



普通高等教育“十二五”规划教材
武汉大学数学教学丛书

丛书主编 陈 化 副主编 樊启斌

高等数学 全程同步导引

(下册)

湛少锋 编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
武汉大学数学教学丛书
丛书主编 陈化 副主编 樊启斌

高等数学全程同步导引

下 册

湛少锋 编著



1052735



T1052735

科学出版社

北 京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

内 容 简 介

本套书为《高等数学》辅助教材,分为上、下两册,依据教育部颁发的《关于高等学校微积分课程的基本要求》,遵循工科硕士研究生入学考试大纲和全国大学生高等数学竞赛大纲,其章节顺序与武汉大学齐民友主编的《高等数学》(以下简称教材)一致.按章节成书,每节分两个板块:内容概要、典型例题选讲.每章加设两个板块:学习要求;考研真题与竞赛真题解析.本书(下册)从教材习题、多本《高等数学》辅导教材例题、高等数学习题集、数学分析习题集、历年研究生入学高等数学试题、国内外大学生高等数学竞赛试题中选择了近443道题进行了归类解析.

本套书(上、下两册)选题广泛,是所有正在学习或已经学过高等数学课程、正准备参加非数学类研究生入学考试以及全国大学生数学竞赛的非数学专业学生学习参考书,旨在使广大读者更好地把握高等数学的思想方法和知识内涵;增进数学思维和数学算理;有效地提高高等数学课程的学习效率.也是高等学校《高等数学》课程教师的教学参考书,为广大教师提高课堂教学质量提供有效的教学素材,力求使每位读者都能开卷有益.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程同步导引.下册/湛少锋编著. —北京:科学出版社,2013.1
(武汉大学数学教学丛书)

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-036464-7

I. 高… II. 湛… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 010350 号

责任编辑:王雨舸/责任校对:董艳辉

责任印制:彭超/封面设计:苏波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2013年1月第一版 印张:18 3/4

2013年1月第一次印刷 字数:464 000

定价:33.80元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书编著者在武汉大学教学一线教授高等数学三十余年,教授过各种层次学生,特别是在武汉大学弘毅课堂、研究生入学考试辅导、全国大学生数学竞赛辅导的教学活动中,面对不同的学习人群,总希望能做一件对所有学习人群都有所帮助的工作,正巧科学出版社给了这样一次机会,从而就有了这本《高等数学全程同步导引》辅导教材.本书结合高等数学课程性质与特点,根据读者的不同需求,组织了不同层次的知识素材,读者可选取学习.本辅导教材的基准教材是武汉大学数学与统计学院齐民友主编,湛少锋、胡新启、桂晓风、黄明、杨丽华老师编写的《高等数学》.

本辅导教材的例题除体现基本思想方法、基本概念、基本理论和基本运算技能外,各章节内容又有所深化与提高,意在与弘毅班教学、研究生考试、数学竞赛相衔接.所以本辅导教材既可作为“高等数学(微积分)”课程的习题课教材和教学参考书,也可作为准备报考非数学类专业硕士研究生学生以及有意参加全国高等数学竞赛学生的复习用书.

本辅导教材的内容顺序与基准教材一致.按章节成书,每节分两个板块:内容概要、典型例题选讲.每章加设两板块:学习要求;考研真题与竞赛真题解析.板块的设计与内容的选取若能为不同的学习群体带来有益的帮助,达到预期的效果那就是编者最大的心愿.本书分上、下册.

本书的编写得到科学出版社和武汉大学数学与统计学院的大力支持,武汉大学数学与统计学院樊启斌教授对本书的编写给予了很大的帮助.另外,本书在编写中参阅大量高等数学教材、辅导教材和研究

生考试复习应试教材,这里恕不一一指明出处和作者,在此,编者一并深表感谢.

限于编者水平,加之时间紧迫,书中难免有不妥之处,敬请广大读者和各位同仁批评指正,以使本书不断完善起来.

编 者

2012年7月25日于珞珈山

目 录

第八章 向量代数与空间解析几何	1
学习要求	1
第一节 向量及其线性运算	1
一、内容概要	1
二、典型例题选讲	2
第二节 点的坐标与向量的坐标	4
一、内容概要	4
二、典型例题选讲	4
第三节 向量的乘法运算	5
一、内容概要	5
二、典型例题选讲	7
第四节 平面	10
一、内容概要	10
二、典型例题选讲	11
第五节 空间直线	14
一、内容概要	14
二、典型例题选讲	15
第六节 空间曲面	20
一、内容概要	20
二、典型例题选讲	21
第七节 空间曲线及其方程	25
一、内容概要	25
二、典型例题选讲	25
第八节 二次曲面	28
一、内容概要	28
二、典型例题选讲	28
考研真题与竞赛真题解析	29
第九章 多元函数微分法及其应用	34
学习要求	34
第一节 多元函数的基本概念	34
一、内容概要	34

二、典型例题选讲	36
第二节 多元函数的极限及连续性	38
一、内容概要	38
二、典型例题选讲	39
第三节 偏导数与全微分	45
一、内容概要	45
二、典型例题选讲	47
第四节 多元函数复合函数的求导法则	52
一、内容概要	52
二、典型例题选讲	52
第五节 多元函数的高阶偏导数	59
一、内容概要	59
二、典型例题选讲	59
第六节 隐函数的求导法则	63
一、内容概要	63
二、典型例题选讲	63
第七节 方向导数与梯度	71
一、内容概要	71
二、典型例题选讲	72
第八节 多元函数微分学的几何应用	75
一、内容概要	75
二、典型例题选讲	76
第九节 二元函数的泰勒公式	80
一、内容概要	80
二、典型例题选讲	80
第十节 多元函数的极值与最值	83
一、内容概要	83
二、典型例题选讲	84
考研真题与竞赛真题解析	88
 第十章 重积分	102
学习要求	102
第一节 重积分的概念和性质	102
一、内容概要	102
二、典型例题选讲	104
第二节 直角坐标系下二重积分的计算	107
一、内容概要	107
二、典型例题选讲	107
第三节 极坐标系下二重积分的计算	116
一、内容概要	116

二、典型例题选讲	118
第四节 直角坐标系下三重积分的计算	126
一、内容概要	126
二、典型例题选讲	126
第五节 柱面坐标与球面坐标系下三重积分的计算	131
一、内容概要	131
二、典型例题选讲	133
考研真题与竞赛真题解析	137
 第十一章 曲线积分与曲面积分	147
学习要求	147
第一节 对弧长的曲线积分	147
一、内容概要	147
二、典型例题选讲	149
第二节 对坐标的曲线积分	155
一、内容概要	155
二、典型例题选讲	156
第三节 格林公式	159
一、内容概要	159
二、典型例题选讲	160
第四节 对面积的曲面积分	169
一、内容概要	169
二、典型例题选讲	170
第五节 对坐标的曲面积分	178
一、内容概要	178
二、典型例题选讲	180
第六节 高斯公式	186
一、内容概要	186
二、典型例题选讲	186
第七节 斯托克斯公式	196
一、内容概要	196
二、典型例题选讲	196
第八节* 外微分式	200
一、内容概要	200
二、典型例题选讲	201
第九节 多元函数积分的物理应用	202
一、内容概要	202
二、典型例题选讲	205
考研真题与竞赛真题解析	208

第十二章* 含参变量积分	219
学习要求	219
第一节 含参变量的常义积分	219
一、内容概要	219
二、典型例题选讲	220
第二节 含参变量的广义积分	225
一、内容概要	225
二、典型例题选讲	226
第三节 Γ 函数与 B 函数	228
一、内容概要	228
二、典型例题选讲	229
第十三章 无穷级数	231
学习要求	231
第一节 常数项级数的概念与性质	232
一、内容概要	232
二、典型例题选讲	233
第二节 正项级数及审敛法	239
一、内容概要	239
二、典型例题选讲	239
第三节 任意项级数	246
一、内容概要	246
二、典型例题选讲	246
第四节* 函数项级数	250
一、主要内容	250
二、典型例题选讲	252
第五节 幂级数	256
一、内容概要	256
二、典型例题选讲	258
第六节 函数展开成幂级数	265
一、内容概要	265
二、典型例题选讲	267
第七节 傅里叶级数	271
一、内容概要	271
二、典型例题选讲	272
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	276
一、内容概要	276
二、典型例题选讲	276
第九节* 傅里叶级数的复数形式	278
一、内容概要	278
二、典型例题选讲	278
考研真题与竞赛真题解析	279

第八章 向量代数与空间解析几何

学习要求

1. 理解空间直角坐标系的概念,掌握两点间的距离公式.
2. 理解向量的概念、向量的模、单位向量、零向量与向量的方向角、方向余弦概念.
3. 理解向量的加法、数乘、数量积与向量积的概念.
4. 理解基本单位向量,熟练掌握向量的坐标表示,熟练掌握用向量的坐标表示进行向量的加法、数乘、数量积与向量积的运算.
5. 理解平面的点法式方程和空间直线的点向式方程(标准方程)、参数方程,了解平面和空间直线的一般式方程.
6. 理解曲面及其方程的关系,知道球面、柱面和旋转曲面的概念,掌握球面、以坐标轴为旋转轴、准线在坐标面上的旋转曲面及以坐标轴为轴的圆柱面和圆锥面的方程及其图形.
7. 了解空间曲线及其方程,会求空间曲线在坐标面内的投影.
8. 了解椭球面、椭圆抛物面等二次曲面的标准方程及其图形.

重点 向量的概念,向量的加法、数乘、数量积与向量积的概念,用向量的坐标表示进行向量的加法、数乘、数量积与向量积的运算,平面的点法式方程,空间直线的标准式方程和参数方程,球面、以坐标轴为轴的圆柱面和圆锥面方程及其图形,空间曲线在坐标面内的投影.

难点 向量的概念,向量的数量积与向量积的概念与计算,利用向量的数量积与向量积去建立平面方程与空间直线方程的方法,利用曲面的方程画出空间图形.

* * * * *

第一节 向量及其线性运算

一、内容概要

向量 — 具有大小及方向的量.

向量的模 — 向量的大小(即长度)称为向量的模. 向量 n 的模用 $|n|$ 表示.

模为零的向量称为零向量,常用 0 表示. 零向量的方向不定.

单位向量 模为1的向量称为单位向量. 方向与向量 a 一致的单位向量常用 a^0 表示; 方向依次与空间直角坐标系的 x, y, z 轴正向一致的单位向量称为“基本单位向量”, 分别用 i, j, k 表示.

向量的方向余弦 向量 a 与坐标轴 x, y, z 轴正向的夹角 α, β, γ 依次称作 a 的第一方向角、第二方向角和第三方向角; 向量 a 的方向角 α, β, γ 的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 a 的方向余弦. 向量与数的乘法.

对任意实数 λ 与向量 a , 可定义 a 与 λ 的乘积(简称数乘)为一向量, 记为 λa , 它的模与方向规定如下:

$$(1) |\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$$

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, 向量 λa 的方向与 a 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, 向量 λa 的方向与 a 的方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$.

若 a 与 b 模数相等且平行而方向相反, 则称 a 与 b 互为负向量, 记为 $a = -b$ 或 $b = -a$.

向量的加法与数乘

$$a + b = b + a; \quad (a + b) + c = a + (b + c); \quad a - b = a + (-b); \quad ka = ak;$$

$$(kl)a = k(la) = l(ka); \quad (k + l)a = ka + la; \quad k(a + b) = ka + kb \quad (k, l \text{ 是数量})$$

二、典型例题选讲

例1 给出等式 $|a + b| = |a - b|$ 成立时向量 a, b 应满足的充分必要条件, 并说明理由.

解 由向量加法平行四边形法则可知, $|a + b|, |a - b|$ 分别表示以 a, b 向量为邻边的平行四边形的两条对角线的长, 则等式 $|a + b| = |a - b|$ 说明平行四边形的对角线相等, 故此平行四边形为矩形, 所以 $a \perp b$.

反之, 若 $a \perp b$, 则以 a, b 向量为邻边的平行四边形为矩形, 故其两条对角线的长相等, 即等式 $|a + b| = |a - b|$ 成立. 故等式 $|a + b| = |a - b|$ 成立的充分必要条件是向量 a, b 垂直.

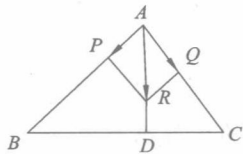


图 8-1

例2 自直角三角形的直角顶点 A 作高线 AD , 沿 AB 的力其数值是 $|\overrightarrow{AB}|^{-1}$, 沿 AC 的力其数值是 $|\overrightarrow{AC}|^{-1}$, 则其合力将沿 AD 且数值为 $|\overrightarrow{AD}|^{-1}$.

证 如图8-1所示. $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|^{-1}, |\overrightarrow{AQ}| = |\overrightarrow{AC}|^{-1}, \overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AQ}$ 的合力是 $\overrightarrow{AR}$, 故由勾股定理, 得

$$|\overrightarrow{AR}| = \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{AQ}|^2}, \quad \sqrt{\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|^2} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|^2}} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}$$

但 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AD}|$, 所以有 $|\overrightarrow{AR}| = \frac{1}{|\overrightarrow{AD}|}$. 又

$$\tan \angle RAP = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AP}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \tan \angle ACB = \tan \angle ADB$$

故 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 重合. 因此合力 $\overrightarrow{AR}$ 沿 AD , 其值是 $|\overrightarrow{AD}|^{-1}$.

例 3 证明: 三角形的三条中线向量构成一个三角形.

证 记 $\overrightarrow{AB} = c, \overrightarrow{CA} = b, \overrightarrow{BC} = a$, 且 D, E, F 分别为 BC, CA, AB 的中点. 因为

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = c + \frac{1}{2}a, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = a + \frac{1}{2}b, \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = b + \frac{1}{2}c$$

所以

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}(a + b + c)$$

又因为 $a + b + c = 0$, 所以 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$. 故 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ 可以构成一个三角形.

例 4 设在平面上给了一个四边形 $ABCD$, 点 K, L, M, N 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点, 求证: $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

证 如图 8-2 所示, 连结 AC , 则在 $\triangle ABC$ 中, $KL = \frac{1}{2}AC$ 且 $KL \parallel AC$, $\overrightarrow{KL}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向相同; 在 $\triangle DAC$ 中, $NM = \frac{1}{2}AC$ 且 $NM \parallel AC$, $\overrightarrow{NM}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向相同, 从而 $KL = MN$ 且 $\overrightarrow{KL}$ 与 $\overrightarrow{NM}$ 方向相同, 所以 $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

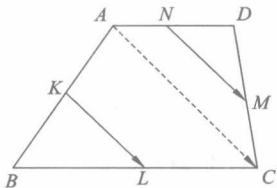


图 8-2

例 5 已知 $\overrightarrow{AB} = a + 5b, \overrightarrow{BC} = -2a + 8b, \overrightarrow{CD} = 3(a - b)$, 证明: A, B, C 三点共线.

证 由

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (a + 5b) + (-2a + 8b) + (3a - 3b) \\ &= 2a + 10b = 2(a + 5b) = 2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 有公共始点 A , 所以 A, B, C 三点共线.

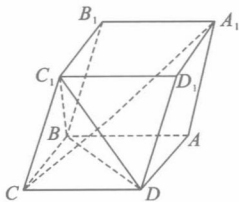


图 8-3

例 6 如图 8-3 所示, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle C_1CD = \angle C_1CB = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求证: $\overrightarrow{C_1C} \perp \overrightarrow{BD}$;

(2) 当 $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CC_1}|}$ 的值是多少时, 能使 $\overrightarrow{AC} \perp$ 平面 C_1BD ? 试给出

证明.

证 (1) 取 $\overrightarrow{CD} = a, \overrightarrow{CB} = b, \overrightarrow{CC_1} = c$, 由已知 $|a| = |b|$, 且

$$(\widehat{a, b}) = (\widehat{b, c}) = (\widehat{a, c}) = \frac{\pi}{3}, \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = a - b$$

$$\overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{BD} = c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b = \frac{1}{2}(|c| \cdot |a| - |c| \cdot |b|) = 0$$

所以有 $\overrightarrow{CC_1} \perp \overrightarrow{BD}$.

(2) $\overrightarrow{AC} \perp$ 平面 C_1BD , 则 $\overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{A_1C} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{C_1D} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, 所以有

$$\overrightarrow{C_1A} \cdot \overrightarrow{C_1D} = 0, \quad \text{即} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0$$

整理, 得

$$3a^2 - |\mathbf{a}| |\mathbf{c}| - 2c^2 = 0$$

即 $(3a^2 + 2|\mathbf{a}|)(|\mathbf{a}| - |\mathbf{c}|) = 0$, 所以有 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$, 即当 $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{CC_1}|} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = 1$

时, $\overrightarrow{AC} \perp$ 平面 C_1BD .

第二节 点的坐标与向量的坐标

一、内容概要

向量的坐标 在直角坐标系 $O-xyz$ 上, 向量 $\mathbf{a}$ 在三个坐标轴 x, y, z 上的投影依次为 a_x, a_y, a_z , 则 a_x, a_y, a_z 称为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标, 可记为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

向量的方向数 设 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则称方向与 $\mathbf{a}$ 一致的单位向量

$$\mathbf{a}^0 = \left\{ \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

为向量 $\mathbf{a}$ 的方向数, 其中, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

设向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{ON}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 且 $(\widehat{\mathbf{a}}, \mathbf{b}) = \varphi$, 过点 M 作平面垂直于 $\mathbf{b}$ 所在的直线并交直线于点 M' , 则称有向线段 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影向量. 易知

$$\overrightarrow{OM'} = (|\overrightarrow{OM}| \cos \varphi) \mathbf{e}_b = (|\mathbf{a}| \cos \varphi) \mathbf{e}_b$$

式中的数 $|\mathbf{a}| \cos \varphi$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影, 并记为 $\text{Prj}_b \mathbf{a}$.

二、典型例题选讲

例 7 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 , 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

解 设点 A 的坐标为 (x, y, z) , 由已知得
$$\begin{cases} 2 - x = 4, \\ -1 - y = -4, \\ 7 - z = 7, \end{cases}$$
 解得 $x = -2, y = 3, z = 0$,

故点 A 的坐标为 $(-2, 3, 0)$.

例 8 点 M 的向径与 x 轴成 45° 角, 与 y 轴成 60° 角, 其长度为 6 单位. 若在 z 轴上的坐标是负值, 求点 M 的坐标.

解 设点 M 的坐标为 x, y, z , 按题意 $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$, 故

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm \frac{1}{2}$$

由于 $z = \text{Prj}_z \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}| \cos \gamma = 6 \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm 3$, 且因 $z < 0$, 故 $z = -3$. 因此

$$x = |\overrightarrow{OM}| \cos \alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}, \quad y = |\overrightarrow{OM}| \cos \beta = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

故得 $M(3\sqrt{2}, 3, -3)$.

例 9 在 xOy 面上, 试求与三点 $A(3, 2, 1)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离点的坐标.

解 设所求的点的坐标为 $P(0, y, z)$, 由 P 与点 A, B, C 等距离, 而

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}|^2 &= 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2, & |\overrightarrow{PB}|^2 &= 4^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 \\ |\overrightarrow{PC}|^2 &= (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{aligned}$$

故有 $|\overrightarrow{PA}|^2 = |\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2$, 即

$$\begin{cases} 3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \\ 4^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

解得 $y = 1, z = 2$. 因此所求点的坐标为 $(0, 1, -2)$.

例 10 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1) \\ |\overrightarrow{M_1M_2}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2 \end{aligned}$$

从而 $\cos \alpha = \frac{-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \frac{1}{2}$, 所以

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{3\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}$$

例 11 已知 3 个非零向量 a, b, c 之中任意两个向量都不平行, 但 $a+b$ 平行于 $c, b+c$ 平行于 a , 求证: $a+b+c=0$.

证 由 $a+b = \lambda_1 c, b+c = \lambda_2 a$, 得

$$a+b+c = (1+\lambda_1)c, \quad a+b+c = (1+\lambda_2)a$$

从而 $(1+\lambda_2)a = (1+\lambda_1)c$, 若 $1+\lambda_2 \neq 0$, 则 $a = \frac{(1+\lambda_1)}{(1+\lambda_2)}c$, 即 a 平行于 c 与题设矛盾, 故

$$1+\lambda_2 = 0, \quad a+b+c = 0$$

第三节 向量的乘法运算

一、内容概要

向量的数量积(点积, 内积) $a \cdot b = |a| |b| \cos(\widehat{a, b})$

向量的向量积(叉积,外积) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 满足:

$$(1) |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向是 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 满足右手规则(即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的平面):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; & (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}); & (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}; & (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}); & (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \end{aligned}$$

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则有以下公式:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad k\mathbf{a} = (ka_x, ka_y, ka_z)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = |\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_z)$$

若 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 则

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1. 数量积在几何上的应用

$\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影为 $(\mathbf{a})_b = \text{Prj}_b \mathbf{a} = a \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, 且

$$\text{Prj}_c(\overrightarrow{\mathbf{a} + \mathbf{b}}) = \text{Prj}_c \mathbf{a} + \text{Prj}_c \mathbf{b}, \quad (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \arccos(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)$$

$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 即 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

2. 叉积(向量积)在几何上的应用

以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形面积为: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$;

既与 $\mathbf{a}$ 垂直又与 $\mathbf{b}$ 垂直的向量为 $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的充要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. 即

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

当 b_x, b_y, b_z 有一个或两个为零时, 上式应理解为它对应的分子为零.

3. 混合积在几何上的应用

以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积是 $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ 以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱形围成的四面体的体积是

$$\frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$$

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 都不是零向量, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充分必要条件是 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

二、典型例题选讲

例 12 已知向量 a, b 互相垂直, 向量 c 与 a, b 的夹角都是 60° , 且 $|a| = 1, |b| = 2, |c| = 3$, 计算:

$$(1) (a+b)^2 \quad (2) (a+b)(a-b) \quad (3) (3a-2b) \cdot (b-3c) \quad (4) (a+2b-c)^2$$

解 (1) $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 1 + 2 \times 0 + 2^2 = 5$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = 1 - 2^2 = -3$

(3) $(3a-2b) \cdot (b-3c) = 3a \cdot b - 2b^2 - 9a \cdot c + 6b \cdot c$

$$= -8 - 9 \times 3 \cdot \cos 60^\circ + 6 \times 2 \times 3 \cos 60^\circ = -\frac{7}{2}$$

(4) $(a+2b-c)^2 = a^2 + 4ab - 2ac - 4bc + 4b^2 + c^2$

例 13 设有向量 $a = \{2, -1, -2\}$ 和 $b = \{1, 1, z\}$, 问 z 为何值时, $(\widehat{a, b})$ 最小, 并求出最小值.

解 由

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}} \triangleq f(z)$$

要 $(\widehat{a, b})$ 最小, 则需要 $f(z)$ 最大, 问题转化为求 $f(z)$ 的最大值.

由 $f'(z) = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}} = \frac{-4-z}{3(2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 令 $f'(z) = \frac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}} = \frac{-4-z}{3(2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, 得

$z = -4$, 而 $f(-4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $(\widehat{a, b})$ 最小值为 $\frac{\pi}{4}$.

例 14 用向量法证明: 三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距.

证 如图 8-4 所示, 设 AB, BC 边的垂直平分线 PD, PE 相交于 P , 而 D, E, F 为 AB, BC, CA 的中点, 设 $\overrightarrow{PA} = a, \overrightarrow{PB} = b, \overrightarrow{PC} = c$, 则 $\overrightarrow{AB} = b - a, \overrightarrow{BC} = c - b, \overrightarrow{CA} = a - c, \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}(a + b), \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}(c + b)$, 因为 $\overrightarrow{PD} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{BC}$, 所以

$$\frac{1}{2}(a+b)(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = 0, \frac{1}{2}(c+b)(c-b) = \frac{1}{2}(c^2 - b^2) = 0$$

从而有 $a^2 = b^2 = c^2$, 即 $|c|^2 = |b|^2 = |a|^2$. 所以

$$\frac{1}{2}(a+c)(a-c) = \frac{1}{2}(a^2 - c^2) = 0$$

所以, $\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{CA}$ 且 $|c| = |b| = |a|$.

故三角形各边的垂直平分线共点且这点到各顶点等距.

例 15 已知 $|a| = 1, |b| = 5, a \cdot b = 3$. 试求:

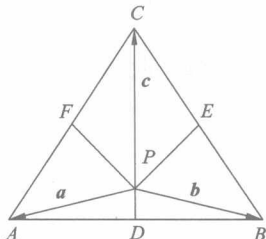


图 8-4

$$(1) [(a+b) \times (a-b)]^2 \quad (2) [(a-2b) \times (b-2a)]^2$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) [(a+b) \times (a-b)]^2 &= [(a+b) \times a - (a+b) \times b]^2 \\ &= (-2a \times b)^2 = 4 |a \times b|^2 = 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) [(a-2b) \times (b-2a)]^2 &= [a \times b - 2b \times b - a \times 2a + 4b \times a]^2 \\ &= (-3a \times b)^2 = 9 \times 4^2 = 144 \end{aligned}$$

例 16 证明: (1) $(a \times b)^2 \leq a^2 \cdot b^2$, 并说明在什么情形下等号成立;

(2) 如果 $a \times b = c \times d, a \times c = b \times d$, 那么 $a-d$ 与 $b-c$ 共线;

(3) 如果 $a = p \times n, b = q \times n, c = r \times n$, 那么 a, b, c 共面.

$$\text{证 } (1) (a \times b)^2 = |a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2(\widehat{a, b}) \leq |a|^2 |b|^2 = a^2 \cdot b^2$$

要使等号成立, 必须 $\sin^2(\widehat{a, b}) = 1$, 从而 $\sin(\widehat{a, b}) = 1$. 故 $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}$, 即当 $a \perp b$ 时, 等号成立.

(2) 因为

$$\begin{aligned} (a-d) \times (b-c) &= a \times d - a \times c - b \times d + d \times c \\ &= c \times d - b \times d + b \times d - c \times d = 0 \end{aligned}$$

所以 $a-d$ 与 $b-c$ 共线.

$$\begin{aligned} (3) (a \times b)c &= (p \times n) \times (q \times n) \cdot (r \times n) \\ &= [p \cdot (n \times n) \cdot q - (p \times n) \cdot q \cdot n] \cdot (r \times n) \\ &= -(p \times n) \cdot q \cdot n \cdot (r \times n) = -(p \times n) \cdot q \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

所以 $(a \times b)c = 0$, 故 a, b, c 共面.

例 17 设 a, b 为非零向量, 且 $|b| = 1, (\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{4}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a+xb| - |a-xb|}{x}$.

解 此极限为“ $\frac{0}{0}$ ”型不定式, 所以将其变形:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a+xb| - |a-xb|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a+xb|^2 - |a-xb|^2}{x(|a+xb| + |a-xb|)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+xb) \cdot (a+xb) - (a-xb) \cdot (a-xb)}{x(|a+xb| + |a-xb|)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(a \cdot b)}{x(|a+xb| + |a-xb|)} = \frac{2a \cdot b}{|a|} \\ &= |b| \cos(\widehat{a, b}) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

例 18 单位圆 O 的圆围上存在相异两点 P, Q , 同时 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的夹角为 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 设 a, b 正常数, 求极限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta^2} [|a\overrightarrow{OP}| + |b\overrightarrow{OQ}| - |a\overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{OQ}|]$.

解 因为 $|a\overrightarrow{OP}| = a |\overrightarrow{OP}| = a, |b\overrightarrow{OQ}| = b |\overrightarrow{OQ}| = b$, 所以

$$|a\overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{(a\overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{OQ}) \cdot (a\overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{OQ})} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

故