通用乐律新说

程传箴 著

1/4最大音差不连续调节律

1/4最大音差不连续调节律应用于古琴

1/4最大音差不连续调节律用于“异径管律”

几类乐律的比较

从弦乐器演奏看几种乐律

调的性格

解读七种中庸全音律

古希腊乐律与四音列

高质因数与生律

1/3最大音差不连续调节律

1/2最大音差两次调节五度相生律

1/4最大音差四次（分两段）调节五度相生律

Ramos纯律半音律与三分三倍半音律及

三种新调节律的比较

學苑出版社

通用乐律新说

程传箴 著

學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

通用乐律新说/程传箴著. --北京:学苑出版社,2012.9

ISBN 978-7-5077-3610-6

Ⅰ. ①通… Ⅱ. ①程… Ⅲ. ①乐律学—研究—中国
Ⅳ. ①J612.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 212252 号

责任编辑:许 力
封面设计:艾博堂文化
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄2号院1号楼
邮政编码:100079
网　　址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010-67675512、67678944、67601101(邮购)
经　　销:新华书店
印 刷 厂:北京信彩瑞禾印刷厂
开本尺寸:710×1000 1/16
印　　张:7
字　　数:100 千字
版　　次:2012 年 9 月第 1 版
印　　次:2012 年 9 月第 1 次印刷
定　　价:16.00 元

序

两年前的一天，忽然接到一位陌生老人的来电，老人说自己是浙大化工系毕业，有色金属研究总院退休，年近八十。年轻时就对乐律学有强烈的探求渴望，只是人生道路选择的各种因缘而使这个渴望成为一个梦想。现在退休了，总算有时间可以重拾梦想，写了两篇文章，想与我分享讨论学术的快乐。这就是我和程传箴老先生的第一次神交。

今年年初，老人再次打电话来，说已经写了一系列文章，想专程送来，请我看看。老人坚持要亲自从海淀区到朝阳区来拜访我，我顿感诚惶诚恐。好不容易劝服老人将文稿寄过来，不必去忍受挤公交的辛劳。待收到老人寄来的 13 篇关于律学探究的文章，我感到的不只是一个人的学术心得，而是一种沉甸甸的历史感。

经学传统是中国学术传统的内核，经学研究传统中与音乐有关的知识探索就是中国人世世代代对乐律学的探索，这是现代学术必须面对的。当我们翻看古籍，关于乐律学的研究著作与文章汗牛充栋，许多作者只是普通布衣，这些先贤探索乐律知识的动机纯粹、明净。能够留下来，是因为被传抄、被刊刻。可以想见，还有许多未曾留下来，比如何瑭的《乐律管见》仅留在朱载堉的叙述中。那些能留在目录中的书名，已是其作者的幸运了。一定还有许多民间布衣学者的研究心得被遗失在历史中，连痕迹都没留下。而我们的传统学术中之所以有乐律学这一纲目，正是这世世代代有名、无名的经学家们为我们奠定了这个厚重的学术基础。我曾在一次学术会议上与外国学者交流，说的第一句话是“中国是个有律学传统的国度”。程先生这一摞文稿为我那次的发言提供了现代例证。程先生的个人探索表明我们这个传统绵延至今，从未停止。程老先生说读我的《东西方乐律学研究及发展历程》一书，唤起他年轻时的梦想。他似乎特别喜欢我书中赵宋光先生序言里的一句话，不断地在自己的文章中引用。他提及在这片律学探索的“疆土”，“法老称霸”带来的迷雾令他在六十年中深受其苦，难以理解产生音乐之美的深层动力。所以他苦苦思索多年，终于在已近耋寿之年，在不到两年之间，写下这 13 篇探索之文，将他反复验算的结果来证明自己对“法老”迷雾的破解方案。

程老先生想把这些文章结集出版，并嘱我为之写序。虽自觉这是我力所不逮

之事，但感于老人这份求知情怀，尤其是对比如今许多人只为申请科研经费而做学问，程先生这份为知识探索而做学问的态度，对我也是鞭策。

“1/4 最大音差不连续调节律”是程先生提出的一种调节律方案，它在学理方面继续了中国古人对自然数的追求，尽量多地保留以自然数作为生律因子，从本质上讲可以维护音乐性，这可以弥补平均律解决转调的问题，却掩盖了音程个性在音乐流动中支配性的意义。当然，程老先生也并不是只满足于数论阐释，他还进一步论述运用于古琴和异径管的实践方案，将这个议题引入到应用层面，提出对现有徽位的适度调整，“1/4 最大音差不连续调节律应用于古琴”使初学者仅使用徽位也可以演奏这件乐器。虽然这样的移徽方案会牵涉到复杂的古琴文化观念与技术问题，是否可行、是否有必要，还有待讨论，但程先生的大胆设想和缜密计算的探索无疑是可贵的。尽管程先生花了许多精力、许多篇幅，由“繁”的数理分析中寻求一种“简”的通用律制，但仍能理性客观地看待一种通用律制在文化多样性的音乐实践中并不具有普适性。所以程先生还专门讨论了关于高质因数生律在一些独特民族风情音乐中的意义，思考也是非常有价值的。他批评了文艺复兴以来回避高质因数、依赖无理数生律来解释民族性音程的做法。这让我感到温暖与欣慰。因为 10 多年前我所做的“中立音”专题研究，就是用高质因数 11 和 13 来解释典型化中立音的音律现象。程先生注意到了具有独特风格的音程需由高质因数来解释，对我而言，犹如遇到一位知音。

程先生在文中的一些表述，如“昨日忽自问”、“检讨多次调整设想方案失败的过程中发现两个似乎毫无关联的现象”等等言语，勾勒出他日思夜想、笔耕不怠的耆学图。程先生的理工学术背景为他的乐律学研究带来了独特的视角和思维模式，他这次“跨界”的学术行为对乐律学研究可说是注入了新动力。我与程先生仍未谋面，但我们在神交中保持着对中华学术传统的深爱。由于这份深爱，我们成为忘年朋友。

李 玫

2012 年 7 月 1 日

目 录 Contents

1/4 最大音差不连续调节律

本乐律(指标题,简称新律)渊源有三:三分损益12律[①]、12平均律[②]及巴赫所用优化调节律[③]。乐律学是数学、物理(声)学及音乐学的交集,须用数理方法研究生律,求得贯通古今中外各乐律,获致新发现。下面的公式、参量及术语,读者也许似曾相识,我赋予一些新含义,便于表述、列表和贯通上述三律与新律的关系和同异。

生律只用相对频率 R,愈大则相对音高 H(全音数)愈高,符合人们的习惯(相对波长或古人用弦的相对长度与其互为倒数)。生律多用乘法。原初的出发点基音的 R 值写作:

$$R_0 = 1, \tag{1}$$

生律公式写成:$R'_j = k_j R_{j-1}$, (2)

式中下标 j 为生律序数;R'_j 及 R_{j-1} 依次为 j 及 $j-1$(前一)次生律的相对频率;k 为生律乘数,不受是否大于1的限制。参量符号 k 还用以表示音程系数(只用大于1的 k 值),k 小于1时只能用以表示向下生律的生律乘数,禁用其表示音程。各次生律的 k 值可能不同,用下标 j 表示成 k_j。

多次(包括单次)生律 $R'_j = \prod_{n=1}^{j} k_n = k_1 k_2 \cdots k_{j-1} k_j$,可能大于2或小于1,即和基音($R_0=1$)不在同一个八度内,须用下式转换成

$$R_j = 2^m R'_j,\text{或 } R = 2^m R' \tag{3}$$

① 《管子·地员篇》,参见郭沫若、闻一多、许维遹撰《管子集校》第909-910页,北京:科学出版社,1956年首版。《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》,参见高诱注《吕氏春秋》,上海:上海古籍出版社,1988年版。

② 朱载堉:《律吕精义·内篇·卷一·不用三分损益第三》,参见冯文慈点校《律吕精义》,北京:人民音乐出版社,1998年版。

③ 部分源自 A. Werckmeister 调节律的一种,参见李玫《东西方乐律学研究及发展历程》,北京:中央音乐学院出版社,2007年版,第184-185页。

以满足(受制于)下式:$1 \leqslant R_j < 2$,或 $1 \leqslant R < 2$ (4)

使 R_j 或 R 和基音在同一个八度内,以便比较各律高低或排成音阶。

式(3)中的 m 为整数,即调高的八度数,升律时 R' 常大于 2,m 须为负整数,逐次升律时常用 $m = -1$,则有 $R = R'/2$,即调低一个八度;

$R' < 1$ 时,m 应大于 1(即 m 为包括 0 在内的正或负整数)。

为便于用加减法比较相对音高 H,基音的 $H_0 = 0$, (5)

及 $H_j = (6/lg2) \cdot lgR_j$,或 $H = (6/\lg 2) \cdot lgR$ (6)

对应于式(3)及(4)有:$H = H' + 6m$ (7)

及 $0 \leqslant H < 6$ (8)

上三式中的 6 指一个八度内有 6 个全音数(无量纲,常可省写"全音数")。200H 即音分值,一个八度有 1200 音分。不受式(8)限制时有 H'。下面用大写英文字母做律名,基音定为 C,而非 c^1。

(一)三分损益 12 律

它是五度相生律的一种。中外古人多用弦的相对长度(现可理解为相对波长,或相对频率的倒数 $1/R$)生律。追溯到公元前 7 至前 6 世纪,欧洲有毕达哥拉斯律,中国先有五音,后有三分损益 12 律。中国古代用律数(基音定为 $3^4 = 81$)或大数(基音定为 $3^{11} = 177147$)度量音的高低(高则律数或大数变小),从基音(古称宫或黄钟)开始乘以 4/3 或 2/3(调回基音所在八度内,始自三分损益 12 律),用古人的话即为三分损益[$(3-1)/3 = 2/3$、$(3+1)/3 = 4/3$)],律数到"角"为 64,不能被 3 所整除,止于五音。后改用大数到"仲吕"为 131072,虽也不能被 3 所整除,使 12 律的大数均为整数。既然其后生律仍会出现带分数,《淮南子》所述即将律数带分数凑整(触发今人用以解释和声学中涉及高质因数 7、11、17 及 19 的一些过去难以解释的音程),从中可知中国古人有保持律数为整数的倾向。这些虽有点离题,却可有助于我们更深刻地理解它与其后的 12 平均律以至调节律的关系。

现今我们只用相对频率生律，正生 R 只乘以 3/2，生成的 R' 若 >2 时，用式(3)及 $m=-1$ 将其转换成 R 以满足式(4)，即和基音在同一八度内，$\times 3/2$ 就变为 $\times 3/4$。$j=6$ 及 7 时"蕤宾重上生"(指相对长度须增倍)，即 R 须两次调低八度而减半。其第 13 律有：

$R_{12}=3^{12}/2^{19}=1.013643264_{77}$ ($H_{12}=0.117300051_{85}$)

就是最大音差，其中的 12 指 12 次用 $\times 3/2$ 生律，分母中的 $19-12=7$ 指逐次生律中须有 7 次用式(3)及 $m=-1$ 将 R 调回基音所在八度内。因八度只涉及最前两个质因数的最简单分数生律，听感最协和、饱满和稳定，只能用它来扩展音域，所以希望多次生律后能生成 R'_{12} 值准确地为 2^m(m 为整数)，即回到原基音 $R=1$，中国古代称为"还宫"，以下借用此来表述之。

因有最大音差，此律不能准确还宫是其最大缺点。实际上任何单向自然生律(生律乘数 k 用质因数构成简单分数)均不能准确还宫。除了用托勒密半音($k=18/17$)生律生成更靠近 1 的 $R_{12}'=0.992779976$ ($H_{12}'=-0.0627244662$)外，三分损益 12 律的最大音差是最小的，即便如此，也耗费了古今中外乐律学家的许多心力以求还宫。为此，后来出现了许多调节律。

五度逆生(向上四度 $R\times 4/3$ 或向下五度 $R\times 2/3$，质因数 3 在 k 的分母中)在中国古代曾被斥为"乖相生之道，失君臣之义"[①]，其实它可导出最大音差的倒数。

$R'_{12}=(4/3)^{12}\cdot(1/2)^5=0.986540368_{55}$ ($H'_{12}=-0.117300051_{85}$)，只需注意正生须向下调节，逆生应向上调节，以求还宫。因大家熟知，省去此 12 律的数据表。

(二)12 平均律

最精准的求法应归功于明代朱载堉《律吕精义》中的新法密律。从

① 隋代郑译语。

黄钟倍律($R'=2$)开方、开方、再开立方求得 $k=2^{1/12}=1.059463094_{36}$(即应钟倍律,原著有效数达25位,现用小计算器只显示9或10位,足以检查计算是否正确,下文给至第10位,其中重要的数据给至第12位),它是唯一的生律乘数,再导出其各律倍律,有:

$$R_j=k^j=(2^{1/12})^j\quad(j=0,1,2,\cdots,10\text{ 或 }11),\tag{9}$$

另一种可称为"指数匀分八度法",由式(5)导出:

$$R_j=10^{\frac{H_j}{6}\lg 2}=10^{\frac{j}{12}\lg 2},\tag{10}$$

对12平均律而言,$j=2H_j$,$j=0,1,2,\cdots 10$ 或 11。例如 G 音(第8律,$j=7$)有 $R_G=R_7=10^{\frac{7}{12}\lg 2}=1.498307077$($H_G=H_7=3.5$)。此处是按半音正生,生律序数用 j 表示,下文用 j' 表示逆生的生律序数,以示区别。

从五度相生加以调节也可导出12平均律,唯一的调节量为1/12最大音差,即:

$$\varepsilon=(3^{12}/2^{19})^{1/12}=1.001129890_{63}\tag{11}$$

逐次生律的数据见表1。

表1　将三分损益12律调节成12平均律数据表

音名	j	k	R	k'	j'	$\overline{H}$	$\Delta H=H-\overline{H}$
C	0	–	1	$2\varepsilon/3$	0	0	0
G	1	$3/2\varepsilon$	1.498307077	$4\varepsilon/3$	11	3.5	0.010
D	2	$3/4\varepsilon$	1.122462048	$2\varepsilon/3$	10	1	0.020
A	3	$3/2\varepsilon$	1.681792831	$4\varepsilon/3$	9	4.5	0.029
E	4	$3/4\varepsilon$	1.259921050	$2\varepsilon/3$	8	2	0.039
B	5	$3/2\varepsilon$	1.887748625	$4\varepsilon/3$	7	5.5	0.049
$^\sharp F(^\flat G)$	6	$3/4\varepsilon$	1.414213562	$4\varepsilon/3$	6	3	0.059
$^\flat D$	7	$3/4\varepsilon$	1.059463094	$2\varepsilon/3$	5	0.5	0.068
$^\flat A$	8	$3/2\varepsilon$	1.587401052	$4\varepsilon/3$	4	4	0.078
$^\flat E$	9	$3/4\varepsilon$	1.189207115	$2\varepsilon/3$	3	1.5	0.088
$^\flat B$	10	$3/2\varepsilon$	1.781797436	$4\varepsilon/3$	2	5	0.098
F	11	$3/4\varepsilon$	1.334839854	$4\varepsilon/3$	1	2.5	0.108
C	0	$3/4\varepsilon$	1.	–	0	0	0

表中 k 及 k' 依次为正生及逆生经调节的生律乘数，H 及 $\overline{H}$ 依次为三分损益 12 律及 12 平均律各律的相对音高。

从表 1 可深入理解两律的关系，虽然只有一个调节量，却是无理数，12 次生律均调节得以还宫，成了无理数非自然生律。它是能准确还宫又最均匀的调节律。也可用下列两式之一直接导出各律的 R'_j 值：

正生用 $R'_j = (3/2\varepsilon)^j$ (12)

逆生用 $R'_{j'} = (4\varepsilon/3)^{j'}$ (13)

再用式(3)及适当的 m 值导出 R_j 或 $R_{j'}$。

虽然省去三分损益 12 律数据表，但从表 1 最右两列数据相加获知其 H 值供比较各律时用。$\overline{H}$ 值简单易记，可用作比较各律时参比横轴线，纵轴为其他律对 12 平均律的有关差值(常用音分值 $200\Delta\overline{H}$ 表示)。

12 平均律的优点是：(1)只有一个生律乘数 $k = 2^{1/12}$（逆生则为 $2^{-1/12}$，由 $R' = 2$ 开始），多次生律使各律有与基音由亲到疏（协和度由高到低）的均匀梯级分布。(2)除基音外，其他 11 律的 R 值依次均同各音程的音程系数 k 值，因而最为简捷而便于转调，24 个大小调的主音与其他音均有上述亲疏均匀分布。(3)亦可视其为由三分损益 12 律均匀调节得来，使各大文明板块的各民族易于接受。从表 1 看，若不调节（ε 为 1）就是三分损益 12 律，R 就变成简单分数，最右两列合并成 H 值，从 $j = 6$ 及 7 的 k 值连续为 3/4，活现“蕤宾重上生”之语。(4)使律制化繁为简，便于音乐实践。

其缺点是：(1)依靠无理数非自然生律，它模拟分数（并不简单）生律有近似效果，听感审美价值并非来自其无理数关系，而是来自其所模拟的近似分数关系，律音间关系不如简单分数生律那样纯净、生动而自然，某些主要音程的协和度稍差。它之所以被接受是因工业化的噪声广泛污染使人们对乐音纯净度的听感要求有所降低，又因便于音乐实践的简约方便性适于社会生活节奏加快，直到 20 世纪初（距 16 世纪 80 年代已过去约 320 年）方被普遍推广。(2)各音程只有一个音程系数，使各调的音程结构一致，失去个性，失去其赋予音乐表现力的部分特性。

历史已经证明，有了 12 平均律并非万事大吉。巴赫所用优化调节律

的产生较其晚至少 140 年,那时欧洲人多少知道法国人梅尔桑(M. Mersenne)于 1636 年发表的名著《普适的和谐》(*Harmonic universelle*)中提出的很接近(虽非严格意义上)12 平均律的创议。巴赫用以将欧洲经典音乐推向最辉煌时期不是靠 12 平均律,而是靠所用的优化调节律。这一时期(指 18 及 19 世纪)的强势乐律并非 12 平均律,而是后者。

四种生律方法(后两者可依次称为"逐次升律列表法"及"公式计算各律法",四法中有三法又各有正生及逆生两途)导出 12 平均律的结果均精确一致,充分证实灵活应用前八个公式做数理分析及计算的正确性和彻底性。

(三)巴赫所用优化调节律

1722 及 1744 年,德国最杰出的音乐大师巴赫(J. S. Bach, 1685—1750)先后创作了两卷"*Das Wohltemperierte Clavier*"(如何翻译须审慎)各 24 首(亦为 24 个大小调)前奏曲与赋格,这是其大量作品中唯一冠以涉及音律名称的创作,主要用以教育儿子及学生。后人对其有不少研究与论述。至少有两点应予确认和重视:一是巴赫对音乐教育很重视调律,亦即重视乐律这一音乐的基本柱石;二是他在其超凡的音乐实践中深感当时欧洲盛行各律制的缺失与不便,在其音乐实践中寻求更优的律制,其主要路线不是趋繁的纯律、中庸全音律或多律制,而是简约的优化调节律。缪天瑞著《律学》修订第三版 §208 曾简短地引述了少量论点,但未置评。原文如下:"研究家认为巴赫的二卷曲集是用多种律制写成的:既有 12 平均律,又用韦克迈斯特和瓦洛蒂(A. Werckmeister, 1645—1706; F. A. Vallotti, 1697—1780)的不规则律(§201, 202),还有法国普通律(不规则律, §203)等。"写此节前我颇多犹豫,因我重视这一论点却对其存疑(在本书《调的性格》一文中涉及)。从巴赫众多器乐作品中可知他熟悉并精通多种乐器,其中可能最重视管风琴,他只到有宏伟管风琴的大教堂供职,以便施展其管风琴大师的才华。他不仅为管风琴作曲并演奏,也要带领不少助手维护和经常调律,其潜心创作和调律过程

中深感律制的重要与当时的缺失，学习、接触并试用当时各种律制是必然和可能的，时间或长或短，只是其探索优化的过程不是目的，目的是其心目中的优化调节律。以他创作的审慎严谨作风，如果专用某一律制创作某一首前奏曲或赋格（某大调或小调），他一定会注明各曲所用律制以使儿子或学生便于学习领会，原谱中多有说明的习惯，但在此两卷曲集中却没有留下律制的注释，不大可能像英国乐器研究家巴恩斯(J. R. Barnes，1928—)在20世纪60年代研究后所说“发现巴赫对各首乐曲以周密适应或符合各种不同的调的特性而选用律制”。巴赫是音乐世家，不是数理世家，未能给我们留下他属意的优化律制（只能是调节律）的精确数理表述，不能证明他没有一个已较满意付用的律制而须用两卷曲集容纳多种律制大杂烩。我在写《调的性格》一文的过程中更倾向于相信巴赫心目中有一个确定的优化调节律，即纯五度逆生六次后，连续五次纯五度逆生并向上调节1/5最大音差，最后一次取消调节只用纯五度逆生，达致准确还宫。所用调节量为：

$$W = 1/V = (3^{12}/2^{19})^{1/5} = 1.002713882_{59} \qquad (14)$$

表2列出我对此律的详细生律解读的数据。它是一种不规则调节律，原型是（一）中所述的乐律，注意是逆向生律（生律序数为j'），表2也给出正向生律（序数为j）值，结果一致。我认为两卷曲集的译名应是“优化调节律键盘曲集”，这也是（三）节标题的适当依据。

缪著§208也提到巴赫晚年的学生基恩伯格（J. P. Kirnberger，1721—1783）“缜密地回忆说，他的老师巴赫教导他把所有大三度音程都调得比纯律较高”。对此我在《调的性格》一文中对所有12个大调的大三度按表2解读数据做了计算，结果表明：此律大三度各调共有5种音程系数，均比纯律的$R = 5/4 = 1.25$大，其中两种（6个大调）均大于1.26，一种（两个大调C及A）为1.255376404，同其E律R值，一种（两个大调E及F）为1.258783349，只有一种（两个大调D及G）为1.251978681，仍大于纯律值。这非但证实基恩伯格的回忆真切可信，也说明巴赫心目中认可付用的乐律可做表2的解读。

表 2　解读巴赫所用优化调节律数据表

音名	j'	k'	R	k	j	H	$\Delta\overline{H}=H-\overline{H}$	I
C	0	–	1	3/4	0	0	0	0
F	1	4/3	4/3	3/4	11	2.490	−0.010	−1
^bB	2	4/3	16/9	3/2	10	4.980	−0.020	−2
^bE	3	2/3	32/27	3/4	9	1.471	−0.029	−3
^bA	4	4/3	128/81	3/2	8	3.961	−0.039	−4
^bD	5	2/3	256/243	3/4	7	0.451	−0.049	−5
$^bG(^\#F)$	6	4/3	1024/729	3/4W	6	2.941	−0.059	∓6
B	7	4W/3	1.877968022	3/2W	5	5.455	−0.045	5
E	8	2W/3	1.255376404	3/4W	4	1.969	−0.031	4
A	9	4W/3	1.678377798	3/2W	3	4.482	−0.018	3
D	10	2W/3	1.121955145	3/4W	2	0.996	−0.004	2
G	11	4W/3	3/2	3/2	1	3.510	0.010	1
C	0	2/3	1	–	0	0	0	0

右列 I 为 12 个大调的升降号数（降号“b”数为负值）

从该律因主音不同而有多种音程结构（例如大三度有五种，半音多达六种等，其相互间不同的组合非常丰富多彩）看，它足以用来表现各对象的音乐特征，而巴恩斯所说多种乐律中没有一种能全面地满足其创作要求，不能印证基恩伯格的话。说“巴赫也曾使用过 12 平均律”，初看不可不信，12 平均律不是被过分强调“调有特性”者认为是使各调失去特性的罪魁祸首而“不应存在，否则各调就会失去各自的特性”（奥地利作曲家兼音乐理论家利希登塔尔 1826 年语，P. Lichtenthal，1780—1853）吗?！难道巴赫故意用 12 平均律表现其某曲失去特征吗？正是我对某些西方研究的存疑态度触发了表 2 解读后启动发现新律的进程（参考文献参见本书《调的性格》一文）。

巴赫所用优化调节律的优点是：(1) 保留了 8 个传统的由亲到疏的自然生律（G 可认为由 C 正生并不调节），使音乐更动听，相当程度上克服了 12 平均律的最大缺点；(2) 转调也算方便；(3) 只有一个生律乘数及一个调节量，却是不规则调节律，因主音不同，各音程有多种音程系

数，各调有多种不同的组合而音程结构有各种差异，便于从中选择适当的调以表现主题的音乐特性。

其缺点是：(1)仍有四律依靠无理数生律；(2)转调不如 12 平均律；(3)上述第(3)个优点可能因过于繁杂而有负面影响；(4)方便音乐实践逊于 12 平均律；(5)若以 12 平均律 H 值为横轴做图比较，其 10 个律的 H 值均偏负，最大的^bG 达 −0.059，只有 G 音偏正 0.010，其邻音^bG-G 音程较之 12 平均律差达 0.069，当然这是从 12 平均律看，可能算不上缺点，但它影响到转调。

下面见图 1：

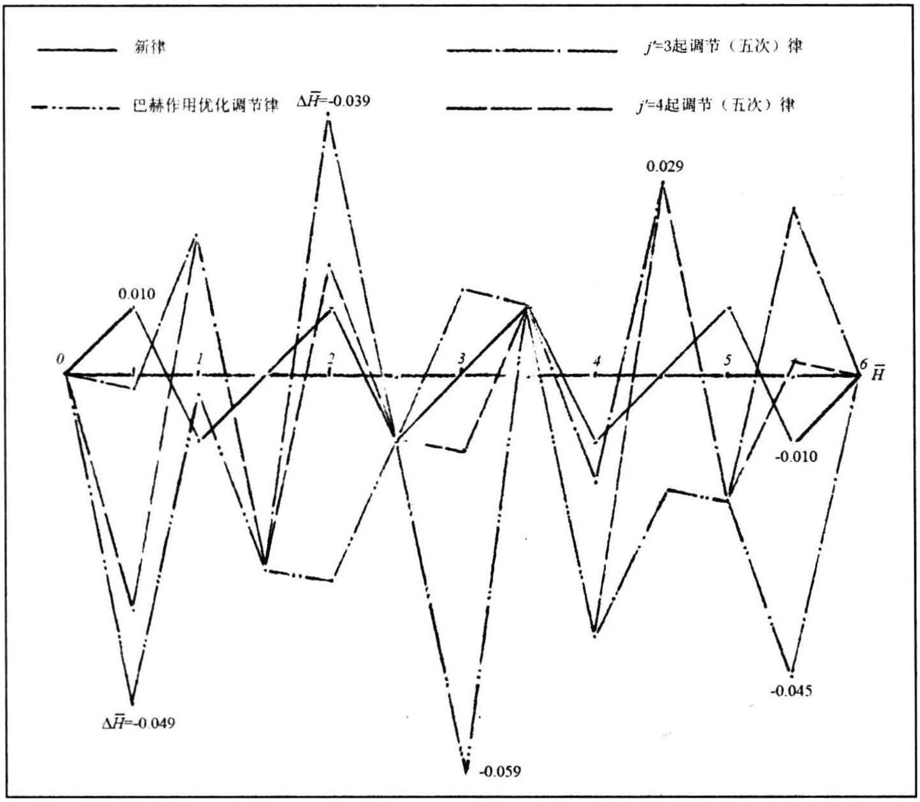

图 1 四种调节律与 12 平均律比较($\Delta\overline{H}=H-\overline{H}$)示意图

图 1 也是锯齿波图，横坐标为 12 平均律 $\overline{H}$(标出其全音数)，纵坐标

为差值$\Delta\overline{H}=H-\overline{H}$,$H$为各调节律相对音高,注意仅在各折点处($\overline{H}=0.5j,j=0,1,2,\cdots,11$及12)有意义,其间的四种连接线只是方便区别为何种调节律。

虽然有上述缺点,巴赫却用以将欧洲经典音乐推向前所未有的高潮,直到19世纪末该律仍居于主流和强势地位,普遍推广12平均律还是较晚的事。我虽存疑巴赫曾用12平均律创作两卷曲集的某些曲子,巴赫本人及所用优化调节律也对促进12平均律(因可视作最平均的调节律)起着带头示范的促进作用。从巴赫起到19世纪末是欧洲也是全球音乐最辉煌的时期。该律用优化调节的方法避繁就简,又保留8个自然生律使音乐更动听,大方向是正确的。

我在学习、解读及验算该律的过程中尝试提前四或三律(从$j'=3$或4起)开始调节可稍有改善,可从上述第(5)个缺点来说,即最大的$\Delta\overline{H}$值降至0.039或-0.039,但邻音^bE-E或^bA-A仍均达$\Delta\overline{H}$为0.068,虽不成功,却激励我进一步去探索新律。图1给出四种调节律(包括下述的新律)与12平均律的差值比较。本文不再列出稍有改善的两律数据表。

能否有更大的改善?不能改善的原因何在?能否保留更多的自然生律又兼具12平均律的优点和减少其缺点?是否我已自陷于狂想梦境?

(四)1/4最大音差不连续调节律

巴赫用于优化调节律的调节量W(或其倒数V)与1之差已经很小,六次连续五度逆生和五次连续五度逆生再予以调节仅能使$\Delta\overline{H}$降到±0.039,相邻半音音程偏离12平均律难以低于0.068,原因是连续次数过多,即使偏差很小,积累多次就会变大到不可接受。试验减少连续调节次数会增大调节量,更难的是要保留更多的最简单自然生律数,还要兼顾各调音程结构既不单一又不繁杂,就不是过去各调节律着眼于精准还

宫那样简单。

检讨多次调整设想方案失败的过程中,发现两个似乎毫无关联的现象:每次五度正生引入 +0.010 的 $\Delta\overline{H}$ 的偏差,每次五度正生再向下调节 1/4 最大音差(即 -0.030 的偏差)引入 -0.020 的偏差。紧紧抓住这两者,用两次前者配合一次后者(居两次前者中间)就可完成一个循环回到零偏差,四次循环可完成从基音到高八度的准确还宫。参见图 1 中的实线所示。表 3 给出 1/4 最大音差不连续调节律(本文所述新律)的数据表,所用调节量为:

$$W' = 1/V' = \varepsilon^3 = (3^{12}/2^{19})^{1/4} = 1.003393503_{28} \qquad (15)$$

虽然 W' 相当于 0.029325 全音数,但上述循环的上下限(锯齿形波峰及谷)只偏离 12 平均律 ±0.009775(即 ±0.010),且新律有一定规律,便于用公式求各律。

表 3　1/4 最大音差不连续调节律数据表

音名	j	k	R	k'	j'	H	$\Delta\overline{H}$
C	0	-	1	2/3	0	0	0
G	1	3/2	3/2	$4W'/3$	11	3.510	0.010
D	2	$3/4W'$	1.121195220	2/3	10	0.990	-0.010
A	3	3/2	1.681792831	4/3	9	4.5	0
E	4	3/4	1.261344623	$2W'/3$	8	2.010	0.010
B	5	$3/2W'$	1.885618083	4/3	7	5.490	-0.010
$^\#F(^bG)$	6	3/4	1.414213562	4/3	6	3	0
^bD	7	3/4	1.060660172	$2W'/3$	5	0.510	0.010
^bA	8	$3/2W'$	1.585609487	4/3	4	3.990	-0.010
^bE	9	3/4	1.189207115	2/3	3	1.5	0
^bB	10	3/2	1.783810673	$4W'/3$	2	5.010	0.010
F	11	$3/4W'$	4/3	4/3	1	2.490	-0.010
C	0	3/4	1	-	0	0	0

表 3 是逐次生律,k 或 k' 中出现 W' 是在 j 或 j' 为 2、5、8 及 11 下须要调节。箭头指示用式(2)计算所需各量。也可用下列两式之一直接导