

准晶断裂力学的复变函数方法

● 李联和 刘官厅 著



科学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍准晶弹性与断裂理论中的复变函数方法. 将准晶平面弹性和断裂问题转化为偏微分方程边值问题, 采用复变函数方法研究复杂缺陷及缺陷相互作用等问题, 获得了应力和位移的解析解, 建立了相应的断裂判据, 揭示了相位子对准晶材料力学行为的影响, 为准晶材料的潜在应用奠定了良好的理论基础. 本书发展了经典弹性理论中的Muskhelishvili 方法、Lekhnitskii 求解各向异性体弹性力学的复变函数方法及Stroh 方法, 大部分内容是作者多年来的科研成果.

本书可作为应用数学专业和力学专业的高年级本科生和研究生的选修课教材, 也可供相关领域工作的教师 and 研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

准晶断裂力学的复变函数方法/李联和, 刘官厅著. —北京: 科学出版社, 2013

ISBN 978-7-03-036617-7

I. ①准… II. ①李… ②刘… III. ①准晶体-断裂力学-复变函数
IV. ①O753②O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 020924 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 林青梅

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 2 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2013 年 2 月第一次印刷 印张: 7 1/2

字数: 140 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

准晶是 1984 年发现的一种介于晶体和非晶体之间的固体, 具有与晶体相似的长程有序的原子排列, 但是不具备晶体的平移对称性, 在理论和实验上已引起科技人员的极大兴趣. 2009 年, 准晶的研究取得了突破性的进展, 科学家首次在自然界找到了准晶, 这使得准晶被划入了一种真实存在的矿物质. 2011 年, 准晶的发现者以色列科学家丹尼尔·舍特曼获得诺贝尔化学奖. 瑞典皇家科学院的新闻公报称, 准晶的发现冲击了传统晶体学中的基本概念, 正是基于对这种新材料的研究, 人们重新审视了“晶体”这个固体理论中的基本概念. 准晶合金优良的物理和力学性能, 如低表面能、低摩擦系数、低热导率和良好的抗氧化性等, 使之在用作减摩耐磨、耐蚀和不粘材料等方面有广阔的应用前景.

准晶的发现为新材料的发展开拓了新的领域. 准晶材料本身呈脆性, 关于含缺陷 (如裂纹、孔洞、夹杂等) 的准晶体的断裂力学分析成为人们关注的焦点. 复变函数方法是求解平面弹性和断裂问题非常有效的方法. 本书作者发展了经典弹性理论中的 Muskhelishvili 方法、Lekhnitskii 求解各向异性体弹性力学的复变函数方法及 Stroh 方法, 并将其应用于准晶平面弹性和断裂力学问题的研究, 为准晶材料的应用奠定了理论基础.

本书可作为应用数学专业和力学专业的高年级本科生和研究生的选修课教材, 也可供相关领域工作的教师和研究人員参考使用.

在此, 我们向国家自然科学基金委员会、内蒙古自然科学基金委员会、内蒙古师范大学、内蒙古大学、我们课题组的学生, 以及帮助过我们的朋友们, 表示衷心的感谢!

由于作者的水平、经验有限, 书中难免有遗漏和不妥之处, 欢迎广大读者批评指正.

作 者

2012 年 12 月

目 录

前言

第 1 章 准晶概述	1
1.1 准晶的发现	1
1.2 准晶的分类与结构	3
1.3 准晶的弹性理论	4
第 2 章 一维准晶平面弹性问题的复变函数方法	7
2.1 引言	7
2.2 一维六方准晶中螺形位错与楔形裂纹的相互作用	8
2.2.1 控制方程与基本解	8
2.2.2 应力强度因子	11
2.2.3 广义 Peach-Koehler 力	12
2.3 一维六方准晶中椭圆孔与位错的相互作用	13
2.3.1 控制方程与基本解	13
2.3.2 应力强度因子	15
2.3.3 广义 Peach-Koehler 力	15
2.4 有限高狭长一维六方准晶中共线双半无限裂纹问题	17
2.5 一维六方准晶中圆弧裂纹的反平面剪切问题	20
2.6 一维六方准晶中抛物线裂纹的反平面剪切问题	24
2.7 一维六方准晶中带三条不对称裂纹的圆形孔口问题	26
2.7.1 构造保角映射	26
2.7.2 应力强度因子	31
2.7.3 关于裂纹问题的一些特殊情况	31
2.8 一维正方准晶平面弹性问题的复变函数方法	32
2.8.1 控制方程与基本解	32
2.8.2 一维正方准晶中的椭圆孔口问题	35
第 3 章 十次对称二维准晶平面弹性问题的复变函数方法	41
3.1 引言	41
3.2 最终控制方程与基本解	42
3.3 复应力势函数的结构	45

3.3.1	应力和位移的复表示	45
3.3.2	各个复变函数确定的程度	47
3.3.3	边界条件的复变函数表示	49
3.3.4	多连体中应力和位移的单值条件	49
3.3.5	无限大多联体的情形	52
3.4	位移势函数法	53
第 4 章	十次对称二维准晶中的椭圆孔和裂纹问题	56
4.1	引言	56
4.2	椭圆孔边受均匀内压	56
4.3	沿周期方向穿透的 Griffith 裂纹	60
4.4	远处受均匀剪切力作用的椭圆孔	61
4.5	沿周期方向穿透的 II 型裂纹	63
4.6	十次对称二维准晶中位错问题的复变函数方法	68
4.7	位错诱导的弹性场	69
第 5 章	八次对称二维准晶平面弹性问题的复变函数方法	74
5.1	引言	74
5.2	基于应力势函数的最终控制方程与基本解	74
5.3	椭圆孔问题	79
5.4	Griffith 裂纹的解	82
5.5	位移势函数法	83
5.6	位错问题的解	86
第 6 章	三维二十面体准晶平面弹性问题的复变函数方法	91
6.1	引言	91
6.2	最终控制方程与基本解	91
6.3	二十面体准晶二维变形的 Stroh 公式	93
6.4	位错诱导的弹性场	94
6.4.1	基本解	94
6.4.2	计算实例	95
6.5	椭圆孔问题	100
参考文献		104
名词索引		111

第1章 准晶概述

1.1 准晶的发现

长期以来,人们认为固体材料分为两大类:晶体和非晶体.理想晶体中原子排列是十分有规则的,主要体现是原子排列具有周期性,或者称为是长程有序的.而非晶体则不然,它不具有长程的周期性.1984年 Shechtman 等^[1]在一篇题为《具有长程取向序而无平移对称序的金属相》的文章中报导:在用快速冷却方法制备的 Al-Mn 合金中发现一种包括五次旋转对称性在内的二十面体点群对称 ($m\bar{3}5$) 的合金相,并称之为二十面体相 (icosahedral phase),其电子衍射图显示的斑点的明锐程度不亚于晶体情况,如图 1.1 所示.

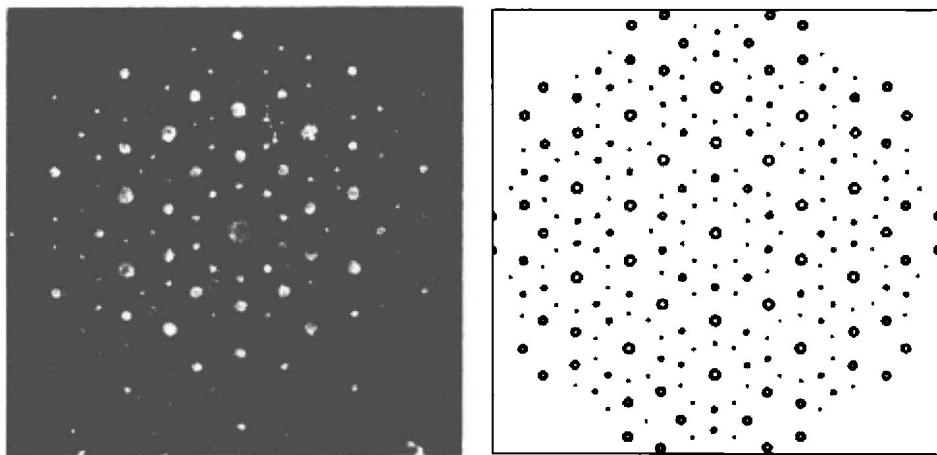


图 1.1 Al-Mn 合金的电子衍射图

与此同时,中国科学院沈阳金属所的郭可信院士领导的准晶研究小组^[2]亦独立地发现 Ti-V-Ni 急冷合金具有二十面体对称性.众所周知,在晶体中是不可能存在 5 次及大于 6 次的旋转对称性的,而非晶体衍射图样呈现为弥散的环,没有表征晶态的斑点.所以人们从实验上发现了一类即区别于晶体又区别于非晶体的固体材料,必须用全新的概念来描述.美国宾夕法尼亚大学的 D.Levine 和 P.Stainhardt^[3]论证了二十面体结构出现的可能性,并计算出了与二十面体相一致的电子衍射图,他们把这种新的结构称为准晶 (quasicrystal),即同时具有长程准周期平移序和非晶体学旋转对称性的固态有序相.

随后, 在其他一些合金中, 具有八次^[4]、十次^[5]和十二次^[6]旋转对称性的准晶相也被相继发现!(图 1.2, 图 1.3)

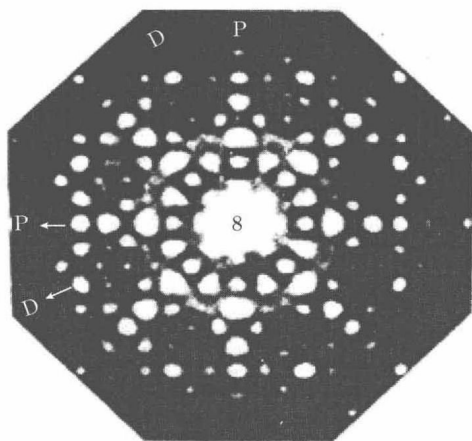


图 1.2 V-Ni-Si 合金八次对称准晶的电子衍射图

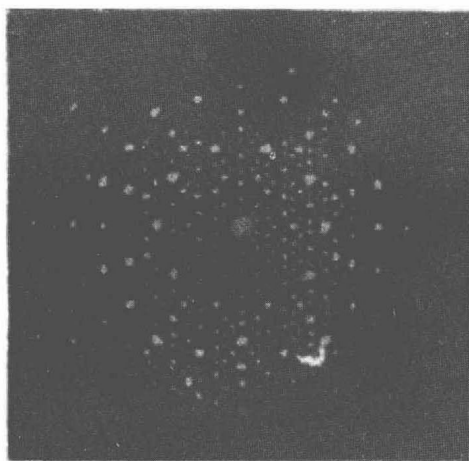


图 1.3 Al-Cu-Fe-Cr 合金十次对称准晶的电子衍射图

不仅如此, 在 V-Ni-Si 合金中还发现了具有立方对称性的准晶^[7]. 到目前为止, 已在 200 余种合金中观察到了准晶相, 它们大多数是 Al 基二元素或三元素合金或者是与 Al 相类似的 Ga 及 Ti 元素的合金, 并且还在不断地报道一些新的类型的准晶被发现. 早期发现的准晶是亚稳态的, 它不适合进行一些力学性能的测试, 对其研究以微观结构和形成机制为主. 随后, 在一些 Al-Li-Cu 和 Al-Cu-Fe 等合金系中发现了大量热力学稳定的准晶^[8, 9], 而且人们还可以通过普通的凝固方法制备出高质量、大单晶的准晶^[10, 11]. 这样一来, 对稳定的准晶结构内部沿不同方向可

以做实验分析和物理性能测量等。

我国的科学工作者在准晶的发现过程中也作出了突出的贡献。例如,郭可信院士领导的准晶研究小组一直处于国际水平,张泽等^[2]独立地在 Ti-V-Ni 合金中发现了新的三维二十面体准晶,冯国光研究员等^[12]在急冷 Al-Fe 合金中发现了十次对称准晶,陈焕等^[13]在 V-Ni-Si 合金中发现了十二次对称准晶,王宁等^[4]在 Cr-Ni-Si 合金中发现了具有 $8mm$ 点群的八次对称准晶,曹巍、周大顺等^[14, 15]也分别在 Mn-Si 和 Mn-Si-Fe 合金中发现了八次对称准晶。除二维准晶和三维二十面体准晶外,还制备或发现了一些一维准晶。例如,冯端等^[16]制备出了 Nb-Cu 和 aSi-aSiN_x 一维准晶,何伦雄等^[17]在急冷 Al-Ni-Si 和 Al-Cu-Mn 合金中以及急冷并退火的 Al-Cu-Co 合金中发现了一维准晶,杨文革等^[18]在铸锭退火的 Al-Cu-Fe-Mn 合金中得到了稳定的一维准晶。

2009 年,准晶的研究取得了突破性的进展,科学家首次在自然界找到了准晶,这使得准晶被划入了一种真实存在的矿物质^[19]。2011 年,准晶的发现者以色列科学家丹尼尔·舍特曼获得诺贝尔化学奖。瑞典皇家科学院的新闻公报称,准晶的发现冲击了传统晶体学中的基本概念,正是基于对这种新材料的研究,人们重新审视了“晶体”这个固体理论中的基本概念。准晶合金优良的物理和力学性能,如低表面能、低摩擦系数、低热导率和良好的抗氧化性等,使之在用作减摩耐磨、耐蚀和不粘材料等方面有广阔的应用前景。

准晶的发现改变了人们对固体结构的认识,引发了传统晶体学的革命,开辟了固体结构研究的新领域,是物理学的重大发现。这一新的固体结构的发现从根本上改变了凝聚态物理把固体划分成晶体与非晶体的传统概念,揭示了一种新的对称性——准周期对称性的存在,极大地深化了人们对晶体学、衍射物理和凝聚态物理的认识。诺贝尔物理奖获得者、著名物理学家杨振宁教授早在 1986 年就指出^[20],准晶的发现具有重要意义,深入开展对准晶的研究 also 具有重要意义。他认为还有许多重要规律有待发掘,有必要进一步加强研究。

1.2 准晶的分类与结构

根据准晶在热力学上的稳定性,可将其分为稳定准晶和亚稳准晶两大类。根据三维物理空间中材料呈现准周期性的维数,可以把准晶分成三维准晶、二维准晶和一维准晶三大类。所谓三维准晶,指的是三维物理空间的材料,其中的原子在三维上都是准周期分布的。实验上已经发现的三维准晶为二十面体准晶,它又可分为简单二十面体准晶和面心二十面体准晶两类。所谓二维准晶,指的是三维物理空间的材料,其中的原子在二维上是准周期分布的,在另外一维上则是周期地分布的。实验上已发现的二维准晶有十次准晶、十二次准晶、八次准晶和五次准晶四类。所谓

一维准晶, 指的是三维物理空间的材料, 其中的原子在二维上是周期分布的, 在另外一维上才是准周期地分布的 [21].

为了更好地理解准晶的结构特征, 目前已有 Penrose 拼砌法、网格法、覆盖描述法、对偶网格法、自相似变换法、条带投影法和高维投影法等十多种方法构造准周期点阵, 其中被广泛应用的有 Penrose 拼砌法和高维投影法. 如果读者需要更深入了解有关准晶结构的内容可参看本书参考文献 [21].

1.3 准晶的弹性理论

力学性能是材料的重要性能之一, 它直接关系到材料的应用, 而弹性性质是研究力学性质的基础. 关于准晶弹性及塑性的研究在实验和理论两方面都已经取得了相当大的进展. 准晶在常温下所具有的脆性是与弹性变形理论所要求的小变形相一致的. 为了解释准晶的弹性变形现象, 在理论上仍然可以象经典弹性理论一样, 对准晶的宏观力学性能的研究同样可在连续介质的 Landau 理论基础之上建立起准晶弹性理论. 根据 Landau 的唯象理论, 将密度波用周期函数在高维空间进行展开. Bak^[22, 23], Levine^[24] 和 Socolar^[25] 等在这方面做出了开创性的工作. 借助于高温无序的各向同性液晶相的研究方法, 以波矢 k 为标记的密度波 $\rho(r)$ 为参变量, 由于旋转对称性, 弹性能仅依赖于 $\rho(r)$ 的振幅而不依赖于其方向, 由此, Bak 以 $\rho(r)$ 为参数构造出了二十次对称准晶的弹性能密度的展开式. 另外, Levine 通过将满足长程平移序的密度波表示为一个级数 (如下式)

$$\rho(r) = \sum_{G \in L_R} \rho_G e^{iG \cdot r} = \sum_{G \in L_R} |\rho_G| e^{i\Phi_G + iG \cdot r}$$

给出了一种构造准晶的弹性能密度的不同方法, 其中 $|\rho_G|$ 和 Φ_G 分别为与对偶点阵 (倒格子) L_R 相联系的质量密度波的振幅与相位. 通过群的操作和分析, 他们也构造了三维二十次对称准晶的弹性自由能形式. 通过这些开创性的工作, 最终发现, 与普通晶体的讨论不同, 对准晶的讨论除了引入声子场之外, 还必须引入另一个液压力学变量, 称之为相位子场, 它位于垂直空间或称为补 (赓) 空间. 准晶结构在高维空间就是一个周期结构, 它相当于高维空间中的晶体沿着某个子空间所作的投影面或切割面, 即所谓的投影法或切割法^[26, 27]. 于是, 每个自由度均来自物理空间和垂直空间的双重贡献, 从而产生了物理空间和垂直空间两种形式的应变场. 它们分别表示声子的传播和单胞的局部重排^[25]. 其元激发分别与声子传播和相位子扩散有关. 弹性自由能中相位子项的出现是准晶弹性能密度区别于经典弹性理论中弹性能密度的主要特征之一, 它是反映准周期结构的重要参数. 相位子的应变与声子的应变互相结合的二次项便构成了准晶弹性自由能的低阶项. 进一步, Socolar^[28]

分别讨论了八次, 十次, 十二次等准晶的情况. Lubensky^[29] 综述了有关准晶的对称性、弹性以及流体动力学等方面的开创性的成果.

群表示理论是普通晶体物理学中的重要研究方法^[30], 在关于准晶对称性的研究中也发挥了极其重要的作用^[31, 32]. 它以在一些对称操作之下某些物理量应该满足的守恒条件为基本出发点, 通过严格的论证, 从理论上确定准晶中的一些独立常数的个数, 这种方法可对任何对称的准晶做相当普遍的讨论. 我国学者在这方面也作出了很大的贡献, 见综述文献^[31]. 例如, 王仁卉等^[33] 用群表示理论详细地导出了一维准晶的点群及空间群个数, 并给出了各种点群之下的本构关系及弹性常数的个数. 杨文革等^[34]、胡承正等^[35] 讨论了二维准晶及三维准晶的相应情况. 他们又将晶体的热力学稳定性推广到准晶中去, 由于在实验上已经得到了许多完整的稳定的准晶相, 表明以稳定态存在的准晶可以看成是一个热力学稳定系统, 并可建立一个与之相适应的平衡性能热力学. 在这种考虑下, 获得了具有电磁效应、电热效应及磁热效应等耦合关系的弹性常数的个数及弹性能密度表达式^[36]. 同时他们也比较了五次对称准晶与十次对称准晶的不同^[37]. 蒋毅坚等^[38, 39] 也讨论了某些准晶的独立弹性常数、光电常数以及压电常数的个数. 尽管在理论上, 各种情况下的准晶弹性常数的个数已经导出, 然而, 对于这些弹性常数的实验测定却相当困难. 文献^[40], ^[41] 介绍了准晶中声子场的弹性常数的实验测定, 然而相位子场弹性常数的实验测定却并非是一件容易的事, 因为相位子弛豫所花的时间相当长^[42].

在准晶的弹性理论中, 取得的另一个重大进展就是丁棣华等^[43, 44]、杨文革等^[45] 发展的准晶广义弹性理论 (以下简称准晶弹性理论的物理框架), 见综述文献^[46]. 通过引入一个位于垂直空间中的应力张量, 与经典弹性理论相类似, 在准晶弹性理论中也同样可以建立准晶中的变形几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad w_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

平衡方程 (忽略体力的情况下)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

和应力-应变关系 (即广义 Hooke 定律或本构关系)

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + R_{ijkl} w_{kl}, \\ H_{ij} &= R_{kl ij} \varepsilon_{kl} + K_{ijkl} w_{kl} \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

其中 ε_{ij} 和 w_{ij} 表示声子场和相位子场应变分量, u_i 和 w_i 表示声子场和相位子场位移分量, σ_{ij} 和 H_{ij} 表示声子场和相位子场应力分量, C_{ijkl} , K_{ijkl} 和 R_{ijkl} 分别表示声子场、相位子场和声子场-相位子场耦合弹性常数. 在这些方程中, 一套是位于

平行空间, 另一套是位于垂直空间, 在这两个空间中的物理量的联系可以由声子场和相位子场的耦合关系来确定.

由于相位子场的引入, 使得准晶弹性理论中基本控制微分方程比经典弹性理论中的相应的方程要多一倍以上, 从而求解这些控制微分方程的边值问题比经典弹性理论中的相应方程的边值问题要困难得多. 因而, 从有了准晶弹性物理框架到发展成准晶数学弹性力学还有一段相当长的路要走, 需要把数学物理知识、经典弹性理论以及准晶弹性物理框架有机的结合起来. 这就要求力学与应用数学工作者的参与. 在准晶弹性物理框架内, 研究者们已经提出了一些求解方法, 如迭代法^[47, 48], Green 函数法^[31, 46], Fourier 变换法^[49, 50], 摄动法^[51]和算子方法等^[52, 53]. 尽管准晶数学弹性理论的研究已经取得了很大的进展, 但由于问题的复杂性, 目前仍有许多问题没有得到很好的解决. 本书主要研究的内容是准晶平面弹性和断裂问题的复变函数方法.

第 2 章 一维准晶平面弹性问题的复变函数方法

2.1 引言

根据文献 [21], 一维准晶共包括 31 种点群, 分为 6 大晶系, 10 个 Laue 类, 见表 2.1. 其中表示点群的符号的含义同文献 [21].

表 2.1 一维准晶的点群, Laue 类和独立弹性常数

晶系	Laue 类	点群	弹性常数个数
			$n_c \ n_k \ n_R$
三斜	1	1, $\bar{1}$	21 6 18
单斜	2	2, m_h , $2/m_h$	13 4 8
	3	2_h , m , $2_h/m$	13 4 10
正交	4	$22_h 2_h$, $2mm$, $2_h mm_h$, $m_h mm$	9 3 5
四方	5	4, $\bar{4}$, $4/m_h$	7 2 4
	6	$42_h 2_h$, $4mm$, $\bar{4}2m$, $4/m_h mm$	6 2 3
三方	7	3, $\bar{3}$	7 2 6
	8	$32h$, $3m$, $\bar{3}m$	6 2 4
六方	9	6, $\bar{6}$, $6/m_h$	5 2 4
	10	$62_h 2_h$, $6mm$, $\bar{6}2m$, $6/m_h mm$	5 2 3

一维准晶由于其结构相对简单, 引起了理论和实验科学工作者的极大兴趣, 其物理性质 (例如结构、光、电和磁等性质) 已被广泛的研究 [54, 55]. 在 Landau 弹性理论框架内, 王仁卉、丁棣华和胡承正等利用群表示理论推导了一维准晶的各种点群和独立弹性常数, 并给出了它们的弹性方程 [21], 范天佑和李显方等发展了位移势函数方法, 并采用 Fourier 分析方法研究了点群 $6mm$ 一维六方准晶的弹性缺陷问题, 得到若干位错和裂纹问题的精确解 [56]. 文献 [57] 通过引入新的位移势函数, 建立了包括单斜准晶、正方准晶、四方准晶和六方准晶在内的多种一维准晶系的平面弹性理论, 推导了它们的弹性问题的控制方程. 陈伟球等 [52] 基于严格的算子理论, 给出了用四个准调和函数表示的一维六方准晶三维弹性问题平衡方程的基本解, 并且利用此解获得了应力的表达式, 为数值计算奠定了基础. 高阳等 [58] 研究了一维六方准晶中的板弯曲问题, 利用互易定理和基本解获得了精确到任意阶的应力边界条件和混合边界条件.

众所周知, 缺陷及其相互作用问题对于理解材料的物理和力学行为起着至关重要的作用. 对于准晶来说, 由于相位子场的引入, 使得这些问题变得更加困难和重

要. 到目前为止, 很少见到有关这方面的研究. 本章主要研究一维六方准晶和一维正方准晶中的缺陷和缺陷的相互作用问题.

2.2 一维六方准晶中螺形位错与楔形裂纹的相互作用

2.2.1 控制方程与基本解

本节研究的物理模型如图 2.1 所示^[59]. 一维六方准晶中, 在楔形裂纹的附近有一直线性位错, 准晶体在无穷远处受剪切力 τ_∞ 和广义剪切力 τ_∞^h 的作用. 假设楔形裂纹沿 x 轴负方向为无限长, α 表示楔形角. 直线性位错位于点 $z_0(r_0, \theta_0)$, Burgers 矢量为 $(b_1^\parallel, b_2^\parallel, b_3^\parallel, b_3^\perp)$.

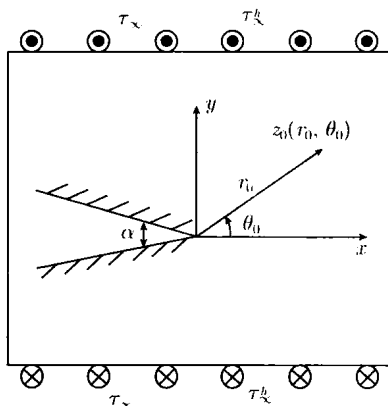


图 2.1 一维六方准晶中位错与楔形裂纹的相互作用

根据文献 [21], 一维六方准晶弹性问题的几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad w_{3j} = \frac{\partial w}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

不计体力的平衡方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial H_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

广义 Hooke 定律为

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + R_1 w_{zz} \\ \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + R_1 w_{zz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{13}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + R_2w_{zz} \\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = 2C_{44}\varepsilon_{yz} + R_3w_{zy} \\
\sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = 2C_{44}\varepsilon_{zx} + R_3w_{zx} \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 2C_{66}\varepsilon_{xy} \\
H_{zx} &= 2R_3\varepsilon_{zx} + K_2w_{zx} \\
H_{zy} &= 2R_3\varepsilon_{yz} + K_2w_{zy} \\
H_{zz} &= R_1\varepsilon_{xx} + R_1\varepsilon_{yy} + R_2\varepsilon_{zz} + K_1w_{zz}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$ 分别为声子场的应力、应变和位移. H_{ij}, w_{ij}, w_z 分别为相位子场的应力、应变和位移. C_{ij}, K_i 分别为声子场和相位子场的弹性常数, R_i 为声子场、相位子场耦合弹性常数, 式 (2.1)~(2.3) 称为一维六方准晶弹性问题的基本方程.

当所有场变量都与 z 无关时, 有

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

借助于式 (2.4), 基本方程 (2.1), (2.2), (2.3) 可以分解为如下两个问题

$$\text{问题 I} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

$$\sigma_{xx} = C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{yy} = C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{11}\varepsilon_{yy} \tag{2.7}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2C_{66}\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{zz} = C_{13}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad H_{zz} = R_1(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \tag{2.8}$$

这是一个普通晶体的平面弹性问题, 已彻底解决.

$$\text{问题 II} \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad w_{zx} = \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad w_{zy} = \frac{\partial w_z}{\partial y} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} = 0 \tag{2.10}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 2C_{44}\varepsilon_{zx} + R_3w_{zx} \tag{2.11}$$

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz} = 2C_{44}\varepsilon_{zy} + R_3w_{zy} \tag{2.12}$$

$$H_{zx} = 2R_3\varepsilon_{zx} + K_2w_{zx} \tag{2.13}$$

$$H_{zy} = 2R_3\varepsilon_{zy} + K_2w_{zy} \tag{2.14}$$

这是一个声子场和相位子场耦合的反平面弹性问题. 因此, 我们只需考虑第二个问题.

把式 (2.9) 代入式 (2.11)~(2.14), 再把获得的结果代入式 (2.10), 有

$$C_{44}\nabla^2 u_z + R_3\nabla^2 w_z = 0, \quad R_3\nabla^2 u_z + K_2\nabla^2 w_z = 0 \quad (2.15)$$

其中 ∇^2 表示二维拉普拉斯算子. 由式 (2.15) 可得位移向量 $\mathbf{u}$ 的一般表达式如下

$$\mathbf{u} = \{u_z, w_z\}^T = \text{Re} \{f_u(z), f_w(z)\}^T = \text{Re}[\mathbf{f}(z)] \quad (2.16)$$

这里 Re 表示实部, $f_u(z), f_w(z)$ 表示关于变量 z 的任意解析函数, 上标 T 表示转置. 对于本节所考虑的物理模型来说, 复向量函数 $\mathbf{f}(z)$ 可表示如下

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{f}_0(z) + \mathbf{f}_1(z) \quad (2.17)$$

其中 $\mathbf{f}_0(z)$ 与未受扰动的场相关, 在复平面上除了点 z_0 之外解析, $\mathbf{f}_0(z)$ 可选择如下

$$\mathbf{f}_0(z) = \mathbf{A} \ln(z - z_0) + \mathbf{B}z \quad (2.18)$$

这里

$$\mathbf{A} = \{A_1 i, A_2 i\}^T, \quad \mathbf{B} = \{B_1 i, B_2 i\}^T \quad (2.19)$$

其中

$$A_1 = -\frac{b_3^{\parallel}}{2\pi}, \quad A_2 = -\frac{b_3^{\perp}}{2\pi}, \quad B_1 = \frac{R_3\tau_{\infty}^h - K_2\tau_{\infty}}{C_{44}K_2 - R_3^2}, \quad B_2 = \frac{R_3\tau_{\infty} - C_{44}\tau_{\infty}^h}{C_{44}K_2 - R_3^2} \quad (2.20)$$

函数 $\mathbf{f}_1(z)$ 与受到裂纹扰动的场相关, 除了裂纹处之外是解析的.

由式 (2.1), (2.3) 和 (2.16), 沿任意弧 AB 的合力为

$$\mathbf{T} = \int_A^B \mathbf{t}_x dy - \mathbf{t}_y dx = C \text{Im}[\mathbf{f}(z)]_A^B \quad (2.21)$$

这里 Im 表示虚部, $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y$ 和 C 如下所示

$$\mathbf{t}_x = \{\sigma_{zx}, H_{zx}\}^T, \quad \mathbf{t}_y = \{\sigma_{zy}, H_{zy}\}^T, \quad C = \begin{bmatrix} C_{44} & R_3 \\ R_3 & K_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

因此, 在楔形裂纹表面 $\theta = \pm(\pi - \alpha/2)$ 处边界条件为

$$\mathbf{T}(z) = 0 \quad (2.23)$$

由于问题的复杂性, 我们不可能直接在 z 平面上加以解决, 现引进保角映射如下

$$z = \zeta^{\frac{1}{\lambda}} \quad (2.24)$$

其中 $\lambda = \pi/(2\pi - \alpha)$, $\zeta = \xi + i\eta$, 这一保角映射把 z 平面上的边界 $\theta = \pm(\pi - \alpha/2)$ 映射到了 ζ 平面上的虚轴. 那么, 在 ζ 平面上边界条件 (2.23) 变为

$$T(\zeta_c) = 0 \quad (2.25)$$

这里 ζ_c 表示虚轴上的值. 我们把式 (2.25) 改写为

$$f(\zeta_c) - \bar{f}(\bar{\zeta}_c) = 0 \quad (2.26)$$

其中 $\bar{f}$ 表示 f 的复共轭, $\bar{\zeta}_c$ 表示 ζ_c 的复共轭. 由式 (2.17), (2.23) 和 (2.26), 并且注意到沿着虚轴有 $\bar{\zeta}_c = -\zeta_c$ 成立, 再利用解析延拓技巧^[60], 可得

$$f_1(\zeta) = \bar{f}_0(-\zeta) \quad (2.27)$$

由式 (2.18) 和 (2.27), 在 ζ 平面上可获得复向量函数 $f(\zeta)$ 如下

$$f(\zeta) = A \ln(\zeta - \zeta_0) + \bar{A} \ln(\zeta + \bar{\zeta}_0) + 2i \operatorname{Im} B \zeta \quad (2.28)$$

因此, 在物理平面上, 有

$$f(z) = A \ln(z^\lambda - z_0^\lambda) + \bar{A} \ln(z^\lambda + \bar{z}_0^\lambda) + 2i \operatorname{Im} B z^\lambda \quad (2.29)$$

2.2.2 应力强度因子

由式 (2.1), (2.3), (2.16) 和 (2.29), 我们可以获得整个应力场和位移场的解析表达式 (在附录 A 中给出了应力的表达式).

与经典弹性理论类似, 我们定义复应力强度因子向量如下

$$K = \begin{bmatrix} K_{\sigma_{zx}} - iK_{\sigma_{zy}} \\ K_{H_{zx}} - iK_{H_{zy}} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

由于在裂纹尖端附近所有的场变量都具有 $r^{\lambda-1}$ ($\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$) 阶奇异性, 我们可以把式 (2.30) 改写为

$$K = \lim_{z \rightarrow 0} (2\pi z)^{(1-\lambda)} (t_x - it_y) = \lim_{z \rightarrow 0} (2\pi z)^{(1-\lambda)} [C f'(z)] \quad (2.31)$$

把式 (2.40)~(2.43) 代入到式 (2.31) 可得

$$K_{\sigma_{zy}} = -\frac{2\lambda}{(2\pi r_0)^\lambda} [(C_{44} b_3^\parallel + R_3 b_3^\perp) \cos \lambda \theta_0 + 2\pi(C_{44} B_1 + R_3 B_2)] \quad (2.32)$$

$$K_{H_{zy}} = -\frac{2\lambda}{(2\pi r_0)^\lambda} [(R_3 b_3^\parallel + K_2 b_3^\perp) \cos \lambda \theta_0 + 2\pi(R_3 B_1 + K_2 B_2)] \quad (2.33)$$

以上结果表明, 螺形位错仅仅是在沿着 x 轴的方向对楔形裂纹的应力强度因子有贡献, 这一点与传统材料中的尖裂纹情形相类似. 在不考虑相位子场的情况下, 式 (2.32) 退化成文献 [61] 中的相应结果.

2.2.3 广义 Peach-Koehler 力

利用文献 [62] 给出的准晶广义 Peach-Koehler 力公式, 由裂纹诱导的作用在位错上的力为

$$F_x = b_3^{\parallel} \sigma_{zy}^T + b_3^{\perp} H_{zy}^T \quad (2.34)$$

$$F_y = -b_3^{\parallel} \sigma_{zx}^T - b_3^{\perp} H_{zx}^T \quad (2.35)$$

这里 $\sigma_{zx}^T, \sigma_{zy}^T, H_{zx}^T$ 和 H_{zy}^T 是在没有位错的情况下, 由于裂纹的存在而产生的应力, 其详细表达式见附录 B. 对于本文所考虑的物理模型来说, 式 (2.34) 和 (2.35) 可以表示为

$$F_x = \frac{1}{4\pi r_0} (C_{44} b_3^{\parallel 2} + 2R_3 b_3^{\parallel} b_3^{\perp} + K_2 b_3^{\perp 2}) \left[(\lambda - 1) \cos \theta_0 - \frac{\lambda \cos(\lambda - 1) \theta_0}{\cos \lambda \theta_0} \right] \\ - [(C_{44} B_1 + R_3 B_2) b_3^{\parallel} + (R_3 B_1 + K_2 B_2) b_3^{\perp}] (2\lambda r_0^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1) \theta_0 - 1) \quad (2.36)$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi r_0} (C_{44} b_3^{\parallel 2} + 2R_3 b_3^{\parallel} b_3^{\perp} + K_2 b_3^{\perp 2}) \left[(\lambda - 1) \sin \theta_0 + \frac{\lambda \sin(\lambda - 1) \theta_0}{\cos \lambda \theta_0} \right] \\ + 2[(C_{44} B_1 + R_3 B_2) b_3^{\parallel} + (R_3 B_1 + K_2 B_2) b_3^{\perp}] \lambda r_0^{\lambda-1} \sin(\lambda - 1) \theta_0 \quad (2.37)$$

当位错位于 x 轴的正半轴时, 即 $z_0 = x_0 (x_0 > 0)$, 以上结果可以化简为

$$F_x = -\frac{1}{4\pi x_0} (C_{44} b_3^{\parallel 2} + 2R_3 b_3^{\parallel} b_z^{\perp} + K_2 b_z^{\perp 2}) \\ - [(C_{44} B_1 + R_3 B_2) b_3^{\parallel} + (R_3 B_1 + K_2 B_2) b_3^{\perp}] (2\lambda x_0^{\lambda-1} - 1) \quad (2.38)$$

$$F_y = 0 \quad (2.39)$$

这意味着作用在位错上的力是沿着 x 轴的. 然而, 由于式 (2.38) 比普通晶体对应的表达式要复杂得多, 我们很难判断这个力是吸引的还是排斥的.

附录 A

声子场和相位子场应力的表达式为

$$\sigma_{zx} = (C_{44} A_1 + R_3 A_2)(X_2 - X_1) - 2(C_{44} B_1 + R_3 B_2) \lambda r^{\lambda-1} \sin(\lambda - 1) \theta \quad (2.40)$$

$$\sigma_{zy} = (C_{44} A_1 + R_3 A_2)(Y_2 - Y_1) - 2(C_{44} B_1 + R_3 B_2) \lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1) \theta \quad (2.41)$$

$$H_{zx} = (R_3 A_1 + K_2 A_2)(X_2 - X_1) - 2(R_3 B_1 + K_2 B_2) \lambda r^{\lambda-1} \sin(\lambda - 1) \theta \quad (2.42)$$

$$H_{zy} = (R_3 A_1 + K_2 A_2)(Y_2 - Y_1) - 2(R_3 B_1 + K_2 B_2) \lambda r^{\lambda-1} \cos(\lambda - 1) \theta \quad (2.43)$$

其中

$$X_1 = \frac{\lambda r^{\lambda-1} [r_0^{\lambda} \sin(\lambda \theta_0 - (\lambda - 1) \theta) - r^{\lambda} \sin \theta]}{r^{2\lambda} + r_0^{2\lambda} - 2r^{\lambda} r_0^{\lambda} \cos \lambda(\theta - \theta_0)}$$