教材·教辅·考研宝典

田代军 编著

新编 线性代数

New Compilation of Linear Algebra

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

新编线性代数

New Compilation of Linear Algebra

田代军　编著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是按照教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写的线性代数教学及学习用书.

除开启篇外，本书主要内容包括六章：方阵的行列式、矩阵、n元向量、线性方程组、特征值与特征向量、实二次型.

本书内容与国内各高校大多数专业的线性代数教学要求基本一致，因而可作为通用型线性代数教材使用. 本书例题、习题、方法丰富，因而也可作为线性代数教辅使用.

本书特别适于帮助参加硕士研究生入学考试的学生系统复习、总结线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，真正提高线性代数学习水平.

本书内容充实，知识系统，有一定的深度和广度，因而也可供高校师生和科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编线性代数/田代军编著. —天津:天津大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5618-4364-2

Ⅰ.①新… Ⅱ.①田… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 109746 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 210mm×297mm
印　　张 18
字　　数 609千
版　　次 2012年8月第1版
印　　次 2012年8月第1次
印　　数 1-3 000
定　　价 35.00元

前 言

线性代数是一门理论、计算并重的数学课程，它广泛应用于现代科学技术的各个领域. 随着计算机技术的广泛使用和快速发展，使得许多实际问题都可以通过离散化的数值计算得以解决. 作为处理离散问题的主要工具，线性代数的重要性不断提高，它已成为从事自然科学研究和工程技术应用的科技人员必备的数学基础.

线性代数是高等院校理工科一门重要的数学基础课程，也是硕士生入学统一考试数学试卷的必考科目. 本书是按照教育部制定的《线性代数课程教学基本要求》和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写的线性代数教学及学习用书. 目的在于帮助读者学习和掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、计算能力、分析和解决问题的能力以及应用线性代数知识解决实际问题的能力.

线性代数是中学代数的继续与提高，这直接体现于求解线性方程组的矩阵消元法，矩阵是线性代数提供的最重要的计算工具. 在第 0 章中，介绍了矩阵的概念和线性运算、转置、初等变换等简单运算，并讲述了用矩阵消元法求解线性方程组. 这样做，既能引导学生尽快适应从初等代数到较高等的线性代数的思维转变，又能为以后各章的学习有所铺垫，所以将第 0 章命名为开启篇，以启发读者思考.

除开启篇外，本书主要内容包括六章：方阵的行列式、矩阵、n 元向量、线性方程组、特征值与特征向量、实二次型，各章内容框架可以参看目录.

本书内容与国内各高校大多数专业的线性代数教学要求基本一致，因而可作为通用型线性代数教材使用. 完整讲述本书约需 48 学时，参考下表学时分配方案 1；略去某些定理证明、理论延伸内容、部分例题等，部分讲述本书约需 36 学时，参考下表学时分配方案 2.

各章与习题课	学时分配方案 1	学时分配方案 2
第 0 章	1+2=3 学时	1+2=3 学时
第 1 章	2+2+2.5+1.5=8 学时	1.5+1.5+2+1=6 学时
第 2 章	5+3+3=11 学时	4+2+2=8 学时
习题课 1	2 学时	1 学时
第 3 章	3+2+2=7 学时	2+0.5+1.5=4 学时
第 4 章	1+2=3 学时	1+2=3 学时
习题课 2	1 学时	1 学时
第 5 章	1+2+2+2=7 学时	1+2+1+1=5 学时
第 6 章	1+1+2=4 学时	1+1+2=4 学时
习题课 3	2 学时	1 学时
合计	48 学时	36 学时

本书部分内容使用“楷体字”编排，学时数不足可以不讲，供学有余力的学生课外自学.

本书没有讲述一般的线性空间与线性变换，但实际上书中已经为介绍这些内容安装了接口：在 5.2.1 中，讲述了复数集$\mathbb{C}$，为引入一般数域做了准备；在 3.2 中，讲述了形神兼备的 n 元向量空间 $\mathbb{R}^n$，为引入一般线性空间的公理化定义做了准备；在 3.3 中，讲述了内积空间 $\mathbb{R}^n$，为引入一般内积和内积空间的公理化定义做了准备；在 3.3.3 中，讲述了正交矩阵的性质 6，为引入正交变换做了准备.

本书例题数量多，但都是精选的典型题目，每节后都有适量配套习题，例题和习题联合覆盖所有的知识点，因而本书也可作为线性代数教辅使用．读者应以题目所使用的技巧为训练手段，以掌握知识点(包括概念、理论、方法)为目的，逐步做到以不变应万变．

除知识板块化外，本书还做到了方法系列化．例如，关于行列式的计算，讲述了完全展开法、分拆法、归零法、化三角形法、范德蒙法、降阶法、递推公式法、分块法、乘积法、特征值法等方法；关于方阵的幂的计算，讲述了秩1法(参考 2.3 例 7 和 2.1 例 10)、拆和法(参考 2.1 例 12)、零化多项式法(参考 2.1 例 13、例 14)、相似对角化法等方法；关于可逆矩阵的判定和求逆法，讲述了行列式法、分离因子法、观察法、性质法、初等变换法、分块法、分块初等变换法等方法；关于向量组的线性相关性的判别、求齐次线性方程组的基础解系和线性方程组的通解、求方阵的特征值与特征向量、方阵能否相似对角化的判定、实对称矩阵的计算等都讲述了全系列的方法；关于矩阵理论，讲述了六大基本方法；关于矩阵的各种标准形，讲述了任意矩阵的相抵标准形、可相似对角化方阵的相似对角形、实对称矩阵的正交相似标准形和实相合标准形，介绍了复方阵的若尔当标准形、实方阵的实相似标准形、正规矩阵(包括正交矩阵、实反对称矩阵)的正交相似标准形；关于化实二次型为标准形，讲述了正交线性替换法、配方法、初等变换法等方法；关于正定矩阵的判别，讲述了定义法、正惯性指数法、特征值法、算术平方根法、分块法、顺序主子式法等方法．这样便于读者把握线性代数各部分之间的连贯性，理顺相互联系，构建知识点的框架网络，达到融会贯通的目的．

本书定理较多，除极少数介绍性定理(如 5.2 定理 4 和 5.3 定理 11)的证明不宜在本课程中讲述和部分定理以例题的计算为证明(如 0.2 定理 2)外，其他定理都有证明．这样做，既考虑到理论的严谨性，也便于读者自学．

本书特别适于帮助参加硕士研究生入学考试的学生系统复习、总结线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，真正提高线性代数学习水平，在硕士研究生入学考试中取得高分．事实上，这也是编写本书的一个重要目的．考生在使用本书复习时必须注意：不要纠缠于书中某些定理的理论证明，因为你们的主要目的是应试，所以本书内容对你来说，一半是应试宝典，另一半备查即可．

首都师范大学的辛国策教授和编者讨论了部分书稿，使编者受益良多．另外，在本书编写过程中，郭慧婧女士提出了不少好的建议，在此一并致以最诚挚的谢意．

由于编者水平所限和成书时间仓促，书中不当之处在所难免，敬请广大读者批评指正．

感谢读者使用本书，若有批评建议，或需要习题答案，请随时联系编者．

Email：tianjinghui2012@sina.com

编者

2012 年 2 月

目 录

第 0 章 开启篇……1
0.1 矩阵初步……1
0.1.1 矩阵的概念……1
0.1.2 矩阵的线性运算……2
0.1.3 矩阵的转置……3
习题 0.1……4
0.2 用矩阵消元法求解线性方程组……5
0.2.1 矩阵的初等变换……5
一、线性方程组与矩阵……5
二、初等变换……5
0.2.2 矩阵消元法……6
习题0.2……11
第 1 章 方阵的行列式……12
1.1 行列式的定义……12
1.1.1 2阶行列式……12
1.1.2 3阶行列式……12
1.1.3 n阶排列……14
1.1.4 n阶行列式……16
习题 1.1……19
1.2 行列式的拉普拉斯展开……21
1.2.1 代数余子式……21
1.2.2 按多行(列)展开公式……23
1.2.3 按一行(列)展开公式……26
习题1.2……29
1.3 行列式的性质与计算……31
1.3.1 行列式的性质……31
1.3.2 行列式的计算……33
一、完全展开法……33
二、分拆法……33
三、归零法……34
四、化三角形法……34
五、范德蒙法……37
六、降阶法……40
七、递推公式法……41
八、分块法……42
习题1.3……43
1.4 克拉默法则……45
1.4.1 克拉默法则……45
1.4.2 插值多项式……49
习题1.4……51
第 2 章 矩阵……52
2.1 矩阵的乘法……52
2.1.1 乘法的定义……52
2.1.2 运算律……54

2.1.3 方阵乘法专题……56
一、方阵的幂……56
二、方阵的多项式……58
三、可交换矩阵……61
四、方阵乘积的行列式……62
五、方阵的迹……64
2.1.4 矩阵的分块方法……64
一、分块矩阵……64
二、运算与分块……65
三、典型分块……67
2.1.5 运用基本向量的方法……69
2.1.6 初等变换与乘法……72
习题2.1……75
2.2 可逆矩阵……77
2.2.1 可逆矩阵的定义……77
2.2.2 可逆矩阵的判定·求逆法……77
一、行列式法……77
二、分离因子法……79
三、观察法……81
四、性质法……81
五、初等变换法……83
六、分块法……87
七、分块初等变换法……89
习题2.2……97
2.3 矩阵的秩……99
2.3.1 秩的定义……99
2.3.2 秩的计算……100
2.3.3 相抵标准形……101
2.3.4 秩的关系式……104
习题 2.3……115
第 3 章 n元向量……116
3.1 向量组的线性相关性……116
3.1.1 线性组合与线性表示……116
3.1.2 线性相关与线性无关……118
3.1.3 极大无关组与秩……123
习题 3.1……129
3.2 n元向量空间……131
3.2.1 n元向量空间及其子空间……131
3.2.2 维数·基与坐标……133
习题 3.2……138
3.3 内积空间……139
3.3.1 内积……139
3.3.2 施密特正交化……140
3.3.3 正交矩阵……144
一、正交矩阵的定义……144
二、正交矩阵的性质……145
三、正交矩阵的判定……145

四、实可逆矩阵的 QR 分解……147

习题 3.3……150

第 4 章 线性方程组……151

4.1 线性方程组的求解……151

4.1.1 线性方程组的相关术语……151

4.1.2 线性方程组的解的情况……152

习题 4.1……159

4.2 线性方程组的解的结构……160

4.2.1 齐次线性方程组的解的结构……160

一、解的性质……160

二、解的结构……160

4.2.2 非齐次线性方程组的解的结构……169

一、解的性质……169

二、解的结构……169

习题 4.2……173

第 5 章 特征值与特征向量……174

5.1 方阵的相似关系……174

5.1.1 相似关系的概念……174

5.1.2 相似关系的性质……175

5.1.3 正交相似关系……177

一、正交相似关系的概念……177

二、方阵的相合关系……178

三、正交相似关系的性质……179

四、正交相似标准形简介……180

习题 5.1……181

5.2 方阵的特征值与特征向量……182

5.2.1 多项式方程的根……182

一、复数简述……182

二、求根公式……183

三、实系数多项式方程的根……186

四、整系数多项式方程的整数根……187

5.2.2 特征值与特征向量的概念……188

5.2.3 特征值与特征向量的计算……189

5.2.4 特征值与特征向量的性质……196

习题 5.2……211

5.3 对角化问题……213

5.3.1 相似对角化……213

5.3.2 对角化条件……213

5.3.3 对角化计算……222

5.3.4 对角化应用……223

一、求可对角化方阵的幂……223

二、由数列的线性递推公式求通项公式……224

三、求解 $n\times n$ 齐次线性微分方程组……226

5.3.5 相似标准形简介……228

习题 5.3……231

5.4 实对称矩阵……233

5.4.1 实对称矩阵的特征值与特征向量……233

5.4.2 正交相似对角化……235

5.4.3 实对称矩阵的开方……242
习题 5.4……244
第 6 章 实二次型……246
6.1 实二次型·实对称矩阵……246
6.1.1 实二次型及其矩阵形式……246
6.1.2 可逆线性替换……247
习题 6.1……248
6.2 实二次型的标准形……249
6.2.1 化实二次型为标准形……249
一、正交线性替换法……249
二、配方法……252
三、初等变换法……254
6.2.2 规范形……257
6.2.3 有心二次曲面的标准方程……259
习题 6.2……263
6.3 正定二次型·正定矩阵……265
6.3.1 正定的概念……265
6.3.2 正定的判别……266
一、正惯性指数法……266
二、特征值法……268
三、算术平方根法……270
四、分块法……271
五、顺序主子式法……273
六、其他方法……275
6.3.3 其他类别的实二次型与实对称矩阵……277
习题 6.3……280

第0章　开启篇

0.1　矩阵初步

0.1.1　矩阵的概念

矩阵的概念是从讨论线性方程组(即多元一次方程组)引入的. 例如，考虑线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2+5x_3+5x_4=2, \\ x_1-\ x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-2x_2+3x_3+2x_4=1. \end{cases}$$

能反映其本质特征的是未知量的$3\times4=12$个系数和3个常数项. 将这些系数和常数项分离出来，就得到像

$$\begin{matrix} 3 & -3 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

的矩形数表，这就是矩阵，其包含了线性方程组的所有关键信息.

定义1　由mn个(实)数排成的m行n列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个$m\times n$**矩阵**. 其中，$m\times n$称为该矩阵的**型**，a_{ij}称为该矩阵的(i,j)**元素**($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$).

矩阵常用大写英文字母$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示. 为了标明矩阵的型，如上的矩阵$\boldsymbol{A}$也常记作$\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 做一般性考虑，或元素$a_{ij}=f(i,j)$有规律时，该矩阵也常记作$[a_{ij}]_{m\times n}$或$[a_{ij}]$.

设矩阵$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times t}$，如果

$$m=s,\ n=t,$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$**同型**；若还有

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$**相等**，记作$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义2　$n\times n$矩阵称为$\boldsymbol{n}$**阶方阵**.

$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$的从左上到右下的对角线(穿过$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$)，称为$\boldsymbol{A}$的**主对角线**；从右上到左下的对角线(穿过$a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$)，称为$\boldsymbol{A}$的**次对角线**.

定义3　$1\times n$矩阵$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$也称为n元**行矩阵**或n元**行向量**.

$m\times1$矩阵$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$也称为$m$元**列矩阵**或$m$元**列向量**.

n元行向量、n元列向量统称为$\boldsymbol{n}$**元向量**，常用希腊字母$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\cdots$表示.

n 元向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 n 个元素也分别称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第$1,2,\cdots,n$**分量**.

0.1.2 矩阵的线性运算

同型矩阵可以相加.

定义 4　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，则称矩阵 $\boldsymbol{C}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

数与矩阵可以相乘.

定义 5　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，则称矩阵 $[ka_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}k]_{m\times n}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**(或 $\boldsymbol{A}$ 的 k **倍**)，记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$.

加法与数量乘法统称为矩阵的**线性运算**.

$m\times n$ 矩阵关于加法、数量乘法，具有以下基本运算律：

(1)　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；　(加法交换律)

(2)　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；　(加法结合律)

(3)　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{O}=[0]_{m\times n}$ 称为**零矩阵**；　(加法右单位元)

(4)　$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，其中 $-\boldsymbol{A}=[-a_{ij}]_{m\times n}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**；　(加法右逆元)

(5)　$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；　(1倍)

(6)　$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；　(数乘结合律)

(7)　$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；　(第一分配律)

(8)　$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.　(第二分配律)

$\boldsymbol{O}_{1\times n}$ 与 $\boldsymbol{O}_{n\times 1}$ 都称为 $\boldsymbol{n}$ **元零向量**，同记作 $\boldsymbol{0}$.

减法是加法的派生运算：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

例 1　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\2&3&4\end{bmatrix}$，求 $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{O}$.

解　$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{O}=2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$

$$=\begin{bmatrix}2&0&4\\6&-2&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-3&0\\6&9&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3&4\\0&-11&-8\end{bmatrix}.$$

例 2　含有未知矩阵的等式称为**矩阵方程**. 求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\5&0&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&5\\-2&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}.$$

解　$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{5}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&-2&-2\\2&0&1\\2&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&0\end{bmatrix}.$$

例 3　设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,-3,2,4]$，$\boldsymbol{\beta}=[3,5,-1,-2]$，求 $3\boldsymbol{\alpha}+7\boldsymbol{\beta}$.

解　$3\boldsymbol{\alpha}=[3,-9,6,12]$，$7\boldsymbol{\beta}=[21,35,-7,-14]$，$3\boldsymbol{\alpha}+7\boldsymbol{\beta}=[24,26,-1,-2]$.

为了表述方便，引入以下记号.

矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 i 行对应的 n 元行向量可记作

$$\mathrm{row}_i\,\boldsymbol{A}=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]\,(i=1,2,\cdots,m),$$

第 j 列对应的 m 元列向量可记作

$$\mathrm{col}_j\,\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,n),$$

(i,j) 元素 a_{ij} 也记作

$$\mathrm{ent}_{ij}\,\boldsymbol{A}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

显然有

$$\mathrm{ent}_{ij}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{ent}_{ij}\,\boldsymbol{A}\pm\mathrm{ent}_{ij}\,\boldsymbol{B},\qquad \mathrm{ent}_{ij}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{ent}_{ij}\,\boldsymbol{A};$$

$$\mathrm{row}_i(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{row}_i\,\boldsymbol{A}\pm\mathrm{row}_i\,\boldsymbol{B},\qquad \mathrm{row}_i(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{row}_i\,\boldsymbol{A};$$

$$\mathrm{col}_j(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{col}_j\,\boldsymbol{A}\pm\mathrm{col}_j\,\boldsymbol{B},\qquad \mathrm{col}_j(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{col}_j\,\boldsymbol{A}.$$

0.1.3 矩阵的转置

定义 6 以 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 i 行各元素次序不变排成新矩阵的第 i 列（$i=1,2,\cdots,m$），得到 $n\times m$ 矩阵

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right],$$

称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

以 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 j 列各元素次序不变排成新矩阵的第 j 行（$j=1,2,\cdots,n$），亦得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{cccc}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\\hdashline a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\hdashline\vdots&\vdots&&\vdots\\\hdashline a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right].$$

显然，有

$$(\mathrm{row}_i\,\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\mathrm{col}_i\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\qquad (\mathrm{col}_j\,\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\mathrm{row}_j\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}};$$

$$\mathrm{ent}_{ij}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{ent}_{ji}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),\qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A};$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\qquad (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

例 4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\0&-1\\2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&5\\-2&1&0\\3&1&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\left[\begin{array}{cc:ccc}1&3&1&0&5\\0&-1&-2&1&0\\2&2&3&1&2\end{array}\right],$$

求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$.

解　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&-1&2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\left[\begin{array}{ccc}1&0&2\\3&-1&2\\\hdashline 1&-2&3\\0&1&1\\5&0&2\end{array}\right].$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&1&1\\5&0&2\end{bmatrix},$$

对于方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，以主对角线为轴翻转(将各 a_{ij} 与 a_{ji} 对调)，即得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

定义 7　对于方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 其元素特点为

$$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n).$$

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**. 其元素特点为

$$a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

特别地

$$a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n).$$

例 5　填空，请读者完成.

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\a&4&5\\b&c&6\end{bmatrix}$ 为对称矩阵，则 $a=$____，$b=$____，$c=$____；

(2) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}u&1&2\\x&v&3\\y&z&w\end{bmatrix}$ 为反对称矩阵，则

$u=$____，$v=$____，$w=$____；$x=$____，$y=$____，$z=$____.

性质　对称矩阵的和、差、倍仍对称，反对称矩阵的和、差、倍仍反对称.　□

习题 0.1

1. 求解矩阵方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A},\\2\boldsymbol{X}-3\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B},\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&5\\4&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\-2&3&4\end{bmatrix}$.
2. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$，求证 $\boldsymbol{A}$ 必为零方阵.
3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，求证存在唯一的 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与反对称矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}.$$

学习要求

1. 准确理解矩阵的概念.
2. 熟练掌握矩阵的加法、数量乘法、转置等简单运算.
3. 掌握对称矩阵、反对称矩阵的概念.

0.2　用矩阵消元法求解线性方程组

0.2.1　矩阵的初等变换

一、线性方程组与矩阵

含 m 个一次方程，n 个未知量的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

称为 $m\times n$ **线性方程组**. 其中，$m\times n$ 称为(1)的**型**；a_{ij} 称为(1)的**系数**，b_i 称为(1)的**常数项**（$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$）；

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}, \qquad \tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

分别称为(1)的**系数矩阵**、**增广矩阵**.

若以 n 个数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 依次代换 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后，使得(1)转化为一组恒等式，则称列向量

$$[c_1,c_2,\cdots,c_n]^{\mathrm{T}}$$

为(1)的一个**解**(**向量**). (1)的全体解向量形成的集合称为(1)的**解**(**向量**)**集合**.

在(1)中，将 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 改为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，并不影响解向量集合. 所以说，增广矩阵 $\tilde{A}$ 反映了(1)的所有本质特征.

二、初等变换

定义 1　在线性方程组(1)中，

① 互换两个方程的位置；

② 用非零数乘某个方程；

③ 某个方程加上另一个方程的倍数，

分别称为(1)的**第 1、2、3 类初等变换**.

定理 1　线性方程组的三类初等变换都是**同解变形**.　□

线性方程组(1)的三类初等变换反映为增广矩阵 $\tilde{A}$ 的三类初等行变换.

定义 2　矩阵的以下三种变换：

① 行**对调**——对调第 i 行与第 j 行（$i\neq j$），记作 $\boldsymbol{r}_i\leftrightarrow\boldsymbol{r}_j$；

② 行**乘非零倍**——第 i 行乘以非零数 k，记作 $\boldsymbol{r}_i\times k$；

③ 行**倍加**——第 i 行加上第 j 行的 l 倍（$i\neq j$），记作 $\boldsymbol{r}_i+l\boldsymbol{r}_j$，

分别称为矩阵的**第 1、2、3 类初等行变换**.

类似地有三类**初等列变换**：$\boldsymbol{c}_i\leftrightarrow\boldsymbol{c}_j(i\neq j)$，$\boldsymbol{c}_i\times k(k\neq 0)$，$\boldsymbol{c}_i+l\boldsymbol{c}_j(i\neq j)$.

初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

不允许对线性方程组的增广矩阵作初等列变换.

0.2.2 矩阵消元法

例 1　作初等变换，化简并求解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+5x_3+5x_4=2,\\ x_1-\ \ x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 2x_1-2x_2+3x_3+2x_4=1;\end{cases}$$

同步对其增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换，观察变化过程.

解　对线性方程组作初等变换，得

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+5x_3+5x_4=2, & [1]\\ x_1-\ \ x_2+2x_3+3x_4=1, & [2]\\ 2x_1-2x_2+3x_3+2x_4=1 & [3]\end{cases}$$

$$\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[2]}\begin{cases}x_1-\ \ x_2+2x_3+3x_4=1, & [1]\\ 3x_1-3x_2+5x_3+5x_4=2, & [2]\\ 2x_1-2x_2+3x_3+2x_4=1 & [3]\end{cases}$$

$$\xrightarrow[{[3]-2[1]}]{[2]-3[1]}\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+3x_4=\ \ 1, & [1]\\ \qquad\quad -\ x_3-4x_4=-1, & [2]\\ \qquad\quad -\ x_3-4x_4=-1 & [3]\end{cases}$$

$$\xrightarrow{[3]-[2]}\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+3x_4=\ \ 1, & [1]\\ \qquad\quad -\ x_3-4x_4=-1, & [2]\\ \qquad\qquad\qquad\quad 0=\ 0. & [3]\end{cases}$$

这样的线性方程组称为**阶梯形线性方程组**，x_1,x_3 称为其**主未知量**，其他未知量 x_2,x_4 显然可以任意取值. 继续作初等变换，得

$$\xrightarrow{[2]\times(-1)}\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+3x_4=1, & [1]\\ \qquad\qquad x_3+4x_4=1, & [2]\\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0=0 & [3]\end{cases}$$

$$\xrightarrow{[1]-2[2]}\begin{cases}x_1-x_2\qquad -5x_4=-1, & [1]\\ \qquad\qquad x_3+4x_4=\ \ 1, & [2]\\ \qquad\qquad\qquad\quad 0=\ 0. & [3]\end{cases}$$

主未知量 x_1 在[1]、[2]、[3]中的系数分别为 $1,0,0$，主未知量 x_3 在[1]、[2]、[3]中的系数分别为 $0,1,0$，这样的阶梯形线性方程组称为**简化阶梯形**(或**最简形**)**线性方程组**. 由[1]可知

$$x_1=-1+x_2+5x_4,$$

由[2]可知

$$x_3=1-4x_4.$$

同步对增广矩阵作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc|c}3&-3&5&5&2\\1&-1&2&3&1\\2&-2&3&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&3&1\\3&-3&5&5&2\\2&-2&3&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&3&1\\0&0&-1&-4&-1\\0&0&-1&-4&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&3&1\\0&0&-1&-4&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

该矩阵每行的第一个非零元素比上行的第一个非零元素更靠右，而且零行全在下方，称之为**行阶梯形矩阵**. 行阶梯形矩阵各非零行的第一个非零元素称为**主元**(素). 继续作初等行变换，得

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&3&1\\0&0&1&4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&-5&-1\\0&0&1&4&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}}.$$

行阶梯形矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 的主元全为1，主元所在列的其他元素全为0，称之为**行简化阶梯形**(或**行最简形**)**矩阵**. 由 $\mathrm{row}_1\,\tilde{\boldsymbol{R}}$ 可知

$$x_1=-1+x_2+5x_4,$$

由 $\mathrm{row}_2\,\tilde{\boldsymbol{R}}$ 可知

$$x_3=1-4x_4.$$

令自由未知量 $x_2=k_1, x_4=k_2$，可知线性方程组的全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+k_1+5k_2 \\ k_1 \\ 1 \quad -4k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},\ \forall k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

对增广矩阵作初等行变换，把握住了对线性方程组作初等变换的所有细节和实质，而且更加清晰明了．这种求解线性方程组的方法称为**增广矩阵消元法**.

定理 2　任一矩阵可经过有限次初等行变换化为行(简化)阶梯形矩阵.　□

在 3.1 中还将指出，矩阵经过初等行变换所得的行简化阶梯形矩阵是唯一的.

例 2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & -3 & -9 & 6 \end{bmatrix}$.

(1) 用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行简化阶梯形矩阵 $\boldsymbol{R}$；

(2) 对 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ 都依次施以初等列变换

$$c_3+c_1,\ c_3-c_2;\quad c_5+c_2,\ c_5-c_4;\quad c_6-3c_1,\ c_6+c_4;\quad c_3\leftrightarrow c_4,$$

求所得矩阵.

解　(1) $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-r_1]{r_2-2r_1 \atop r_3-3r_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -9 & -16 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & -9 & -16 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & -8 & -15 & 8 \end{bmatrix}$　用倍加变换“打洞”

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -9 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -9 & -16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　行阶梯形矩阵

$\xrightarrow[r_2+9r_3]{r_1-5r_3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　向上“打洞”

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_2/7}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{R}.$$

(2) 对 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ 都依次施以初等列变换

$$\boldsymbol{c}_3+\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2,\ \boldsymbol{c}_5+\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_4,\ \boldsymbol{c}_6-3\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_4,\ \boldsymbol{c}_3\leftrightarrow\boldsymbol{c}_4,$$

分别得到矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&-1&5&0&0&0\\2&5&1&0&0&0\\3&4&6&0&0&0\\1&6&-3&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的列向量之间的线性关系与 $\boldsymbol{R}$ 的列向量之间的线性关系完全一致，均有

$$\boldsymbol{c}_3=\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1,\quad \boldsymbol{c}_5=\boldsymbol{c}_4-\boldsymbol{c}_2,\quad \boldsymbol{c}_6=3\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_4.$$

常数项全为零的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots,\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}$$

称为**齐次**线性方程组. $[0, 0, \cdots, 0]^{\mathrm{T}}$ 显然为其解向量，称之为**零解**.

例 3　设 4×5 **非齐次**线性方程组

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4-5x_5=3,\\2x_1-4x_2+3x_3+x_4-11x_5=6,\\x_1-2x_2+2x_3+3x_4-12x_5=6,\\2x_1-4x_2+x_3-x_4-x_5=t\end{cases}$$

有解，求参数 t 及全部解.

解　对增广矩阵作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&1&-5&3\\2&-4&3&1&-11&6\\1&-2&2&3&-12&6\\2&-4&1&-1&-1&t\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&1&-5&3\\0&0&1&-1&-1&0\\0&0&1&2&-7&3\\0&0&-1&-3&9&t-6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&1&-5&3\\0&0&1&-1&-1&0\\0&0&0&3&-6&3\\0&0&0&-4&8&t-6\end{array}\right]\xrightarrow[r_4+4r_3]{r_3/3}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-2&1&1&-5&3\\0&0&1&-1&-1&0\\0&0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0&t-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-2&0&0&0&1\\0&0&1&0&-3&1\\0&0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&0&t-2\end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}}.$$

因为线性方程组有解，所以

$$0=t-2\Rightarrow t=2.$$

令自由未知量 $x_2=k_1, x_5=k_2$，得全部解为