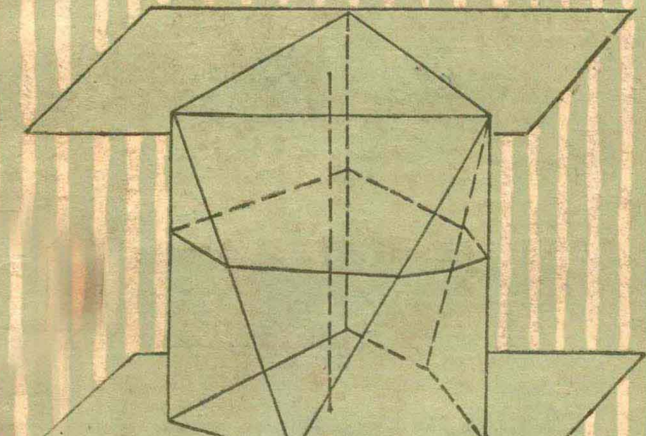
拟柱求积公式

张澄清



云南人民出版社

拟 柱 求 积 公 式

张 澄 清

云 南 人 民 出 版 社
一 九 七 八 年 六 月

前　言

在平面几何和立体几何中，有很多求积公式，初学者往往记不住。这许多不同的公式，都是表示平面的面积或立体体积与其中的线段、面积的函数关系。这些不同的函数关系，如果用一个函数关系表示，就比较容易记住了。这本小册子所介绍的拟柱求积公式，就是这样一个能把很多求积公式统一起来的函数表达式，它象一条线把这些公式贯串起来。

拟柱公式，有的又称作辛普笙（*simpson*）公式，可以运用它来计算平面的面积和立体的体积、表面积，也可以应用来求一些积分的近似值，所以又有人称它作万能公式。

掌握了拟柱公式，并能灵活地运用它，就可以很容易地推导出平面几何、立体几何中的许多求积公式。拟柱公式，一方面以一种函数表达式概括了各种求积公式；另一方面，由于应用于计算各种特殊形状的平面和立体的面积或体积，又导出各种的求积公式；所以，拟柱公式又能帮助认识各种求积公式的内在联系。

在过去出版的别莱利曼著的《趣味几何学》中，曾用拟柱公式计算三种平面面积和七种立体体积，现在运用拟柱公式来计算面积和体积有了若干推广。这本小册子，根据笔者学习研究所得，介绍了这些推广应用的资料，采用多种方法推导、证明拟柱公式，力求深入浅出。书中所涉及的积分知识，是中学课程范围内的知识。

这本小册子的大部分内容原是在一九五八年到一九五九年对云南丽江师专数学科的同学们作的讲座。嗣后，油印本传出，来信取索者较多，有的同志建议出版。目前，在英明领袖华主席为首的党中央领导下，为了提高整个中华民族的科学文化水平，建设现代化的社会主义强国，必须迅速提高学校教学质量。为此，笔者愿将此书出版，为早日实现四个现代化出点力。

本书的全部图形，均承邓明华同志绘制。在编写中得到云南省教育局教材编审室等单位的同志们的热情帮助，在此一并致谢。

虽经仔细斟酌，但由于水平有限，书中难免有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

一九七七年十月

目　　录

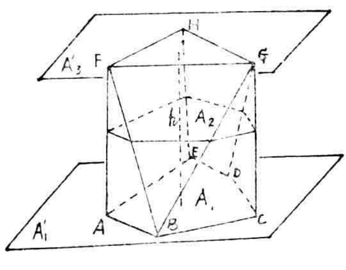
一、拟柱和拟柱公式

§1. 概念

在各种形状的立体中，有一类多面体，它的所有顶点都分别在两个互相平行的平面上，如图一所示，多面体$ABCDE-FGH$一组顶点A、B、C、D、E在平面A_1'上，另一组顶点F、G、H在平面A_3'上，A_1'与A_3'平行，它的侧面有的是三角形，有的是梯形。我们把$ABCDE-FGH$这一类多面体称作"拟柱"。

定义： 拟柱是所有顶点都分别在两个称为平行平面上的多面体，它的侧面不是梯形便是三角形。

在研究拟柱时，我们把分别在两平行平面上的两个面各称为上底、下底，平行上、下底面的平面所截的截面叫做水平截面，两底面间的距离叫做高，过高的中点的水平截面叫做中截面，相邻两个侧面的交线叫做侧棱。本书都（如图一）用h表示高，用A_1、A_2、A_3分别表示下底面、中截面、上底面的面积，V表示体积。



（图 一）

§2. 水平截面积与截面高的关系

根据平行平面的性质，可以得到拟柱的重要性质定理：拟柱水平截面积是截面高的二次函数（因我们将用这一定理推导、证明拟柱求积公式，故称之为预备定理）。

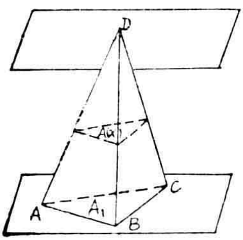
下边分别从三种情况来分析、证明预备定理。

情况一：最简单的拟柱是三棱锥，此处有两种类型。

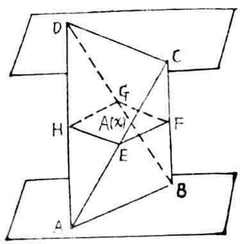
（1）在下底面上取面积为A_1的三角形 ABC，见图二。上底面为一点D，设高为x的截面面积是$A(x)$，由于截面面积的比等于对应高的平方的比，故

$$\frac{A(x)}{A_1}=\frac{x^2}{h^2} \quad 即 \quad A(x)=\left(\frac{x}{h}\right)^2 A_1.$$

（2）如图三这种三棱锥，棱 AB、CD 为异面直线，我们可以把它看做两底分别为两线段的拟柱。四面体 $AB—CD$（也可以叫三棱锥$D—ABC$）被高为x的平面所截，截面$EFGH$为平行四边形，面积为$A(x)$。



（图二）



（图三）

$\because \quad \frac{EF}{AB}=\frac{x}{h}, \qquad \frac{FG}{CD}=\frac{h-x}{h}$

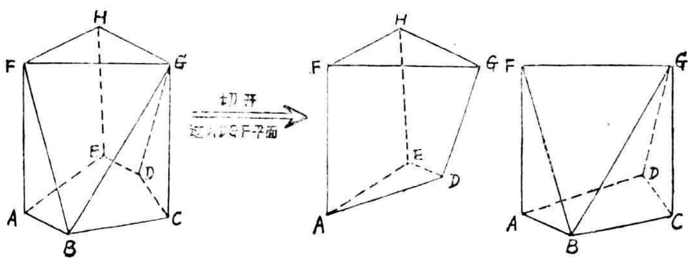
故$A(x)=EF\cdot FG\cdot \sin\angle EFG$

$$=\frac{x(h-x)}{h^2}\cdot AB\cdot CD\cdot \sin\angle EFG$$

$$=\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^2+\frac{x}{h}\right]AB\cdot CD\cdot \sin\angle EFG$$

情况二：拟柱上、下底多边形顶点数 n 相同时，上、下底可分解为 $n-2$ 个三角形，然后就可以将拟柱进一步分解为象图二那样的三棱锥和象图三那样的三棱锥，拟柱的水平截面积是分解后各三棱锥上的截面积之和，显而易见，拟柱的水平截面积也是截面高的二次函数。

情况三：拟柱上、下底多边形顶点数不同时，先仿情况二，分解出上、下底多边形顶点数相同的拟柱。如图一中的拟柱 $ABCDE—FGH$，过 $ADGF$ 平面把拟柱分解出三棱柱 $ADE—FGH$ 和另一下底为四边形、上底为一线段的拟柱 $ABCD—FG$，（见图四）。而拟柱 $ABCD—FG$ 又可分解为



（图四）

两个图二那样的三棱锥和一个图三那样的三棱锥。显而易见，这样的拟柱的水平截面积也是截面高的二次函数。

所以，我们说拟柱的水平截面积总是截面高的二次函数。

§3. 公式的推导和证明

我们知道，如果拟柱两底面的对应边成比例时，则拟柱转变为棱台。也就是说，棱台是特殊的拟柱。

棱台体积公式为：

$$V=\frac{h}{3}(A_1+A_3+\sqrt{A_1\cdot A_3})$$

棱台的中截面公式为（中截面积公式的推导附在本节后）：

$$A_2=\frac{1}{4}(A_1+A_3+2\sqrt{A_1\cdot A_3})$$

式中A_1、A_2、A_3分别表棱台下底面、中截面和上底面的面积，h表棱台的高。

由棱台的中截面公式得：

$$\sqrt{A_1\cdot A_3}=\frac{4A_2-A_1-A_3}{2}$$

代入棱台体积公式得：

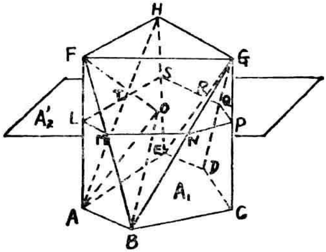
$$V=\frac{h}{3}\left(A_1+A_3+\frac{4A_2-A_1-A_3}{2}\right)$$

$$=\frac{h}{6}(A_1+4A_2+A_3)$$

我们再来看如图五的拟柱的体积。

在中截面A_2'的截面多边形$LMNPQRST$内部任取一点O，将点O与拟柱各顶点连结，如OA、OB、OF……等，则拟

柱就分为若干个以O为公共顶点的棱锥，这些棱锥，现分做下述两种情况来考虑：



（图五）

情况一：以拟柱的下底面A_1、上底面A_3为底的两个棱锥，其体积显然分别是：

$$V_1=\frac{1}{3}A_1\times\frac{h}{2}=\frac{h}{6}A_1 \qquad V_3=\frac{1}{3}A_3\times\frac{h}{2}=\frac{h}{6}A_3$$

情况二：以O为顶点，拟柱各侧面三角形为底的三棱锥，现以$O—ABF$为例求其体积，

∵ $AL=LF,\quad BM=MF,\quad AB=2LM,$

∴ $\triangle ABF$的面积$=4\triangle LMF$的面积

则 $V_{O-ABF}=4V_{O-LMF}$

将 $O—LMF$视为$F—OLM$，则

$$V_{O-LMF}=V_{F-OLM}$$

$$=\frac{1}{3}\times\triangle OLM\text{的面积}\times\frac{h}{2}$$

$$=\frac{h}{6}\times\triangle OLM\text{的面积}$$

$\therefore \quad V_{O-ABF}=4\times\frac{h}{6}\times\triangle OLM$的面积

所有属于这类三棱锥的体积的和为：$V_2=4\times\frac{h}{6}(\triangle OLM$的面积$+\triangle OMN$的面积$+\triangle ONP$的面积$+\cdots\cdots+\triangle OTL$的面积$)=4\times\frac{h}{6}A_2$

则拟柱体积为上述两种情况体积的和。

$\therefore \quad V=V_1+V_2+V_3$

$$=\frac{h}{6}(A_1+4A_2+A_3)$$

综上推导，$V=\frac{h}{6}(A_1+4A_2+A_3)$可以看作是求所有拟柱体积的公式。式中$V$表拟柱体积，$A_1$、$A_2$、$A_3$，分别表下底、中截面和上底的面积，$h$表高。

现在，我们用截面极限来证明公式。

根据§2 预备定理：　拟柱的水平截面是截面高的二次函数。因此，若拟柱垂直于x轴的水平截面$A(x)$，有关于x的二次表达式为：　$A(x)=ax^2+bx+c \qquad (0\leqslant x\leqslant h)$

我们将高h分为n等分，过各分点向拟柱作和底平行的截面，则得n块小立体，每一小立体的高都为$\frac{h}{n}$，设这些立体的体积为V_1、V_2、V_3，$\cdots\cdots V_n$；在$n-1$个分点处，截得水平截面面积为$A(x_1)$、$A(x_2)$、$A(x_3)$，$\cdots\cdots A(x_n)$；故各分点和下底面的距离为：

$$x_1=\frac{h}{n},\ x_2=\frac{2h}{n},\ x_3=\frac{3h}{n},\ \cdots\cdots\quad x_n=h，则：$$

$$A(x_1)=ax_1^2+bx_1+c$$
$$A(x_2)=ax_2^2+bx_2+c$$
$$A(x_3)=ax_3^2+bx_3+c$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$A(x_n)=ax_n^2+bx_n+c$$

当我们把拟柱分成无限多的块数时，即当n趋向无穷大的正整数时，则高$\frac{h}{n}$趋近于零；这时，我们可以把这些无限多块的立体都作为柱体考虑，而柱体的体积是等于底面积乘以高。

$$\because \quad V=V_1+V_2+V_3+\cdots\cdots+V_n$$

$$\therefore \quad V=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}[A(x_1)+A(x_2)+A(x_3)+\cdots\cdots+A(x_n)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}[a(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2)+b(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n)+nc]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{a\left[\left(\frac{h}{n}\right)^2+\left(\frac{2h}{n}\right)^2+\left(\frac{3h}{n}\right)^2+\cdots\cdots+h^2\right]+\left[b\left(\frac{h}{n}+\frac{2h}{n}+\frac{3h}{n}+\cdots\cdots+h\right)\right]+nc\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{a\frac{h^2}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+b\frac{h}{n}(1+2+3+\cdots\cdots+n)+nc\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}\left\{a\frac{h^2}{n^2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+b\frac{h}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+nc\right\}$$

由于几个变量的和的极限等于它们的极限的和，故：

$$V=\lim_{n\to\infty}\left\{a\frac{h^3}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right\}+\lim_{n\to\infty}\left[b\frac{h^2}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\right]+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{h}{n}\times nc\right)$$

取极限得：

$$V=\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch$$

$$=\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+6c)$$

又∵
$$\begin{cases}A(h)=ah^2+bh+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2ex] A(\frac{h}{2})=\frac{ah^2}{4}+\frac{bh}{2}+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\[2ex] A(0)=c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{cases}$$

在第(1)、(2)式中，将ah^2、bh、c作为未知数，将(1)、(2)、(3)三式作为三元一次方程组，解之得：

$$ah^2=2A(h)+2A(0)-4A(\frac{h}{2})$$

$$bh=4A(\frac{h}{2})-A(h)-3A(0)$$

$$c=A(0)$$

将ah^2、bh、c的值代入V中

$$\therefore\quad V=\frac{h}{6}\left[A(0)+4A(\frac{h}{2})+A(h)\right]$$

又因$A(0)$表拟柱下底面面积，$A(\frac{h}{2})$表拟柱中截面面积，$A(h)$表拟柱上底面面积。

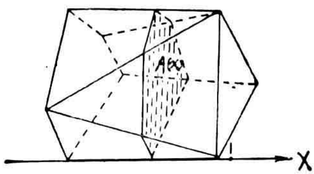
故　$V=\frac{h}{6}(A_1+4A_2+A_3)$。

再用积分法证明。

根据§2 预备定理：拟柱的水平截面是截面高的二次函数。因此，若拟柱垂直于x轴的水平截面$A(x)$（见图六）有关于x的二次表达式为：

$$A(x)=ax^2+bx+c \qquad (0\leqslant x\leqslant h)$$

则拟柱的体积：



（图六）

$$V=\int_0^h A(x)dx$$

$$=\int_0^h(ax^2+bx+c)dx$$

$$=\int_0^h ax^2dx+\int_0^h bxdx+\int_0^h cdx$$

$$=\frac{ax^3}{3}\Big|_0^h+\frac{bx^2}{2}\Big|_0^h+cx\Big|_0^h$$

$$=\frac{ah^3}{3}+\frac{bh^2}{2}+ch$$

$$=\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+6c)$$

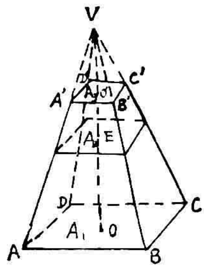
以下证法与用截面极限证明时相同，此处略。

棱台中截面积公式的推导

如图七，将棱台各侧棱 AA'、BB'、CC'、DD' 向上延长，相交于V点，成为棱锥$V—ABCD$。

设：$VO'=h'$，　$O'E=\lambda n$，　$EO=\lambda m$

则有$O'E:EO=n:m$



（图七）

$$\because \quad \frac{A_3}{A_2}=\frac{h'^2}{(h'+\lambda n)^2}$$

$$\frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A_2}}=\frac{h'}{h'+\lambda n}$$

$$\frac{\sqrt{A_3}}{\sqrt{A_2}-\sqrt{A_3}}=\frac{h'}{\lambda n}$$

$$\therefore \quad \lambda n\sqrt{A_3}=h'(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_3}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{(h'+\lambda n+\lambda m)^2}{(h'+\lambda n)^2}$$

$$\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}}=\frac{h'+\lambda n+\lambda m}{h'+\lambda n}$$

$$\frac{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_2}}=\frac{\lambda m}{h'+\lambda n}$$

$$\therefore \quad (h'+\lambda n)(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})=\lambda m\sqrt{A_2}$$

$$\lambda m\sqrt{A_2}-\lambda n(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})=h'(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

（1）÷（2）得：（显见，$\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}\neq 0$）

$$\frac{\lambda n\sqrt{A_3}}{\lambda m\sqrt{A_2}-\lambda n(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})}=\frac{h'(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_3})}{h'(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})}$$

$$\frac{n\sqrt{A_3}}{m\sqrt{A_2}-n(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})}=\frac{\sqrt{A_2}-\sqrt{A_3}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}}$$

$$\therefore\quad n\sqrt{A_3}(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})=(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_3})[m\sqrt{A_2}$$

$$-n(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2})]$$

$$n\sqrt{A_1A_3}-n\sqrt{A_2A_3}=mA_2-n\sqrt{A_1A_2}+nA_2$$

$$-m\sqrt{A_2A_3}+n\sqrt{A_1A_3}-n\sqrt{A_2A_3}$$

$$\therefore\quad mA_2-n\sqrt{A_1A_2}+nA_2-m\sqrt{A_2A_3}=0$$

$$A_2(m+n)=n\sqrt{A_1A_2}+m\sqrt{A_2A_3}$$

$$A_2=\frac{\sqrt{A_2}(n\sqrt{A_1}+m\sqrt{A_3})}{m+n}$$

$$\therefore\qquad \sqrt{A_2}=\frac{1}{m+n}(n\sqrt{A_1}+m\sqrt{A_3})$$

由此我们得出定理：平行于棱台底面的截面，若分棱台高成$m:n$，则有$\sqrt{A_2}=\dfrac{1}{m+n}(n\sqrt{A_1}+m\sqrt{A_3})$.

式中A_2、A_1、A_3分别表示中截面积、上、下底面积。

因为棱台中截面等分棱台的高，即使$m:n=1$，$m=n$，代入上公式：

$$\sqrt{A_2}=\frac{1}{m+n}(n\sqrt{A_1}+m\sqrt{A_3})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_3})$$

$$\therefore\quad A_2=\frac{1}{4}(A_1+A_3+2\sqrt{A_1A_3})$$

这就是我们在本节引用的棱台中截面积公式。

棱台中截面积公式，还可用棱台中截面积与上、下底面积的比等于对应边的平方比的关系来证明，读者可以自己试证。