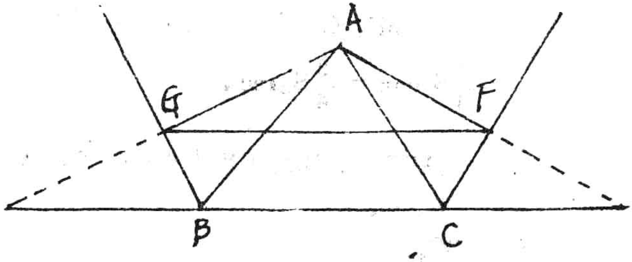

图1—12

例12　△ABC中，自B作BG垂直∠A的平分线AD于G。又中线AM交BG于F。

求证：FD∥AB

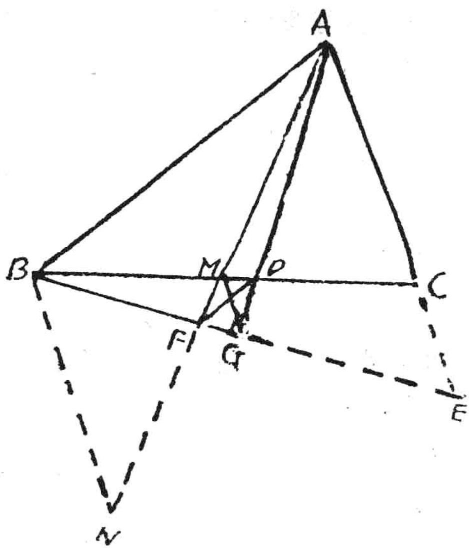

图1—13

分析：按上题的办法添辅助

延长 BG 交 AC 的延长……

则 G 为 BE 的中点。

MG // AC。

欲证 FD // AB

只要证 $\dfrac{GD}{DA}=\dfrac{GF}{FB}$

已证 MG // AC $\therefore \dfrac{GD}{DA}=\dfrac{GM}{AC}$

只要证 $\dfrac{GF}{FB}=\dfrac{GM}{AC}$

将中线 AM 延长到 N，使 MN＝AM 连结 BN。

则 AC＝BN 且 AC // BN

只要证 $\dfrac{GF}{FB}=\dfrac{GM}{BN}$

∵AC // BN。 问题得到解决。

例13 △ABC中，AF 平分∠A，AH为高，BD 和 CE 分别垂直 AF 于 D 和 E。若 M 为 BC 中点。

求证：M、D、H、E 四点共圆。

分析：延长 CE 交 AB 于 K，则 E 为 CK 的中点。

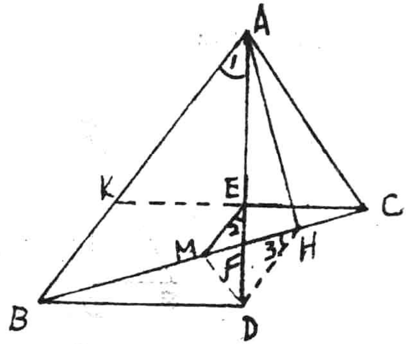

图1—14