目　　录

第一章　函　　数

§1·1　函数概念…………………… 1
一、实数……………………………… 1
二、常量与变量……………………… 2
三、函数概念………………………… 4
四、函数的四则运算 ……… 16
习题1·1…………………………… 17
§1·2　函数的几个特性……… 19
一、有界性 ………………… 19
二、单调性 ………………… 23
三、奇偶性 ………………… 31
四、周期性 ………………… 34
习题1·2……………………………… 38
§1·3　反函数与复合函数…… 40
一、反函数 ………………… 40
二、复合函数 ……………… 50
习题1·3……………………………… 56
§1·4　初等函数 ………………… 58
一、基本初等函数 ………… 58
二、初等函数 ……………… 64
习题1·4……………………………… 65
小结………………………………………… 66

第二章　数　列　极　限

§2·1　数列 ……………………… 68
一、数列的意义 …………… 69
二、有界数列 ……………… 71
三、单调数列 ……………… 74
习题2·1……………………………… 75
§2·2　数列极限概念 ………… 76
一、数列极限的定义 ……… 76
二、无穷小 ………………… 89
三、发散数列、无穷大 …… 92
习题 2·2 ………………………… 100
§2·3　数列极限的性质与运算……………………… 102
一、数列极限的性质……… 102
二、收敛数列的四则运算… 111
三、"两边夹"法则 ……… 119
习题 2·3 ………………………… 121
§2·4　数列极限的存在定理与实数的连续性 …… 1'

一、数列极限的存在定理…… 123
二、实数的连续性定理…… 131
习题2·4…… 146
小结…… 150

第三章 函数极限

§3·1 函数极限概念…… 153
一、函数在无穷远点处的极限…… 153
二、函数在一点的极限…… 162
三、无穷小量…… 166
四、按"$\varepsilon—M$"或"$\varepsilon—N$"定义验证函数极限的方法…… 170
五、函数极限和数列极限间的关系…… 182
习题3·1…… 186
§3·2 函数极限的性质…… 187
一、有界量…… 187
二、函数极限的性质…… 189
三、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$…… 203
习题3·2…… 205
§3·3 无穷大量…… 206
一、定义…… 207
二、无穷大量与无穷小量的关系…… 209
三、无穷大量的性质…… 210
习题3·3…… 219
§3·4 关于无穷小(大)量的阶…… 220
一、定义…… 220
二、定理…… 222
三、一些等价的无穷小(大)量…… 222
习题3·4…… 224
§3·5 函数极限存在定理…… 225
习题3·5…… 230
小结…… 231

第四章 连续函数

§4·1 连续的概念…… 234
一、连续的概念…… 234
二、不连续点及其类型…… 239
习题4·1…… 243
§4·2 在一点连续的函数的性质…… 244

习题 4·2 …… 257
§4·3 闭区间上连续函数的性质 …… 259
一、有界性 …… 259
二、最(大)小值性 …… 260
三、介值性 …… 263
四、一致连续性 …… 268
习题 4·3 …… 275
小结 …… 277

第五章 导数和微分

§5·1 导数概念 …… 278
一、实例 …… 278
二、导数概念 …… 282
三、可导性和连续性的关系 291
习题 5·1 …… 295
§5·2 求导法则和导数公式 296
一、和、差、积、商的求导法则 …296
二、反函数求导法则 …… 300
三、复合函数求导法则 …… 304
四、导数表 …… 309
习题 5·2 …… 315
§5·3 隐函数及由参数方程确定的函数的导数 …… 318
一、隐函数及其导数 …… 318
二、对数求导法 …… 322
三、参数方程确定的函数的求导法 …… 323
四、应用题举例 …… 326
习题 5·3 …… 330
§5·4 微分 …… 331
一、微分概念 …… 331
二、微分法 …… 335
三、微分在近似计算中的应用 …… 339
四、误差估计 …… 343
习题 5·4 …… 344
§5·5 高阶导数与高阶微分 345
一、高阶导数 …… 345
二、高阶导数法则 …… 350
三、高阶微分 …… 352
习题 5·5 …… 356
小结 …… 358

第六章 微分学的基本定理及其应用

§6·1 极值 …… 361
一、极值概念 …… 361
二、可导函数的极值点的必要条件 …… 362

习题6·1…………………… 364
§6·2 中值定理 …………… 364
一、洛尔定理……………… 365
二、拉格朗日定理………… 366
三、柯西定理……………… 371
习题6·2…………………… 373
§6·3 洛必达法则 ………… 375
一、$\frac{0}{0}$型……………………… 375
二、$\frac{\infty}{\infty}$型………………………378
三、其他类型的不定式…… 386
习题6·3…………………… 388
§6·4 泰勒公式 …………… 389
一、泰勒公式……………… 389
二、泰勒公式的余项……… 393
三、几个基本初等函数的马克劳林公式………… 396
四、利用泰勒公式计算极限或进行近似计算……… 402
习题6·4…………………… 405
§6·5 利用导数研究函数的性态 …………………… 406
一、函数的单调性………… 406
二、利用导数研究不等式… 410
三、函数的极值…………… 415
四、最大值、最小值……… 423
五、描绘函数图象………… 428
习题6·5…………………… 441
小结 ……………………… 442

第七章 不 定 积 分

§7·1 不定积分概念及其性质…………………… 445
一、原函数与不定积分概念 445
二、不定积分的基本性质… 447
三、基本积分表…………… 448
四、不定积分的两个简单运算法则………………… 449
习题7·1…………………… 451
§7·2 不定积分的换元积分法和分部积分法 …… 452
一、不定积分的换元积分法 452
二、不定积分的分部积分法 460
习题7·2…………………… 471
§7·3 有理函数的积分法… 473
一、有理函数及其部分分式 473
二、有理函数积分………… 476
习题7·3…………………… 480
§7·4 可化为有理函数积分的积分类型 …………… 480
一、形如$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$的不定积分……………… 481

二、形如$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$的不定积分……………… 482
三、形如$\int R(\sin x,\cos x)dx$的不定积分……………… 485
习题 7·4………………………… 487
§7·5 简单的常微分方程 … 489
一、一般概念……………… 489
二、可分离变量的微分方程 492
三、齐次方程……………… 494
四、一阶线性方程………… 497
习题 7·5………………………… 499
小结 ………………………… 500

第八章　定　积　分

§8·1 定积分概念 ………… 503
一、实例……………………… 503
二、定积分定义…………… 507
习题 8·1………………………… 513
§8·2 可积条件和可积函数类………………………… 513
一、可积的必要条件……… 513
二、达布大（小）和……… 514
三、可积的充要条件……… 519
四、函数的振幅…………… 521
五、可积函数类…………… 525
习题 8·2………………………… 531
§8·3 定积分的基本性质 … 531
习题 8·3………………………… 540
§8·4 定积分计算 ………… 542
一、变上限定积分………… 542
二、计算定积分的基本公式………………………… 545
三、定积分的换元积分法… 548
四、定积分的分部积分法… 551
习题 8·4………………………… 553
小结 ………………………… 556

第九章　定 积 分 的 应 用

§9·1 平面图形的面积 …… 560
一、直角坐标方程表示的曲线所围成的平面图形的面积………………………… 560
二、参数方程表示的曲线所围成的平面图形的面积 565
三、曲边扇形的面积……… 566
习题 9·1………………………… 569
§9·2 平面曲线的弧长 …… 569
一、平面曲线……………… 569
二、简单曲线的长度……… 570
三、计算平面曲线长度的公

式………………………… 571
四、弧长的微分……………… 574
习题 9·2…………………… 576
§9·3 截面积已知的几何体体积………………… 577
一、截面积已知的几何体体积………………………… 577
二、旋转体体积……………… 578
习题 9·3…………………… 583
§9·4 旋转体的侧面积…… 583
习题 9·4…………………… 588
§9·5 定积分在物理学上应用的例子…………… 588
一、平面图形的静力矩与重心………………………… 590
二、变力所作的功………… 598
三、其他…………………… 601
习题 9·5 ………………… 602
小结 ……………………… 603

第一章 函 数

早在十七世纪，由于实践的需要和各门科学本身的发展，使自然科学转向对运动的研究，即对各种变化过程和各种变化着的量间的依赖关系的研究，数学开始进入变量数学的新时期，产生了变量和函数的概念。在这一世纪末出现的微积分以及随后建立起来的分析理论，就是用运动变化的观点和极限的方法研究变量间确定的依赖关系（函数关系）的一个数学领域。因此，变量间的函数关系就成为数学分析这门课程的主要研究对象和最基本的概念之一。关于变量和函数的概念，中学数学里虽然都曾介绍过，但由于它本身的重要性以及今后学习的需要，在这一章里仍做些必要的复习和补充。

§1·1 函 数 概 念

一、实数

在自然科学与技术知识的领域中，会遇到种种本质不同的量。例如，长度、面积、体积、温度、力等等都是量。凡是量都是可以测量的，就是可以取一个本质上与被测量的对象相同的东西作为度量单位，定出被测量的对象是这个度量单位的"多少倍"，从而得到测量的结果。测量量的结果就是量的数值，也就是数。凡是量都能够用数表示出来。在数

学中，我们注意的不是各种量的具体性质，在陈述数学定理时，我们暂时撇开量的各种具体性质而只注意表 示 量 的 数值。

测量量的结果得到的数可以是整数、有理数或无理数。一切有理数及无理数统称为实数。

数学分析是在实数范围内研究各种量的数值间的关系。本书中所提到的数，除特别申明外，指的都是实数。

全体实数组成的集合叫做实数集，通常记作 R。实数集具有稠密性，即对任何两个不同的实数 a、b（$a<b$），至少有个实数 c，满足不等式 $a<c<b$。因而，任何两个不相同的实数间总存在无限多个实数，既存在无限多个有理数，也存在无限多个无理数。

实数集还具有一个重要性质：实数集与直线上一切点的集合间可以建立一一对应关系。数轴就是按中学数学教材中所说的那个对应方法与实数集建立了一一对应关系的直线。因此数轴上每一个点按这个对应关系对应唯 一 的 实 数；反之，每个实数对应数轴上唯一的点。数轴上对应实数 a 的点称为“点 a”，今后，我们把“数 a”与“点 a”看作等同 的而不加区别。常把“数 a”说成“点 a”，或者相反。

二、常量与变量

在生产和科学实验的过程中，会遇到不同状态的量。其中有些量，在我们所考察的过程中，它的数值自始至终保持不变；而另外一些量，在我们所考察的过程中，它的数值不是保持不变而是变化着的。我们把在整个过程中，保持不变

只取一个数值的量叫做常量；而把在整个过程中，数值有变化的，不止取一个数值的量叫做变量。例如，密闭器内的气体在加热的过程中，容器内气体的体积始终保持不变，恒取某一个数值；而气体的温度却是变化着的，不止取一个数值。所以，在这个加热的过程中，密闭器内气体的体积是个常量，气体的温度是个变量。

但要注意，一个量是常量还是变量，依赖于研究它时所在的场合或其他条件。例如，机器上的轴一般具有热胀冷缩的性质，所以在气温变化的过程中，轴长是变化的。如果轴长的变化很微小，对我们所要研究的问题的影响微不足道，那么，就可以把轴长看作常量；但是，在精密的仪器中，轴长的微小变化往往对我们所要研究的问题的影响较大而不容忽视，这时，我们就应当认为在气温的变化过程中，轴长是个变量，以充分估计到轴长变化的影响。总之，一个量是常量还是变量不是绝对的，而是相对的，要依具体情况而定。

变量在其变化过程中，它所能取的一切数值的集合，叫做这个变量的变域。变域是由一些实数组成的集合。我们遇到的变域，大多是区间（有限的、无限的、开的、闭的、左开右闭或左闭右开的半开闭区间）。关于区间的意义与记号，大家已熟知，不再赘述。下面介绍邻域的意义：

以点 a 为中心，正数 δ 为半径的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，又叫做"点 a 的 δ 邻域"（或简称为"点 a 的邻域"），记作 $O(a, \delta)$，即

$$(a-\delta, a+\delta)=O(a, \delta).$$

点 a 的 δ 邻域就是数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$。见图1·1。

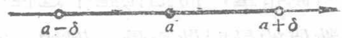

图 1·1

又把数集$\{x|0<|x-a|<\delta\}$叫做“点a的去心的δ邻域”（或简称为“点a的去心邻域”）。把点a的δ邻域$O(a,\delta)$内的中心a去掉后，就是“点a的去心的δ邻域”。见图1·2。

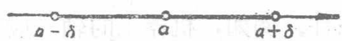

图 1·2

三、函数概念

在一个自然现象或技术过程中，往往出现多个变量，并且它们在变化过程中并非彼此独立，而是相互制约、互相依赖的。我们在数学分析里讨论的主要是变量之间一种确定的依赖关系，即所谓函数关系。

例 1 在真空中自由下落的物体，下落的时间t与下落的距离s满足公式$s=\frac{1}{2}gt^2$（常数g是重力加速度）。

这表明，在物体自由下落的过程中，变量t与s是互相依赖着；而且，如果物体下落时距地面的高度为h，那么，对于时间t的变域$\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$上的任一个$t$值，依照上述公式都有唯一确定的距离$s$与之对应。

例 2 某气象站用温度纪录仪在一昼夜之内自动画出一条气温曲线，如图1·3。它表示从时间$t=0$(小时)到$t=24$(小时)之间气温T(℃)的变化。

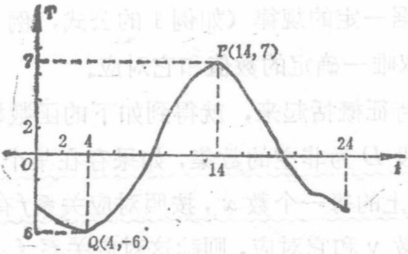

图 1·3

显然，在气温变化的过程中，变量 t 和 T 是互相依赖着，而且，对于时间 t 的变域〔0, 24〕上的任一个 t 值，根据气温曲线都有唯一确定的气温值 T 与之对应。

例 3 某河流水文站，记录了该河流某年各月的月流量 V（即一个月内流过的水量的总和），并列成下表：

月份 T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月流量 V（亿方）	0.39	0.40	0.37	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

当我们考察这一年的月流量变化情况时，显然，月份 T 和月流量 V 都是变量。而且，在这月流量的变化过程中，变量 T 和 V 是互相依赖着，对于月份 T 的变域 $\{1,2,3,\cdots,12\}$ 内的任一个 T 值，根据上列的表，都有唯一确定的月流量 V 和它对应。

从以上三例可以看出，尽管它们所涉及的自然现象和具体问题不同，但有以下的共同点：

（1）在某一个变化过程中，有两个相互依赖着的变量；

（2）在这个变化过程中，其中一个变量（如例 1 和例 2 的时间 t，例 3 的月份 T），在其变域内任取一值时，另一个

变量可以根据一定的规律（如例 1 的公式，例 2 的曲线，例 3 的表格）取唯一确定的数值和它对应。

把上述特征概括起来，就得到如下的函数概念。

定义 设 D 为非空的数集，如果存在某个对应关系 f，使得对于 D 上的每一个数 x，按照对应关系 f 有实数集 R 中唯一确定的数 y 和它对应，则称这对应关系 f 是定义在数集 D 上的函数①；并称数 x 所对应的数 y 为函数 f 在 x 点的函数值，记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$。这时取值于数集 D 上的变量 x 称为自变量，它所对应的变量 y 称为因变量；数集 D 称为函数 f 的定义域；一切函数值 $f(x)$ 的集合 E 称为函数 f 的值域，记为 $f(D)$，即

$$E=f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}\subseteq R.$$

可见定义在数集 D 上的函数 f，就是数集 D 到 R 中的一个单值对应（或叫做映射）。通过它的作用，使每一个 $x\in D$ 分别对应于唯一确定的 $y\in R$，把数集 D 变换为数集 $E=f(D)\subseteq R$。有时，亦称 $y=f(x)$ 为 x 在函数 f 作用下的象，称 x 为 $y=f(x)$ 的原象。上述事实也常用如下的记号表示：

$$\text{函数 } f:\ D\longrightarrow R$$
$$x\longmapsto y=f(x).$$

用箭矢图表示如图1·4。

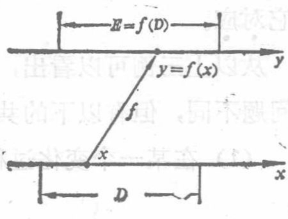

图 1·4

在例 1 中，公式 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 给出了从数集 $D=\left[0,\ \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$ 到 R 中的一个单值对应。

---

① 字母 f 是 *function*（函数）的字首。

$$\text{函数 } f: \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right] \longrightarrow R$$

$$t \longmapsto s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

这个函数的定义域 $D=\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，值域 $E=f(D)=[0, h]$。

在例 2 中，通过直角坐标平面 tOT 上一条曲线 $T=f(t)$ 给出了从数集[0，24]到 R 中的一个单值对应。

$$\text{函数} f: \quad [0,24] \longrightarrow R$$

$$t \longmapsto T = f(t).$$

这个函数的定义域 $D=[0, 24]$，值域 $E=f(D)=[-6,7]$。

在例 3 中，通过表格也给出了从数集 $D=\{1, 2, \cdots, 12\}$到 R 中的一个单值对应关系。

$$\text{函数 } f: D=\{1,2,\cdots,12\} \longrightarrow R$$

$$T \longmapsto V = f(T).$$

这个函数的定义域 D 是有限数集$\{1,2,\cdots,12\}$，值域 $E=f(D)$是表格第二栏列举的 12 个数值的集合。

今后也常把"函数 f：$D \longrightarrow R$，$x \longmapsto y=f(x)$"简略地写成"函数 $y=f(x)$，$x \in D$"。或在不用特别指明函数定义域的场合，就写为"函数 $f(x)$"，并把因变量 $y=f(x)$ 说成是自变量 x 的函数。

函数概念有三个要素：某个单值的对应关系 f、定义域 D 和值域 $E=f(D)$。其中，对应关系 f 和定义域 D 是基本的两要素，而值域E随着对应关系 f 和定义域 D 的确定而确定。

1. 函数的定义域

按照定义，函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 就是使函数 f 所表示的那个对应关系有意义的实数 x 的集合，即

$$D=\{x \mid f(x)\in R\}。$$

在解决实际问题时，问题中的变量 x，y 可以取哪些数值，必须符合实际情况。比如，例 1 中的自变量 t 是物体下落的时间，所以 t 的变域是 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，在这里，由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给出的函数的定义域就是 $\left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$，而不是 $(-\infty, +\infty)$。

如果函数 $y=f(x)$ 的对应关系是用一组对于 x 的运算式子来表现，而且对变量 x、y 的取值范围没有明确的说明，那么，函数 $f(x)$ 的定义域通常认为就是使这式子中的运算在实数范围内有意义的实数 x 的集合。

例 4 确定由下列等式给出的函数 $y=f(x)$ 的定义域：

i) $y=f(x)=\lg\cos x$； ii) $y=f(x)=a(\cos^2 x+\sin^2 x)$。

〔解〕 i) 等式 $y=\lg\cos x$ 右端施行于 x 的一组运算是“取 x 的余弦值，而后再取对数”，在实数范围内可施行这组运算的 x 的条件是 $\cos x>0$，亦即

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in J)①。$$

所以，函数 $y=f(x)=\lg\cos x$ 的定义域是

$$\begin{aligned} D&=\{x \mid \cos x>0\} \\ &=\{x \mid 2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\}。\end{aligned}$$

ii) 函数 $y=f(x)=a(\cos^2 x+\sin^2 x)$（$a$ 为常数）的定义域是 $R=(-\infty, +\infty)$。因为对于任意的 $x\in R$，都有

$$y=a(\cos^2 x+\sin^2 x)=a,$$

① 今后用 J 表示一切整数的集合.

所以，f 是从 R 到 R 的一个单值对应，而且这个对应关系是“把每一个 x 对应于同一个常数 a”，如箭矢图1·5所示。于是

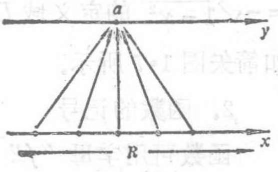

图 1·5

函数 f：$R \longrightarrow R$

$$x \longmapsto y=f(x)=a(\cos^2 x+\sin^2 x)=a.$$

因变量 y 恒取同一个常数 a 的特殊函数 $y=f(x)=a$ 叫做常量函数。

例 5 分别求当 i) $y\geqslant 0$，ii) $y\leqslant 0$ 时，由等式 $x^2+y^2=1$ 所给出的函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域。

〔解〕 i) 因为 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\geqslant 0\end{cases} \Longleftrightarrow y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$，

在实数范围内使等式 $y=\sqrt{1-x^2}$ 右端运算可施行的数 x 的集合是

$$D=\{x\,|\,1-x^2\geqslant 0\}=[-1,\ 1],$$

所以，由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 所给出的函数 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域 $E=f(D)=[0,1]$。如箭矢图1·6所示。

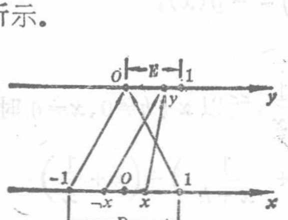

图 1·6

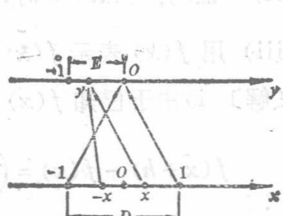

图 1·7

ii) 类似地，由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\leqslant 0\end{cases}$ 所给出的函数 $y=f(x)$

$=-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域 $D=[-1, 1]$，值域 $E=f(D)=[-1, 0]$。如箭矢图1·7所示。

2. 函数的记号

函数可用字母"f"表示。但当同时出现几个不同的函数时，应分别用不同的字母 f、g、h、ϕ、…、G、F 表示不同的函数，如分别写作

$$y=f(x)、y=g(x)、\cdots、y=F(x)$$

等。当 x 取固定值 a 时，$f(a)$、$g(a)$、…、$F(a)$ 等就分别是函数 f、g、…、F 在 a 点的函数值。

比如，例5中由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 与由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\leqslant 0\end{cases}$ 给出的是不同的两个函数，就应当分别记作 $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=g(x)=-\sqrt{1-x^2}$。这时 $f(0)=1$，$f(1)=0$，$g(0)=-1$，$g(1)=0$，但 $f(3)$ 与 $g(3)$ 都没有意义。

例 6 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$。

i) 求 $f(x+h)-f(x)$（其中 $x+h\neq 0$，$x\neq 0$）；

ii) 证明：当 $x\neq 0$ 时，$g\left(\dfrac{1}{x}\right)=-g(x)$；

iii) 用 $f(x)$ 表示 $f(x^2)$。

〔解〕 i) 由于已知 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，所以 $x+h\neq 0$、$x\neq 0$ 时，

$$f(x+h)-f(x)=\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=h-\frac{h}{x(x+h)}.$$

ii) 由于已知 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$，所以 $x\neq 0$ 时，