安徽省高等学校“十一五”省级规划教材
大学数学系列规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（经济管理类）

主　编／孙国正　杜先能

副主编／蒋　威　侯为波　束立生　殷晓斌

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

大学数学系列规划教材

高等数学

（经济管理类）

主　编　孙国正　杜先能

副主编　蒋　威　侯为波

束立生　殷晓斌

北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经济管理类/孙国正,杜先能主编. —2版. —合肥:安徽大学出版社, 2011.8
大学数学系列规划教材
ISBN 978-7-5664-0288-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孙…②杜… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第165312号

高等数学(经济管理类)
(大学数学系列规划教材)　　**主编**　孙国正　杜先能

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路3号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

经　销:全国新华书店
印　刷:合肥华星印务有限责任公司
开　本:170mm×240mm
印　张:23.25
字　数:403千字
版　次:2011年8月第2版
印　次:2011年8月第1次印刷
定　价:37.00元
ISBN 978-7-5664-0288-2

责任编辑:钟　蕾　陈志兴　**装帧设计**:张同龙　李　军
责任印制:陈　如

前　言

数学科学在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥着越来越大的作用. 数学的应用越来越广泛，数学在形成人类思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用.

为适应科技、经济和社会的发展对高层次人才的需求，为适应高等教育教学内容和课程体系改革的要求，以及培养“厚基础、宽口径、强能力、高素质”人才的需要，根据教育部颁发的《高等数学》教学大纲和 2003 年、2004 年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，我们编写了《高等数学》(经济管理类)一书，作为高等院校经济类和管理类专业“高等数学”课程的教材，理工类学时少的，也可使用，同时可作为硕士研究生入学统一考试的参考书.

本书在内容选择上力求简明扼要，通俗易懂，但同时注意保持数学学科自身的内在规律性和系统性. 本书注重加强基本概念、基本方法和基本思想的讲述，并注意介绍基本理论在经济学中的一些简单应用，由此提高学生分析和解决实际问题的能力.

本书的总体框架与编写大纲由省内多所学校的老师反复讨论后确定，全书共计 10 章，第 1 章、第 2 章介绍函数和极限理论，并介绍了经济学中几种常见函数；第 3 章、第 4 章是一元函数微分学，介绍了导数、微分及其应用；第 5 章、第 6 章是一元函数积分学，介绍了不定积分和定积分；第 7 章是多元函数微积分学，由浅入深地介绍了空间解析几何基础知识、多元函数的微分和二重积分；第 8 章介绍了级数及其收敛判别法，重点讨论了幂级数与泰勒级数；第 9 章、第 10 章介绍了微分方程和差分方程的初步知识.

本书的编写是在安徽师范大学、安徽大学、淮北师范大学三校数学系、教务处的领导和许多教师的大力支持下完成的，在此表示感谢.

在本书的编写过程中，我们参阅了国内外许多教材，谨表诚挚的谢意.

囿于编者学识，编写时间也比较仓促，书中错误与缺陷在所难免，恳请同行、读者提出宝贵意见，以使本书在今后的教学实践中不断完善.

编　者

2011 年 8 月

目 录

一个点 p，即如果实数 $x>0$，则可在数轴上原点右方取点 p，使得线段 Op 的长度 $|Op|$ 就是 x；如果 $x<0$，则可在数轴上原点的左方取点 p，使得线段 Op 的长度的相反数 $-|Op|$ 就是 x；如果 $x=0$，则取点 p 为数轴的原点. 显然，这样取得的点 p 是唯一的. 反之，数轴上的每一个点 p 都唯一地对应一个实数 x. 于是，全体实数与整个数轴上的点之间构成了一一对应关系. 正因为如此，通常把数轴上的点和实数不加区别，数轴上的点 p 直接用按上述对应方法所对应的实数 x 标出，该实数 x 也称为点 p 的坐标. 这正表明，我们为什么要将一条规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做“数轴”.

2. 绝对值及其基本性质

实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

从几何上看，实数 x 的绝对值 $|x|$ 就是数轴上点 x 到原点的距离，而绝对值 $|x-y|$ 则表示数轴上点 x 与点 y 之间的距离.

绝对值有如下基本性质：设 $x,y\in\mathbf{R}$，则

(1) $|x|=|-x|\geqslant 0$；$|x|=0$ 当且仅当 $x=0$.

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(3) 不等式 $|x|<a$ 和 $|x|\leqslant a$ 分别等价于不等式 $-a<x<a$ 和 $-a\leqslant x\leqslant a$（其中 $a>0$）.

(4) 三角不等式成立，即有

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|.$$

(5) $|xy|=|x||y|$.

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad (y\neq 0)$.

下面仅证明性质(4)，其余性质的证明由读者自行完成.

由性质(2)有

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\quad -|y|\leqslant y\leqslant |y|,$$

两式相加，得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|. \tag{1.1}$$

根据性质(3)，(1.1)式等价于

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|. \tag{1.2}$$

在(1.1)式中以 $-y$ 代 y，(1.1)式仍成立，故有

$$|x-y|\leqslant |x|+|y|. \tag{1.3}$$

这便证明了性质(4)中不等式的右半部分.

其次,由上述结果可得

$$|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$

因此

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|. \tag{1.4}$$

在上式中对调 x 与 y 得

$$|y|-|x|\leqslant|y-x|,$$

由性质(1)得

$$|x|-|y|\geqslant-|x-y|. \tag{1.5}$$

由(1.4),(1.5)式得

$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|,$$

从而

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|.$$

在上式中以 $-y$ 代 y,便得

$$||x|-|y||\leqslant|x+y|,$$

于是性质(4)的左半部分得证.

3. 区间与邻域

区间和邻域是今后我们经常遇到的两类重要的数集.

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

从几何上看,开区间 (a,b) 表示数轴上以 a,b 为端点但不包括端点 a 和 b 的线段上点的全体,如图 1-2 所示. 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

图 1-2

图 1-3

从几何上看,闭区间 $[a,b]$ 表示数轴上以 a,b 为端点而包括端点 a 和 b 的线段上点的全体,如图 1-3 所示. 数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 分别称为左闭右开区间和左开右闭区间,分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$. 它们统称为半开半闭区间. 半开半闭区间也有类似于开区间与闭区间的几何意义. 上述四

种区间统称为有限区间.

除上述有限区间外,还有五种无穷区间:

$$(-\infty,a)=\{x\mid -\infty<x<a\},$$
$$(-\infty,a]=\{x\mid -\infty<x\leqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.$$

这里“$-\infty$”与“$+\infty$”分别读作“负无穷大”与“正无穷大”,它们仅是一个符号,不是实数.

上述各种区间统称为区间,通常用 I 表示.

设 $x\in\mathbf{R},\delta>0$,满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,或简记为 $U(x_0)$. 点 x_0 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径. 由定义立知

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

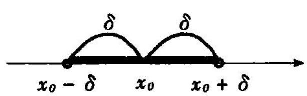

图 1-4

$U(x_0,\delta)$在数轴上的表示如图 1-4 所示. 将点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 所得的实数 x 全体称为点 x_0 的去心 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,或简记为 $\mathring{U}(x_0)$,即有

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

另外,开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点 x_0 的 δ 左邻域,记为 $U_-(x_0,\delta)$或 $U_-(x_0)$;$(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ 右邻域,记为 $U_+(x_0,\delta)$或 $U_+(x_0)$.

对于充分大的正数 M,我们定义

$$U(\infty,M)=\{x\mid |x|>M\},\quad U(-\infty,M)=\{x\mid x<-M\},$$
$$U(+\infty,M)=\{x\mid x>M\},$$

分别称它们为∞(读作无穷大)邻域,$-\infty$邻域,$+\infty$邻域.

例 1 解不等式 $1\leqslant|x-2|<3$,并用区间表示其解集.

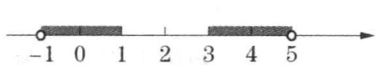

图 1-5

解 根据绝对值的几何意义,欲求解的不等式表示 x 到 2 的距离不小于 1 而小于 3. 易知,数轴上点 1 与 3 到 2 的距离均为 1,点 -1 与 5 到 2 的

距离均为 3,故所求不等式解集为$\{x\mid -1<x\leqslant 1$ 或 $3\leqslant x<5\}$,用区间来表示为$(-1,1]\cup[3,5)$. 如图 1－5 所示.

例 2　满足不等式$|x-3|<\frac{1}{5}$的实数 x 的全体,即是以 $x_0=3$ 为中心,$\delta=\frac{1}{5}$为半径的邻域,用开区间表示即为 $U\left(3,\frac{1}{5}\right)=(2.8,3.2)$.

§1.2　函数

当我们考察某个自然现象、社会经济现象或生产过程时,常常会遇到一些不同的量. 这些量有的在某个过程中一直保持不变的数值,这种量我们称其为常量;有的却在变化着,这种量我们称其为变量,并且这些量的变化不是孤立的,而是彼此相互联系并遵循某个确定的变化规律. 例如圆的面积 A 与它的半径 r 之间的关系为 $A=\pi r^2$,这里的 A 与 r 都是变量(r 在区间$(0,+\infty)$内任意取值),而 π 则是一个常量;又如,在自由落体运动中,物体下落的距离 s 与下落的时间 t,设开始下落的时刻 $t=0$,它们之间的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,这里的 s 与 t 都是变量,而重力加速度 g 是常量.

任何变量都有一定的取值范围. 一变量所取到的全部数值组成的集合,称为该变量的变域. 变量的变域常常是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集,甚至是一个区间. 例如前面所述的圆半径 r 的变域就是区间$(0,+\infty)$.

在关系式 $A=\pi r^2$ 与 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 中,抽去其中各个量的实际意义,可以看出它们的一个共同特征:它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系,其中一个量的变化,导致另一个量有确定的值与之对应. 把这种确定的依赖关系抽象出来,就是函数的概念.

1. 函数概念

定义 1.2.1　设 $D\subset\mathbf{R}$ 是一个给定的非空数集,如果存在一个对应法则 f,使得对 D 内每个数 x,都有唯一的一个数 y 与之对应,则称该对应法则 f 为定义在数集 D 上的函数,简称为函数. 数集 D 称为该函数的定义域,通常记作 $D(f)$,x 称为自变量,y 称为因变量. 对每个 $x\in D$,由法则 f 所对应的实数 y 称为 f 在 x 处的函数值,记作 $y=f(x)$. 函数值全体之集称为函数 f 的值域,记作 $R(f)$(或 $f(D)$),即有

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

注 1 确定一个函数有两个重要因素：定义域 $D(f)$ 和对应关系 f. 因此，我们通常用

$$y=f(x), \quad x\in D(f)$$

来表示一个函数. 函数的这种表示，使得 x 与 y 这两个变量之间的对应关系明晰，运算方便，但严格说来，这是把函数与函数值混用的记法.

注 2 既然定义域和对应关系是确定一个函数的两要素，因此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和相同的对应法则，否则，该两函数就是不相同的. 例如 $f(x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是不相同的两个函数，而 $\varphi(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $\psi(x)=\sin^2x+\cos^2x, x\in(-\infty,+\infty)$ 是相同的函数. 由此可见，相同的函数其对应法则的表达形式可以不同.

注 3 给定一个函数 f，实际上是给出了 x 轴上的点集 $D(f)$ 到 y 轴上的点集 $R(f)$ 之间的单值对应，这种对应也称为映射. 对于 $x\in D(f)$，有 $f(x)\in R(f)$，我们称 $f(x)$ 为 x 在映射 f 下的像，x 称为 $f(x)$ 的原像. 按照映射的表示方法，函数 f 又可表示为

$$f: D\to\mathbf{R}, x\mapsto f(x), \quad x\in D.$$

2. 函数的表示法

表示函数的方法主要有三种，即列表法、图像法和解析法.

(1) 列表法.

在许多实际问题中，常常把自变量所取的值与对应的函数值列成表格，用以表示自变量与因变量之间的函数关系. 函数的这种表示法称为列表法.

例 1 某化工公司某年农用化肥月生产量统计如下表：

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量（万吨）	5.1	5.2	5.6	6.2	5.9	5.5	5.8	5.0	6.1	5.4	4.2	4.1

从上表可以看出，该公司化肥月产量 y 与月份 t 之间有着确定的对应关系，月份 t 在 1 到 12 之间每取一个整数值，由表可得月产量 y 有唯一的一个对应值，从而表格确定了一个函数，其定义域是数集 $\{t\mid 1\leqslant t\leqslant 12, t\in\mathbf{Z}\}$.

(2) 图像法.

集 $Grf=\{(x,f(x))\mid x\in D(f)\}$ 称为 f 的图像（或图形）. 一元函数的图像是平面点集.

将两个变量之间的对应关系在平面直角坐标系中用图形表示出来，这

种表示函数的方法称为图像法.

例 2　某气象站利用自动温度记录仪记下某地一天 24 小时的气温变化,如图 1－6 所示.

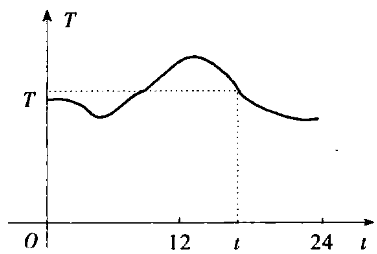

图 1－6

由图可见,对于一昼夜内任一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应,从而该曲线便确定了区间$[0,24]$上的一个函数.

(3)解析法.

将两个变量之间的对应关系利用一定的数学运算式——解析表达式表示出来,这种表示函数的方法称为解析法.用解析法表示函数,应该使得对自变量的每一个值,通过解析表达式能确定唯一的因变量的值.

例 3　某工厂每天生产某产品最多为 5000 件,固定成本为 2000 元,单位可变成本为 100 元,则每天该产品的日产量 x(件)与日总成本 y(元)可建立如下函数关系:

$$y=2000+100x,\quad x\in D(f)=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 5000, x\in\mathbf{N}\}.$$

上式表明了 y 是 x 的函数,它的解析式是 $f(x)=2000+100x$.

以上表示函数的三种方法各有其特点,列表法和图像法直观,而解析法便于更进一步研究函数(如施行运算等),因此,今后主要是利用解析式来表示函数.

用解析式表示函数,并不要求函数在整个定义域 $D(f)$上有唯一的解析表达式,往往在 $D(f)$的不同子集上,函数的解析式是不一样的,这相当于将 $D(f)$分成若干"段"(部分),每一"段"有其一个解析式,这些解析式合起来表示了一个函数,通常称这种函数为分段函数.

例 4　(1) 符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

(2) 取整函数

$$f(x)=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

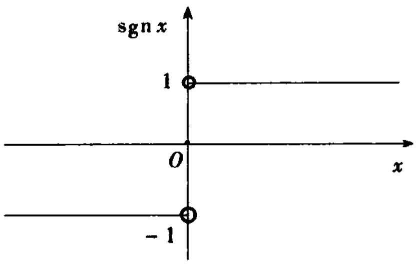

图 1-7

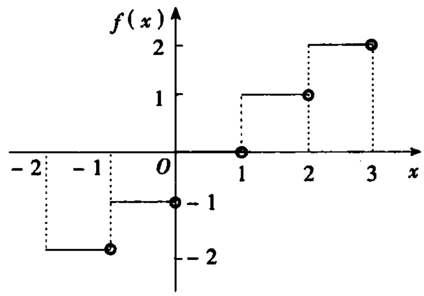

图 1-8

需要注意，分段函数的解析式不止一个，但它是一个函数，其定义域是“各段”之并集；分段函数的图像应分段作出，但不要认为图像分段的函数就是分段函数；求函数值 $f(x_0)$时，应先判明 x_0 属于定义域中哪一个子集，再将 x_0 代入相应的表达式计算.

3. 函数定义域

函数的定义域是确定一个函数起决定作用的两个要素之一. 一般地，表示一个函数，不仅要给出自变量与因变量的对应法则，同时要标明函数的定义域，即自变量的变化范围. 在利用解析法表示函数时，有时只写出函数 $f(x)$的解析表达式，并不标明定义域，此时函数的定义域指的是使解析表达式有意义的自变量 x 全体之集，这种定义域也叫做自然定义域，或存在域.

例 5 求函数 $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{x^2-1}$的定义域.

解 所求的定义域即为自然定义域，故应有

$$x+4\geqslant0 \text{ 且 } x^2-1\neq0.$$

由 $x+4\geqslant0$ 得 $x\geqslant-4$，即 $x\in[-4,+\infty)$；由 $x^2-1\neq0$ 得 $x\neq\pm1$，即 $x\in[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. 故 $f(x)$的定义域为

$$D(f)=[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

对于由实际应用问题所确定的函数，它的定义域不仅要保证函数的表达式有意义，还要使得实际问题有意义. 通常称这种符合实际问题的定义域为实际定义域.

例 6 物体在 $t=0$ 时从高度为 h 处自由落下，设在时间 t 时落下的距离为 s，则 s 是 t 的函数，其表达式为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度(为常数). 函数的实际定义域是区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$,如果不考虑变量 t 与 s 的实际意义,则函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

4. 函数的简单性质

函数的有界性.

定义 1.2.2 设 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在数 $M(L)$,对每一个 $x\in D$,都有

$$f(x)\leqslant M\quad (f(x)\geqslant L),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界,$M(L)$ 称为 $f(x)$ 的一个上(下)界. 特别地,当 D 就是 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 时,称 $f(x)$ 为有上(下)界函数.

由定义立知,若 $M(L)$ 为 $f(x)$ 的上(下)界,则任何大(小)于 $M(L)$ 的数都是 $f(x)$ 的上(下)界;若 $f(x)$ 为有上(下)界函数,则 $f(x)$ 必是有上(下)界的. 反之,若 $f(x)$ 在某个数集 D 上有上(下)界,则 $f(x)$ 不一定是有上(下)界函数.

定义 1.2.3 设 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在正数 M,对每一个 $x\in D$,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 特别地,当 D 就是 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 时,称 $f(x)$ 为有界函数.

根据定义,$f(x)$ 在 D 上有界,意味着 $f(x)$ 在 D 上既有上界 M,又有下界 $-M$,此时 $f(x)$ 的上(下)界并不是唯一的. 反之,若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界(上下界不一定互为相反数),则 $f(x)$ 在 D 上必是有界的.

函数 $f(x)$ 在 D 上无上界(无下界、无界),是指 $f(x)$ 不满足上述相应的定义. 可以给出这个概念的正面陈述:

设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若对任意正数 M,总存在 $x_0\in D$,使得

$$f(x_0)>M\quad (f(x_0)<-M,|f(x_0)|>M),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上无上界(无下界、无界). 特别地,如果 $D=D(f)$,则称 $f(x)$ 为无上界函数(无下界函数、无界函数).

例 7 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

这是因为对任意 $x\in D(f)=(-\infty,+\infty)$,有

$$0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1.$$

例 8 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$[1,2]$上有界，但它是无界函数.

证 $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$[1,2]\subset D(f)$. 对每个 $x\in[1,2]$，有$\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 在$[1,2]$上有界. 其次，对任意 $M>0$，取 $x_M=\dfrac{1}{2M}$，则 $x_M\in D(f)$，而$|f(x_M)|=2M>M$，故 $f(x)$ 是无界函数.

函数的单调性.

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义，若对 D 内任意两点 x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调递增(单调递减)的，简称为单增(单减)的. 如果总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是严格单增(严格单减)的.

若 $D=D(f)$，则相应地称 $f(x)$ 为单增(单减)函数，或严格单增(严格单减)函数. 单增和单减函数统称为单调函数，严格单增和严格单减函数统称为严格单调函数.

根据定义，严格单调函数是单调函数，反之不真. 常函数既是单增函数，又是单减函数，但不是严格单调函数.

例 9 函数 $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$是严格单增函数. 因为对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1<x_2$，若 x_1,x_2 异号，则总有 $x_1^3<x_2^3$；若 x_1,x_2 同号，则

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0,$$

故亦有 $x_1^3<x_2^3$. 从而 $y=x^3$ 是严格单增函数.

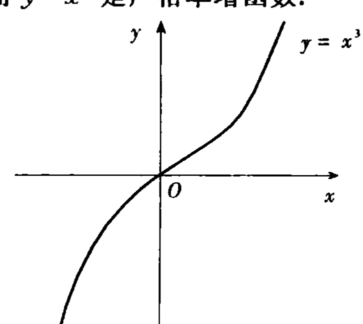

图 1-9

例 10 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单增的，但不是严格单