

中等专业学校

工科专业试用教材数学第二册

教学参考书

上海市中等专业学校数学教学参考书编写组编

高等教育出版社

目 录

第 八 章	空间的直线和平面.....	1
第 九 章	二次曲线.....	27
第 十 章	坐标变换.....	47
第十一章	极坐标和参数方程.....	59
第十二章	数列.....	81

第八章 空间的直线和平面

一 目的要求

1 使学生理解空间的直线与平面的概念,掌握平面的基本性质,并能画出直线、平面在空间的各种位置的图形.

2 使学生掌握空间的直线和直线、直线和平面、平面和平面的位置关系以及异面直线所成的角、直线和平面所成的角、直线垂直于平面、二面角等概念,并能根据所给条件画出有关图形.

3 逐步帮助学生建立空间的概念,培养学生的空间想象力,提高学生的逻辑推理能力和计算能力.

二 教材说明

本章教材分成五节,主要研究空间图形的概念和性质.

第一节是平面.教材从最简单的空间图形(点、直线、平面)着手,阐明了平面是广阔无涯的,直线是可以无限延伸的,并介绍了平面的画法及表示方法.教材用公理的形式阐述了平面的基本性质,推出了确定平面的条件,并且对符合这些条件的平面的存在性和唯一性作了论证.

第二节是空间直线之间的关系.教材给出了异面直线的定义,通过空间平行直线的传递性和空间两个角相等的讨论,规定了异面直线所成的角的定义.

第三节是空间直线和平面的位置关系。教材给出了直线和平面平行，直线和平面垂直的定义。在这个基础上讨论了直线和平面平行或垂直的判定和性质。通过对直线和平面斜交，斜线长与射影长的关系的讨论，规定了直线和平面所成的角的定义，最后讨论了三垂线定理及其逆定理。

第四节是空间平面和平面的位置关系。教材讨论了平面和平面平行的判定和性质。在讨论两个平面相交时给出了二面角和它的平面角的定义，在这个基础上给出了两个平面垂直的定义，讨论了平面和平面垂直的判定和性质。

第五节是空间图形的有关计算综合举例。教材安排这节内容主要是通过多面体和旋转体的有关计算，巩固和综合运用前面四节所讲的空间直线和平面的相关位置和它们的性质。由于教学时间的限制，教材对多面体和旋转体的知识未单列成章详细讲解，而是把它们的主要特征与计算公式，列成附表供教学参考。教师举例时，可结合例题的内容，对照附表介绍有关几何体的概念和性质，从而选用有关公式进行计算。

本章的重点：(1) 平面的基本性质；(2) 空间直线和平面的各种位置关系；(3) 异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角；(4) 三垂线定理及其逆定理。

平面的基本性质是研究本章内容的基础，有关空间直线和平面的各种定理、推论都是在阐述平面的基本性质的三个公理的基础上来讨论的。空间直线和平面的各种位置关系又是研究空间图形性质的基础，没有这些关系的讨论，就无从建立异面直线所成的角、直线与平面所成的角、直线垂直于平面、二面角等概念。同时，这些概念和三垂线定理及其逆定理

在实际应用中也较广泛,应使学生牢固掌握.

此外,逐步帮助学生建立空间概念,培养学生的空间想象力,提高学生的逻辑推理能力和计算能力,也是本章的一个重要教学目的,所以在本章教学的全过程中,对此应有足够的重视.

本章的难点:(1)理解和建立空间概念,画出空间图形;(2)理解定理的逻辑推理过程,特别对如何应用反证法进行逻辑论证;(3)各种判定定理、性质定理以及正确选用有关定理,解各种计算题,合理地进行表达.

本章概念较为抽象,各种判定定理、性质定理也较多,学生常会把平面图形和空间图形的性质混淆起来,以致影响对概念、定理的掌握和应用.在教学中,可多与平面几何进行“类比”,帮助学生理解概念,同时还可应用直观教具和挂图帮助学生建立空间概念,并让学生多画空间图形,及时纠正错误画法.证明定理时教师可着重分析推理的步骤,使学生理解论证的根据,从而能掌握定理和运用定理来解题.在用反证法证明定理时,教师要讲清什么是反证法,在怎样的情况下要用反证法,有哪些主要步骤等等,并可让学生作简单的练习.在作计算题时,一开始就要求学生说理,写出推理过程,逐步培养逻辑表达能力.

本章教学约需 20 课时,具体分配如下(仅供参考):

§8-1	平面	约 2 课时
§8-2	直线和直线的位置关系	约 2 课时
§8-3	直线和平面的位置关系	约 5 课时
§8-4	平面和平面的位置关系	约 5 课时

三 教学建议

1 平面是作为立体几何最基本的元素提出的,也是我们日常生活中到处都会接触到的一个概念.但是我们所能看到的平面都只是它的一部分,因为平面是广阔无涯的,在教学中必须突出这个概念,否则以后学生会产生“两个平面相交于一点”的错误.

关于平面的画法,教材指出画一个水平放着的平面,常把表示平面的平行四边形的锐角画成 45° ,把横边画得约为另一边的 2 倍.由于我们在不同的角度、不同的距离来看水平放着的平面,这时表示平面的平行四边形的形状和大小各有不同,所以在讲画法时只要指明它们大约的比例,不要规定得太死板.

画一个平面的一部分被另一个平面遮住时,必须强调指出被遮住部分的线段要画成虚线或不画,有些学生由于忽视了这一点,画出来的图形就显得没有立体感.要求学生一开始就养成认真作图的习惯,这对以后各节内容的学习会有很大的益处.

要讲清描述平面基本性质的三个公理和三个推论.教学中,除举些实例帮助学生三个公理进行理解外,还要逐字逐句地进行解释.在讲三个推论的证明时,要注意分析证明的思路,讲清论证的依据,做到说理清楚,层次分明,书写有条理,给学生良好的示范.

推论 3 的证明已经应用了反证法, 教师应该把证明的层次讲清楚, 让学生初步了解反证法的证明过程.

教材在公理和推论中出现了一些词句: 如“可以引一个平面”、“只可以引一个平面”、“确定一个平面”. 这些词句学生比较生疏, 应该解释它们的含义. “可以引一个平面”说明图形的存在性; “只可以引一个平面”说明图形的唯一性; “确定一个平面”说明图形既存在, 而且只有一个. 所以“可以引一个平面, 并且只可以引一个平面”与“确定一个平面”所表示的意义相同.

2 讲解空间两条直线的位置关系时, 可先考虑一个平面的两条不重合的直线, 它们之间的位置关系只有相交或平行两种. 反过来, 如果空间两条直线的位置关系是相交或平行, 根据平面的基本性质, 可知这两条直线必在同一平面内. 然后以教室里下垂的电线和黑板边沿的一条横线的位置关系为例, 说明空间还有既不相交也不平行的直线, 从而引入异面直线的概念. 由于异面直线不能落在同一平面内, 所以它们既不相交也不平行. 还应指出, 不可把异面直线误认为是“两个平面内的直线”, 因为在两个平面内的两条直线不一定是异面直线. 例如, 教材的图 8-19 中正方体的两条棱 AB 和 D_1C_1 虽分别在平面 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 但如果连接 AD_1 和 BC_1 , 就可看出 AB 和 D_1C_1 是在同一平面 ABC_1D_1 内, 它们是平行线, AB 和 CC_1 虽分别在平面 $ABCD$ 和平面 BCC_1B_1 内, 但它们不能落在同一平面内, 所以是异面直线.

异面直线的概念讲清以后, 可小结一下空间两条直线的位置关系只有相交、平行和异面三种, 并教会学生画异面直线

的方法.

教材阐述关于直线平行关系的定理 2 和定理 3 是确定异面直线构成角的理论依据,而定理 1 又是为定理 2 作准备的.所以在讲解异面直线所成角的概念以前,要讲清这三个定理.定理 1 的证明用到了反证法,学生较难理解,教师可通过这个定理说明:(1)在什么情况下可用反证法;(2)如何应用反证法;并归纳出用反证法证明的一般步骤.指出当命题的结论只有几种相对立的情况时往往可用反证法.用反证法证明的一般步骤如下:

- (1) 作出与命题结论相反情况的假设;
- (2) 根据假设的条件,按逻辑推理进行论证;
- (3) 必然得出与已知条件相矛盾的结果;
- (4) 证实假设的情况是不成立的,也就是命题的结论必然成立.

以后遇到应用反证法时,应随时与上述步骤相对照,使学生进一步了解反证法的推理方法.

讲异面直线时,可先讲平面内两条相交直线的位置关系,可用它们的交角来表示.然后提出问题:两条异面直线既不相交,又不平行,怎样来表示它们之间的位置关系呢?教材根据定理 2 和定理 3 给出了二异面直线所成的角的定义.

画异面直线所成的角,可以在空间任意取一点 O (点 O 也可以取在任意一条异面直线上),过 O 点分别引两条直线 a' 和 b' 与已知异面直线平行,则 a' 和 b' 相交所成的角就表示已知异面直线所成的角.由于 a' 和 b' 相交可以是互为补角的两个角中的任意一个角,所以两条没有确定方向的异面直

线所成的角,也应该是互为补角的两个角中的任意一个角.

学生对异面直线所成的角的概念一时不易理解,总认为既不相交也不平行的两条直线还能构成角吗?应该强调这里所指的“角”,不是直接相交的“交角”.而是指自空间任意一点所作平行于两条异面直线的两条直线所成的角.

如果两条异面直线所成的角等于 90° ,那末这两条异面直线就叫做互相垂直.要提醒学生注意,空间两条垂直的直线,这两条直线可能是在同一平面内的相交直线,也可能是不在同一平面内的异面直线.

两条直线平行或垂直的概念,学生在平面几何里已经学到过,但是在立体几何里,这两个概念有所引伸,情况也比较复杂,要防止学生用平面几何中的直线和直线的平行、垂直概念,来理解空间直线和直线的平行、垂直.教学中如果能进行一些比较,可以帮助学生加深理解.例如:空间两条直线,若不平行,那末它们可能相交于一点,也有可能不相交(异面直线),但是在平面几何里,两条直线若不平行,则它们一定相交于一点.又如:过空间一条直线上一点,可以作无穷多条直线垂直该直线,但是在平面几何里,过直线上一点,只能作一条直线垂直于该直线.总之,在学习立体几何过程中,既要重视与平面几何进行类比,也不可忽略与平面几何的区别.

3 讲解直线和平面的位置关系时指出直线和平面的位置关系有三种:(1)直线在平面内;(2)直线和平面平行;(3)直线和平面相交.关于直线在平面内的情况已在§8-1的公理1中作了说明.关于直线和平面平行的情况,教材讨论了直线和平面平行的判定定理和性质定理.教学中,要向

学生说明判定定理和性质定理的区别，指出如果要知道直线和平面是否平行，应该用判定定理；如果已知直线和平面平行，要知道它具有哪些性质，就应该用性质定理。画直线和平面平行时，最好使所画直线和表示平面的平行四边形的一条边平行。

在研究直线和平面相交时，也可以与平面上直线和直线相交的情况来类比。

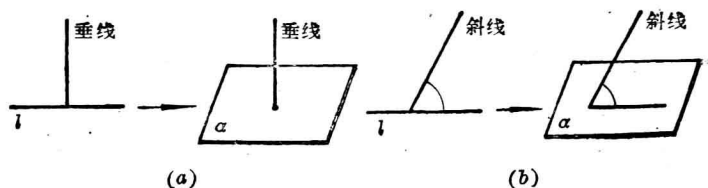


图 8-1

如图 8-1(a) 所示，如果把直线 l 看作平面 α ，那末平面上两条直线互相垂直可看作空间的一条直线垂直于一个平面；如图 8-1(b) 所示，如果把直线 l 看作平面 α ，那末平面上两条直线斜交，可看作空间的一条直线与一个平面斜交。

在讲直线与平面垂直时，教师可先引导学生观察教室中下垂的电灯线与天花板之间的位置关系，从而引进直线和平面垂直的定义，然后分析木工利用曲尺判断木柱是否与板面垂直的方法，从中得出直线与平面垂直的判定定理 1。在讲判定定理 2 时，可与平面几何中的“如果两条平行直线中的一条直线垂直于第三条直线，那末另一条直线也垂直于第三条直线”进行类比，同样，在讲直线和平面垂直的性质定理时，也可与平面几何中的“如果两条直线垂直于同一条直线，那末这

“两条直线就平行”进行类比。这样可使学生易于理解这两个定理。要使学生正确使用判定定理和性质定理来解题，并能正确地画出直线和平面垂直的图形。

关于斜线与平面所成的最小的角的定理是给出直线和平面所成角的定义的依据。由于学生在初中没有学过“两个三角形有两边对应相等，如果第三边不等，那末它所对的角也不等，第三边大的所对的角较大”的定理，所以教材运用三角知识来证明。讲清这条定理，可使学生对直线和平面所成的角的定义有较清楚的理解。

三垂线定理及其逆定理在实际应用中较为广泛。讲解时，可先用直观教具观察。例如，用两根木条做成互相垂直的模型(图8-2)，开始把它放在平面 α 内 CDE 的位置(图8-3)，

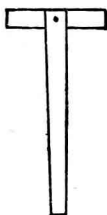


图 8-2

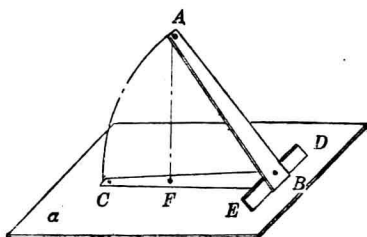


图 8-3

然后固定 DE ，把 CB 提到 AB 的位置，则 BF 就是 AB 在平面 α 内的射影。这样变动之后，两根木条的垂直关系没有变化，这就说明如果 DE 和 AB 垂直，那末 DE 也就和 AB 在平面 α 内的射影 BC 垂直，反之亦然。

再按教材证明三垂线定理及其逆定理。要使学生掌握定理中的逻辑推理，并能应用定理来解决有关的问题。

4 在讲解平面和平面的位置关系时，可先根据 §8-1 公理 3，说明两个平面如果有不在一直线上的三个公共点，那末这两个平面重合。对于不重合的两个平面，根据 §8-1 公理 2，可知如果它们有一个公共点，那末这两个平面必相交于过这点的一条直线；如果它们没有公共点，那末这两个平面互相平行。因此两个平面的位置关系除去重合的情形以外，只有平行和相交两种。

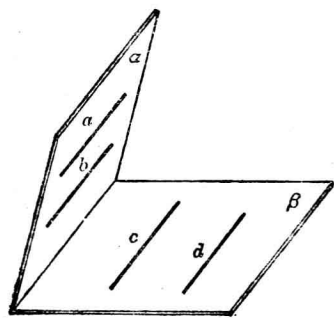


图 8-4

在讲解平面和平面平行的判定定理和推论 1 时，必须突出已知条件中的“两条相交直线”这一要求。如果忽视这个相交条件，则两个平面就不一定平行。如图 8-4 所示，如果平面 α 内直线 $a \parallel b$ ，且 a, b 都平行平面

β ，可以看出平面 α 和 β 不一定平行；如果平面 α 内直线 $a \parallel b$ ，平面 β 内直线 $c \parallel d$ ，且 $a \parallel c, b \parallel d$ ，可以看出平面 α 和 β 不一定平行。

在讲完性质定理后，要引起学生注意，已知两个平面平行，虽然一个平面内的任何直线都平行于另一个平面，但是这两个平面内的所有直线并不一定互相平行，它们之间有可能是平行的，也有可能是异面直线(图 8-5)。

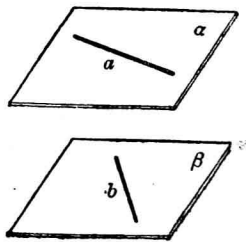


图 8-5

空间两个平面相交，它们必相交于一条直线，这种相交平面图形，在我们日常生活中是常见的。例如，室内相邻的墙壁、车刀的刀口等等。从这些实例中引出二面角的概念，对于二面角的定义，也可以看成是用半平面绕直线（即半平面不伸延的边）旋转，它的最初位置和最终位置所组成的图形。

二面角的大小是用它的平面角来度量的，这时应突出二面角的大小与它的平面角的大小有着一一对应的关系。要防止学生错误地认为在二面角的棱上任取一点 P ，自点 P 在这个二面角的两个半平面内分别任意引直线所成的角，就是二面角的平面角。在解有关二面角的问题时，一般都是把它转化为平面角的问题来进行的，就是根据条件在二面角内引一个辅助平面垂直于二面角的棱，则辅助平面和二面角的两个半平面的交线，就是平面角的两条边，于是问题就可以归结到平面角上面来解决。因此，二面角的平面角这个概念非常重要，突破了这一点，一般的有关二面角问题都可以迎刃而解了。

在教学中，还可以教会学生怎样根据二面角的平面角，来画出这个二面角的图形。如

图 8-6 所示，已知 $\angle \varphi$ 是一个二面角的平面角，过 $\angle \varphi$ 的顶点作与 $\angle \varphi$ 不在同一平面内且垂直于 $\angle \varphi$ 所在平面的直线 AB ，再过直线 AB 上一点 A ，引平行于 $\angle \varphi$ 的一条边 a 的射线，这样可以画出半平面 α ，同样也可以

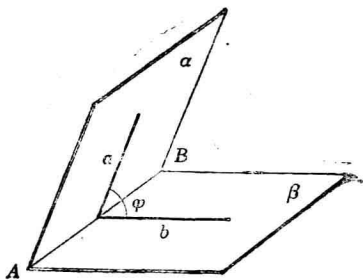


图 8-6

画出半平面 β ，于是二面角 $\alpha-AB-\beta$ 就是要画的二面角，它的平面角为 $\angle\varphi$ 。

在研究平面和平面位置关系时，同样也可以与平面上直线与直线的位置关系来类比。

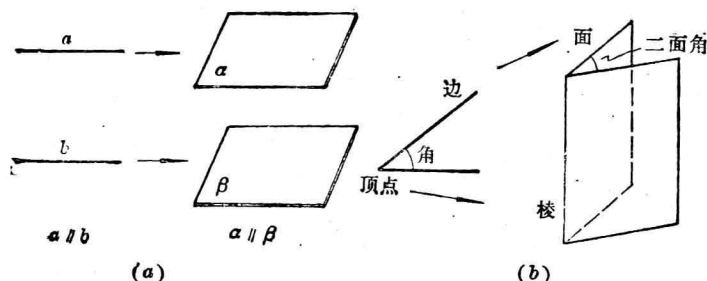


图 8-7

如图 8-7(a) 所示，如果把直线 a 看作平面 α ，把直线 b 看作平面 β ，那末平面上 $a \parallel b$ ，可看作空间中 $\alpha \parallel \beta$ ；如图 8-7(b) 所示，如果把角的顶点看作二面角的棱，把角的边看作二面角的半平面，那末平面图形“角”，可看作空间图形“二面角”。

5 为了帮助学生对空间图形的概念和性质有系统的认识，并为综合运用这些知识进行空间图形的有关计算作好准备，在讲完前四节内容后，可作一次复习小结。现把本章的重要概念、定理、性质简单扼要地列在下面，供教师参考：

(1) 平面的基本性质 $\left\{ \begin{array}{l} \text{公理 1} \\ \text{公理 2} \\ \text{公理 3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{过不在一直线上的三点} \\ \text{过一直线及线外一点} \\ \text{二相交直线} \\ \text{二平行直线} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{可以确定} \\ \text{一个平面} \end{array} \right\}$

(2) 空间直线、平面的位置关系

(i) 两直线的位置关系 $\begin{cases} \text{相交} \\ \text{平行} \end{cases}$ 在同一平面内
 $\begin{cases} \text{异面} \end{cases}$ 不在同一平面内

(ii) 直线和平面的位置关系 $\begin{cases} \text{平行} \\ \text{相交} \end{cases}$
 $\begin{cases} \text{垂直相交} \\ \text{斜交} \end{cases}$

(iii) 两平面的位置关系 $\begin{cases} \text{平行} \\ \text{相交} \end{cases}$
 $\begin{cases} \text{垂直相交} \\ \text{斜交} \end{cases}$

(3) 几个重要的概念

(i) 异面直线所成的角；

(ii) 直线垂直于平面；

(iii) 直线与平面所成的角；

(iv) 二面角及其平面角；

(v) 三垂线定理及其逆定理。

(4) 直线与平面平行(或垂直)的判定定理、性质定理。

(5) 平面与平面平行(或垂直)的判定定理、性质定理。

在复习小结以上内容以后,可以举下面的例子,以加深学生对所学知识的理解。

例1 如图8-8, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为10厘米,求:

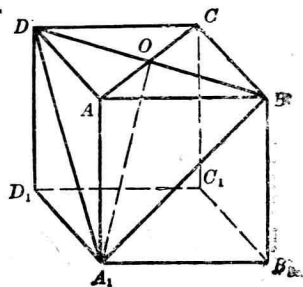


图 8-8

- (1) 异面直线 AB 与 A_1D 所成的角的度数;
- (2) 点 A 到平面 BA_1D 的距离;
- (3) 直线 AA_1 与平面 BA_1D 所成的角的度数;
- (4) 平面 ABD 与平面 BA_1D 所成二面角的度数.

为了帮助学生提高逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力,小结时还可结合下面的例子讲解怎样添作辅助直线(或辅助平面).通过例子可以看到在解题时,如果适当地添作辅助直线(或辅助平面),就可以把空间的图形转化为平面的图形而解得结果.

例 2 一条直线和一个平面相交,那末这条直线被交点分成的两条射线和这个平面所成的两个角相等.

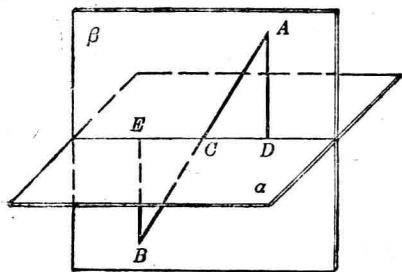


图 8-9

已知 如图8-9, 直线 AB 交平面 α 于点 C .

求证 AC 和 BC 与平面 α 所成的两个角相等.

证明 在 AC 和 BC 上分别任意取一点 A 和 B , 作 AD 和 BE 垂直平面 α , 于是 $AD \parallel BE$

(直线和平面垂直的性质定理).

过两条平行线 AD 和 BE 可以确定一个平面 β (添作的辅助平面), 则平面 β 和平面 α 的交线是 DE .

因为 AB 在平面 β 内(平面的基本性质的公理 1), 点 C 是直线 AB 和平面 α 的公共点, 所以点 C 必在平面 α 与平面

β 的交线 DE 上. 因为 $\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 是对顶角, 所以 $\angle ACD = \angle BCE$.

例 3 如图 8-10, 已知 AB 和 CD 是两条异面线段, 并且有 $CA = CB$ 及 $DA = DB$.

求证 $AB \perp CD$.

证明 过 CA 和 CB 确定一个平面 α (添作的辅助平面), 取线段 AB 的中点 O , 连结 CO (添作的辅助直线), 那末有 $CO \perp AB$ (等腰三角形底边上的中线垂直于底边).

同理, 连接 DO , 那末有 $DO \perp AB$.

过 CO 和 DO 确定一个平面 β (添作的辅助平面), 那末 $AB \perp \beta$ (直线和平面垂直判定定理).

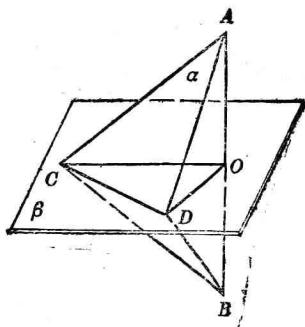


图 8-10

但直线 CD 在平面 β 内(平面的基本性质的公理 1), 所以 $AB \perp CD$ (一条直线垂直于一个平面, 那末这条直线垂直于这个平面内的任何直线).

6 在讲解教材 §8-5 时, 要结合例题的内容, 参照附表分别介绍有关形体的概念和主要特征, 然后再分析解题方法. 例如, 在讲例 1 时, 可先介绍棱锥、正棱锥的概念和主要特征, 然后结合例题讲解正三棱锥的情况, 指出“它的底面是正三角形”, “顶点到底面的垂线足就是底面正三角形的中心”等特征. 又如, 在讲例 2 时, 可先介绍棱台、正棱台的概念和主要特征, 然后指出“正六棱台的上、下底面是正六边形”, “上、下