周毓麟论文集（二）

Selected Papers of Zhou Yulin (2)

世界图书出版公司

周毓麟论文集（二）

Selected Papers of Zhou Yulin (2)

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

书　　名：Selected Papers of Zhou Yulin (2)
作　　者：周毓麟
中 译 名：周毓麟论文集（二）
出 版 者：世界图书出版公司北京公司
印 刷 者：北京世图印刷厂
发　　行：世界图书出版公司北京公司（北京朝内大街 137 号　100010）
开　　本：16　　　　　　　印　张：30.75
出版年代：2002 年 11 月
书　　号：7-5062-2825-8
定　　价：69.00 元

序

1992 年 6 月，在庆祝周毓麟院士七十华诞之际，出版了他自选的一本论文集，共 17 篇论文， 352 页，当时由于篇幅有限，且考虑各方面合作者，远远未能反映作者的全面研究工作和成果，这次欣逢周毓麟院士八十诞辰之际，我们在他发表的论文与著作中，继续出版他的论文选集（二）和（三），其中论文选集（二）共有论文 26 篇，论文选集（三）共有论文 28 篇，由于周先生在数学这块科学园地上辛勤耕耘了六十多年，所取得的科学成果是极其丰富的，我们以后将继续出版周先生的论文集。

在论文选集(二)中，主要收录了周毓麟教授在拓扑学、非线性抛物型方程，非线性波动色散方程等方面的论文，其中包括 KdV 方程、非线性 Schrödinger 方程、铁磁链方程、Benjamin − Ono 型方程、有限深度流体方程等，我们可以看到他以独特的方法建立了这些方程（方程组）完整的系统的数学理论，得到了一系列深刻而重要的结果。在论文选集（三）中，主要收录了周毓麟教授有关离散泛函分析的数学理论，其中包括离散的 Sobolev 插值不等式，某些非线性发展方程差分格式的迭代收敛性、稳定性。此外，他还提出了新型的并行格式并作了理论分析和实际计算等。出版这些论文集的目的除了有重要的纪念意义外，更重要的是为了使更多的学者，特别是年轻的偏微分方程、计算数学家，能够从这些论文中学习周毓麟教授严谨的治学态度，敏锐的分析问题的方法和深厚的数学功底，促进我国偏微分方程和计算数学的迅猛发展。

在此，我们向为“周毓麟选集”出版作出辛勤贡献的所有人员表示衷心的感谢，并衷心祝愿周毓麟教授健康长寿，在科学事业上取得更大的成就。

郭柏灵

2002 年 10 月

目　　录

Contents

THE " FUNDAMENTAL THEOREM OF ALGEBRA " FOR CAYLEY NUMBERS *

By YUH-LIN JOU(周毓麟)

Tsing-Hua University

凯雷数系中之“代数学基本定理”（摘要）

一个 Cayley 数多项式 $f(x)$ 是有限个具 $[a_{01}...a_{0l_0}xa_{11}...a_{1l_1}xa_{21}...a_{2l_2}...a_{k-11}...a_{k-1l_{k-1}}xa_{k1}...a_{kl_k}]_\alpha$ 形式的单项式之和，其中 a_{ij} 与 x 都为 Cayley 数. 本文用拓扑学的方法证明关于 Cayley 数的代数基本定理，即：［设 $f(x)$ 为一最高次只有一项的 Cayley 多项式，方程式 $f(x)=0$ 至少只有一个根］.

A polynomial in Cayley numbers is a sum of a finite number of monomials of the form $[a_{01}...a_{0l_0}xa_{11}...a_{1l_1}xa_{21}...a_{2l_2}...a_{k-11}...a_{k-1l_{k-1}}xa_{k1}...a_{kl_k}]_\alpha$ with certain association α, where x and a_{ij} are real Cayley numbers. The aim of this note is to prove that if such a polynomial $f(x)$ has only one term of the highest degree n,then the equation $f(x)=0$ has at least one root. The similar problem for quaternions has been discussed by S. Eilenberg and I. Niven[1]. The method is based on the concept of degree of mapping and the Kronecker existence theorem.

We recall some definitions on Cayley numbers. The system of Cayley numbers[2] is a non-associative algebra of dimension 8 over the field R of real numbers, with a basis consisting of eight elements

$$e_0=1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, \tag{1}$$

And with the rules of multiplication given as follows:

$$\begin{aligned} e_r^2 &= -1, \\ e_re_{r+1} &= e_{r+3}, \\ e_re_{r+2} &= e_{r+6}, \quad (r,s=1,...,7) \\ e_re_{r+4} &= e_{r+5}, \\ e_re_s &= -e_se_r, \end{aligned} \tag{2}$$

*Science Record, Vol.3., No.1, pp 29-33, Oct.1950

Where an index greater than 7 is replaced by the smallest positive residue mod 7. Therefore, a Cayley number x may be expressed in the form

$$x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i, \qquad x_i \in R.$$

Addition is defined as usual and multiplication is given by the usual distributive laws and the rules(2).

From these relations we see at once that e_0 is the unit element. Moreover, the multiplication is neither associative nor commutative.

The norm $|x|$ of a Cayley number x is defined to be $(\sum_{i=0}^{7} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Let a, b be any two Cayley numbers, it can be verified that

$$|ab| = |a||b|, \qquad |a| + |b| \geq |a + b| \tag{3}$$

As consequences, any element except zero has an inverse and the right and left-hand division, except by zero, is always possible and unique.

The totality of Cayley numbers with a natural topology is an Euclidean space of dimension 8 and the Cayley numbers of norm r form a 7-sphere $S(r)$ of radius r with center at the origin .

A Cayley number $x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i$ has a spherical representation:

$$x_i = r \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_i \cos\theta_{i+1}, \qquad (i = 0, 1, ..., 7) \tag{4}$$

Where $0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 1, ..., 6, 0 \leq \theta_7 \leq 2\pi$ and $\theta_8 = 0$.

Denote by $[a_1, a_2, ...a_k]_{\alpha_1}$ the product of k Cayley numbers $a_1, a_2, ...a_k$with the association α .For example:$\{[(a_1a_2)a_3]a_4\}$,$\{(a_1a_2)(a_3a_4)\}$, $\{(a_1[(a_2)a_3)a_4]\}$ and etc. are the products of a_1, a_2, a_3, a_4 with different associations. Thus the monomial in Cayley numbers of degree k is of the form $[a_{01}...a_{0l_0}xa_{11}...a_{1l_1}...a_{k-1l_{k-1}}xa_{k1}...a_{kl_k}]_\alpha$ where a'_{ij}s are Cayley numbers. A polynomial in Cayley numbers is a sum of a finite number of monomials.

Here we consider such polynomials

$$f(x) = [a_{01}...a_{0l_0}x...xa_{n1}...a_{nl_n}]_\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{p_k} a_i^k[x]_{\alpha_i^k}, \tag{5}$$

having only one term of the highest degree n, where $p_k, k = 0, \cdots, n-1$,, are integers and are monomials of degree k. Without loss of generality , we assume that $a_{ij} (j = 1, \cdots l_i; i = 1, \cdots, n)$ are Cayley numbers of unit norm.

Theorem *(The fundamental theorem of algebra for Cayley numbers) Let $f(x)$ be a polynomial in Cayley numbers with only one term of the highest degree $n > 0$. The equation*

$$f(x) = 0$$

has at least one solution .

Proof.[3] Let r be a positive real numbers satisfying the condition

$$r > \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{p_k} |a_i^k|) \tag{6}$$

Where $|a_i^k|$are the products of the norms of all constant factors in $a_i^k[x]_{\alpha_i^k}$.The function $f(x)$ maps the 7-sphere $S(r)$ of radius r into the Euclidean 8-space E^8 formed by the totality of Cayley numbers. Let

$$g(x) = [a_{01}...a_{0l_0}x...xa_{n1}...a_{nl_n}]_\alpha$$

For any $x \in S(r)$,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} r^k (\sum_{i=1}^{p_k} |a_i^k|) \\ &< r^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{p_k} |a_i^k| \\ &< r^n = |g(x)|. \end{aligned} \tag{7}$$

This shows that the segment $\overline{f(x)g(x)}$ for $x \in S(r)$ is free from the origin 0. There exists a homotopy deformed along the segments $\overline{f(x)g(x)}$ joining the two images of $x \in S(r)$ under f and g in $E^8 - 0$ .Then the orders of 0 with respect to f and g are equal ,i.e.,

$$\mathfrak{b}(f(S(r)), 0) = \mathfrak{b}(g(S(r)), 0).$$

The function g maps the 7-sphere $S(r)$ into the 7-sphere $S(r^n)$. Define a homotopy $g_t : S(r) \longrightarrow S(r^n), 0 \leq t \leq 1$, by

$$g_t(x) = [(a_{01})_t...(a_{0l_0})_t x........(a_{n1})_t...(a_{nl_n})_t]_\alpha, x \in S(r).$$

Where if $a_{ij} \neq \pm 1$,$(a_{ij})_t$ is the point dividing in the radio $(1-t) : t$ the shortest are joining the points 1 and a_{ij} and on the unit 7-sphere $S(1)$; and if $a_{ij} \neq \pm 1, (a_{ij})_t = a_{ij}$ .Evidently,

$$\begin{aligned} g_0(x) = &\quad [a_{01}...a_{0l_0}x.........xa_{n1}........a_{nl_n}]_\alpha = g(x) \\ g_1(x) = &\quad [e_{01}...e_{0l_0}x.........xe_{n1}........e_{nl_n}]_\alpha = e[x...x]_{\alpha'} \end{aligned}$$

Where $e_{ij} = \pm 1 \quad (i = 0, 1, ..., n : j = 1, ..., l_i)$ and $e = \prod e_{ij} = \pm 1$.By means of the spherical representation, it is easily verified that $[x \cdots x]_{\alpha'}$,for whatever association α',is equal to the Cayley number $x^n = \sum_{i=0}^{7} y_i e_i$ with

$$\begin{aligned} y_0 = &\quad r^n \cos n\theta_1, \\ y_i = &\quad r^n \sin n\theta_1 sin\theta_2...sin\theta_i \cos\theta_{i+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Where $i = 1, ..., 7$ and as convention $\theta_8 = 0$. Let $h(x) = x^n$. Then $g_1(x) = eh(x)$and

$$\mathfrak{b}(g(S(r)), 0) = \mathfrak{b}(eh(S(r)), 0).$$

By definition,$\mathfrak{b}(eh(S(r)), 0)$ is equal to the degree $d(eh)$ of the mapping $eh : S(r) \longrightarrow S(r^n)$ which is the composed mapping of $h : S(r) \longrightarrow S(r^n)$ and $e : s(r^n) \longrightarrow S(r^n)$ defined by $e(x) = ex$. It follows immediately from the equations of h and e that $d(h) = n, d(e) = 1$ and then $d(eh) = n$. Therefore

$$\mathfrak{b}(f(S(r)), 0) = n \neq 0. \tag{9}$$

According to the Dronecker existence theorem, there is a point p of the solid sphere V^8 of radius r with $S(r)$ as boundary such that $f(p) = 0$.

This completes the proof.

Corollary *The norms of the roots of $f(x) = 0$ are less than any number r given by* (6).

This is a consequence of (7).

References

[1] Eilenberg, S. and Niven,L.,1944, The " fundamental theorem of algebra " for quaternions. Bull.Amer.Math.Soc.,50,246-248.

[2] Cf. for example, Dickson, L. E., Linear Algebras. Cambridge Tracts, London, or Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Band III, Geometrie, I Teile,2 Hälfte,pp.1417-1419.

[3] For topological terms, see Alexandroff-Hopf, Topologie I (1935), Kapitel 12.

球上线素的流形的上同调环 *

江泽涵　　周毓麟　　贺锡章

用 M 和 M' 分别表示 n 维球上的有向线素和无向线素的流形. 本文的结果是求出了 M 和 M' 的上同调环, 特别是它们的以整数为系数的上同调环 (定理 1,3). 据我们所能知道的文献来说, M' 的上同调环的全部结果和 M 的上同调环的部分结果是新的. M 的同调群见 Stiefel[1] , M 和 M' 的同调群见江泽涵 [2] , M 的上同调环的部分结果见 Gysin[3; §16] 和 Miller[4, 页 99-101,112-103] .

我们所用的工具主要的是胞腔剖分和球极赤道平面射影. 因为 M' 有挠系数 2 和 4 , 它的整上同调环的计算因而颇占篇幅 (§§9-13) . 由于讨论的对象只限于球上的线素, 故简单的工具也足够求出关于上同调环的完全结果.

§1　流形的上同调环

1.M 的表示　$n(>1)$ 维球上有向线素的空间 M , 是指 n 维球的全体单位切矢所作成的, 具有自然拓扑结构的空间. 用 R^{n+1} 表示 $n+1$ 维的欧几里得空间, 其中的点 (x) 以 $(x_0, x_1, ..., x_n)$ 为直角坐标. n 维球可以用 R^{n+1} 中的单位球 $S^n: x'x = x_0^2+x_1^n+\cdots+x_n^2 = 1$ 表示; 这里的 x 表示点 (x) 的坐标所作成的一直列的矩阵, x' 表示 x 的转置矩阵. 设 $y' = (y_0, y_1, ..., y_n)$ 是以点 (x) 为起点的一个单位切矢 (y) 的方向余弦. 故 M 的一个元素可以用 $(x; y)$ 表示, M 可以看作是 $2n+2$ 维的欧几里得空间 R^{2n+2} 的一个子空间, 由下列方程定义的:

$$M:\ x'x = 1,\ x'y = 0,\ y'y = 1.$$

M 显然是一个 $2n-1$ 维的闭流形.

2.M 的胞腔剖分　用 a_0 表示球 S^n 的北极 $(1, 0, ..., 0)$, Π^n 表示 R^{n+1} 中的超平面 $x_0 = 0$. 以 a_0 为摄影中心的, 球极赤道平面射影 f 把 $S^n - a_0$ 拓扑地变换成 Π^n .

设 Π^n 中的点 (ξ) 的直角坐标 $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ 即 R^{n+1} 中的 $(x_0, x_1, ..., x_n)$, 而且 Π^n 中的单位矢的的方向余弦用 $\eta' = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ 表示. 设 $\xi = f(x)$, 而且设 S^n 上任一有向弧素以 (x) 为起点, 在点 (x) 处的单位切矢是 (y) . f 把这有向弧素变成 Π^n 中的一个有向弧素, 以 (ξ) 为起点, 在 (ξ) 处具有一个确定的单位切矢, 设是 (η) . 此后, 我们把 f 看作是变换 $(x; y)$ 成 $(\xi; \eta)$. 全体 $\xi; \eta$ 所作成的, 具有自然拓扑结构的空间就是 Π^n 和

*北京大学学报, 1956 年, 第二期, 111-128

$n-1$ 维球 $\Sigma^{n-1}: \eta_1^2+\eta_2^2+...+\eta_n^2=1$ 的拓扑积．容易看出 f 的方程是

$$f: \quad \xi_i=\frac{x_i}{1-x_0},\ \eta_i=y_i+\frac{x_i y_0}{1-x_0}, i=1,2,...,n;$$

而且 f 拓扑地变换 $M-\{(\alpha_0;y)\}$ 成 $\{(\xi;\eta)\}=\Pi^n\times\Sigma^{n-1}$ ．

用 η^0 表示 Π^n 中的任一个单位常矢．考虑 M 的下列四个子空间：

$$\begin{aligned}
c^{2n-1} &= \{(x;y)\}=M,\\
c^{n} &= \{(x;y)|x\in S^n-a_0, f(x;y)=(f(x);\eta^0); \text{或} x=a_0\},\\
c^{n-1} &= \{(a_0;y)\},\\
c^{0} &= (a_0;\eta^0);
\end{aligned}$$

c^0 中的 η^0 看作是 R^{n+1} 中的一个单位矢．他们都是闭的可剖分空间．容易看出，$c^{2n-1}-c^n, c^n-c^{n-1}, c^{n-1}-c^0$ 分别和 $2n-1, n$ 维， $n-1$ 维的欧几里得空间同胚，即开胞腔．根据 Ehresmann [5; 页 411-415],M 的同调群也可用 $c^k, k=0,n-1,n\ \ 2n-1$ ，来计算．因而我们说： c^k 是广义胞腔，作成 M 的一个胞腔剖分的一组基底胞腔，由 α_0 和 η^0 决定的．

3.M 的同调群　我们限于 $n>1$ ．在 $n=2$ 时 M 是三维射影空间．在 $n>2$ 时只需要求出关联系数 $[c^n:c^{n-1}]$ ．

考虑 c^n ．设所取的 η^0 的方向余弦是 $(0,...,0,1)$ ．因而 c^n 的方程是

$$\begin{aligned}
U: &\quad x_0\neq 1, \quad x'x=1,\\
&\quad y_0=x_n, \quad y_i=\frac{x_i x_n}{x_0-1}, \quad i=1,2,...,n-1, \quad y_n=\frac{x_n^2}{x_0-1}+1;\\
c^{n-1}: &\,x_0=1, \quad x'x=1, \quad y_0=0, \quad y'y=1.
\end{aligned}$$

因为关于 x 和 y 的对称性， c^n 又可分为下列两部分：

$$\begin{aligned}
\bar{U}: &\quad y_n\neq 1, \quad y'y=1,\\
&\quad x_n=y_0, \quad x_i=\frac{y_i y_0}{y_n-1}, \quad i=1,2,...,n-1, \quad x_0=\frac{y_0^2}{y_n-1}+1;\\
\bar{c}^{n-1}: &\,y_n=1, \quad y'y=1, \quad x_n=0, \quad x'x=1.
\end{aligned}$$

U 和 $\bar{U}$ 都是开胞腔，它们的局部坐标 $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ 和 $(\bar{\xi}_1,\bar{\xi}_2,...,\bar{\xi}_n)$ 可以分别用球 $x'x=1$ 和 $y'y=1$ 的球极赤道平面射影

$$\begin{aligned}
f: &\quad \xi_i=\frac{x_i}{1-x_0}, \quad i=1,2,...,n,\\
g: &\quad \bar{\xi}_j=\frac{y_j}{1-y_n}, \quad j=1,2,...,n-1, \quad \bar{\xi}_n=\frac{y_0}{1-y_n}
\end{aligned}$$

定义．现在 $c^n-(U+\bar{U})=c^0(x_0=y_n=1)$ ．因而，一方面， c^n 能否定向，按照 $U+\bar{U}$ 能否定向 [6]；另一方面， c^n 是假流形 [7;§24]．从在 U 和 $\bar{U}$ 的交集中 x 和 y 间的关系，

得局部坐标间的下列关系

$$\bar{\xi}_i = \frac{-\xi_i}{\xi_n}, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \quad \bar{\xi}_n = \frac{1}{\xi_n}.$$

局部坐标变换的函数行列式是

$$J = (-1)^n \frac{1}{\xi_n^{n+1}}.$$

故 $U + \bar{U}$ 能否定向，即 c^n 能否定向，按照 J 在交集中保持或改变正负号 [6]，即 n 是奇数或偶数．因为 c^n 是假流形，故在适当地选取定向后 [7;§24]

$$[c^n : c^{n-1}] = \begin{cases} 0, \text{当 n 是奇数}, \\ 2, \text{当 n 是偶数}. \end{cases}$$

用 G_0 表示整数的无穷循环群， G_2 表示整数模 2 的二阶循环群．从关联关系，证得

引理 1． $2n-1$ $(n > 1)$ 维的流形 M 是能定向的．它的非零的整同调群如下：偶数 n 时， $H_0(M)$ 和 $H_{2n-1}(M) \approx G_0, H_{n-1}(M) \approx G_2$ ，：奇数 n 时， $H_r(M) \approx G_0, r = 0, n-1, n, 2n-1$ ．

M 的非零的整上同调群因而如下：偶数 n 时，$H^0(M)$ 和 $H^{2n-1}(M) \approx G_0, H^n(M) \approx G_2$ ；奇数 n 时， $H^r(M) \approx G_0$, $r = 0, n-1, n, 2n-1$ ．

4.M 的上同调环 在 §2 中，一个点 $a_0 \in S^n$ 和 Π^n 中的一个常矢 η^0 决定了 M 的一个胞腔剖分 $\{c^0, c^{n-1}, c^n, c^{2n-1}\}$．同样地，设 p 是 S^n 的任一点，Π_p^n 是 R^{n+1} 中通过原点 O 而垂直于直线 Op 的超平面，而且 η_p 是 Π_p^n 中的任一常矢；p 和 η_p 也决定 M 的一个胞腔剖分 $\{\grave{c}^0, \bar{c}^{n-1}, \grave{c}^n, c^{2n-1}\}$．容易看出，存在着 M 的一个形变，把一个剖分中的胞腔分别变换成另一个中的．这说明了我们可以用这种的任一组的胞腔做胞腔链的基底．

既然 M 是能定向的流形，我们可以从同调类的相交来求上调类的上积．因此，先考虑基底胞腔的相交．只需要讨论 $c^n \circ c^{n-1}$; 其它都是显然的．取上文中的点 $p = \bar{a}_0 = (-1, 0, ..., 0)$ ，矢 $\eta_p = \eta^0$ ．在适当地选取定向后，显然得

$$c^n \circ \bar{c}^{n-1} = \bar{c}^0. \tag{1}$$

取整数环 G_0 为系数环．在 n 是奇数时， c^n 和 $\grave{c}^{n-1}$ 都是闭链． c^i 和 $\bar{c}^i$ 属于同一个同调类，它的对偶的上同调类用 z^{2n-1-i} 表示， $i = 0, n-1, n, 2n-1$ ．故从 (1) 得上积关系 [3,§6]

$$z^{n-1} \smile z^n = z^{2n-1}. \tag{1'}$$

在 n 是偶数时， c^n 不是闭链，因而无 $n-1$ 维的上闭链．从引理 1 中的 $H^n(M) \approx G_2$ ，得 $2z^n = 0$ ．

若取整数模 2 环 G_2 为数环时， c^i 都是模 2 闭链．仍有 (1) 和 $(1')$ ．特别在 $n = 2$ 时， $z^1 \smile z^2 = z^2$ ．

这就证明了下述定理：

定理 1. $2n-1$ $(n>1)$ 维的流形 M 的整上同调环与模 2 上同调环如下：

$$\begin{array}{llll}
\text{(I)} & n=2m+1: & R(M,G_0)=\{z^0,z^{n-1},z^{n-1}z^n\}, & (z^{n-1})^2=(z^n)^2=0. \\
 & n=2m: & R(M,G_0)=\{z^0,z^n,z^{2n-1}\}, & 2z^n=(z^n)^2=(z^{2n-1})^2=0. \\
\text{(II)} & n>2: & R(M,G_2)=\{z^0,z^{n-1},z^n,z^{n-1}z^n\}, & (z^{n-1})^2=(z^n)^2=0. \\
 & n=2: & R(M,G_2)=\{z^0,z^1,(z^1)^2,(z^1)^3\}, & (z^1)^4=0.
\end{array}$$

这里的 m 是自然数，乘积表示上积，z^0 是单位元。现在用第一款为例来说明：这时候有单位元 $1=z^0$，和另两个元 $x=z^{n-1},y=z^n$，具有关系 $x^2=y^2=0$。$R(M,G_0)$ 是下列形式的多项式所作成的交换环：

$$a+bx+cy+dxy,$$

其中的系数是整数。

这定理中的 $R(M,G^2)$ 是 [4] 中定理 5.2 和定理 5.3 的特款。但我们必须注意 [4] 中定理 5.3 的叙述有错误，应参照定理 5.2 改正。

§2 流形 M′ 的模 2 上同调环

5.M′ 的表示和胞腔剖分 n 维球上无向线素的空间 M' 可以看作由叠和流形 M 的每两点 $(x;y)$ 和 $(x;-y)$ 而得到的。用

$$(x;y)\rightleftharpoons(x;-y)$$

表示这叠和，用

$$M':\quad x'x=1,\quad x'y=0,\quad y'y=1,\quad (x;y)\rightleftharpoons(x;-y)$$

表示 M'，用 $(x;\pm y)$ 表示 M' 的点，用 $\pm y(x)$ 表示点 $(x;\pm y)$ 的 $\pm y$。M' 是一个 $2n-1$ 维的闭流形，而 M 是 M' 的两叶的覆叠流形。

同样地叠和 Π^n(见 §2) 中的 (ξ,η) 和 $(\xi,-\eta):(\xi,\eta)\rightleftharpoons(\xi,-\eta)$，得 $(\xi,\pm\eta)$ 故 f 拓扑地变换 $M'-\{(x;\pm y)\}$ 成 $\{(\xi;\pm\eta)\}=\Pi^n\times P^{n-1}$，这里的 P^{n-1} 是 $n-1$ 维的射影空间。

设 τ_i 是 R^{n+1} 中的坐标超平面 $x_i=0,\Pi^k=\tau_0\cap\tau_1\ldots\cap\tau_{n-k}$，而且 $\Pi^k(\xi)$ 是通过 $(\xi)\in\Pi^n$ 而又平行于 Π^k 的 k 维线性空间。考虑

$$\begin{aligned}
c'^k &=\{(a_0;\pm y)|y\parallel\Pi^{k+1}(a_0)\},\\
c'^{n+k}&=\{(x;\pm y)|x\in S^n-a_0,f(\pm y(x))\subset\Pi^{k+1}(f(x));\text{或}\quad x=a_0\},
\end{aligned}$$

$k=0,1,...,n-1$。它们分别是 k 维和 $n+k$ 维的闭的可剖分空间。显然 $c'^k-c'^{k-1}$ 是 k 维开胞腔，$k=1,2,...,2n-1$。如同 §2 在中，c'^k 和 c'^{n+k} 叫做广义胞腔，$k=0,1,...,n-1$，作成 M' 的一个胞腔剖分的一组基底胞腔。

6.M′ 的同调群 我们要证明，在适当地选取定向后，胞腔的关联关系如下：

$$[c'^k : c'^{k-1}] = [c'^{n+k} : c'^{n+k-1}] = \begin{cases} 0, & \text{当}k\text{是奇数}, \\ 2, & \text{当}k\text{是偶数}, \end{cases} \quad k = 1, 2, ..., n-1,$$

$$[c'^k : c'^{k-1}] = \begin{cases} 0, & \text{当}n\text{是奇数}, \\ 4, & \text{当}n\text{是偶数}, \end{cases}$$

关联数 $[c'^k : c'^{k-1}]$ 是显然的.

考虑 $c'^{n+k}, k \geqq 1$. 它的下列两个子集

$U_i = \{(x; \pm y) | x \in S^n - a_0, f(\pm y(x)) \subset \Pi^{k+1}(f(x)), f(\pm y(x)) \not\subset \tau_{n-i}(f(x))\}, i = 0, 1,$ 都是 $n+k$ 维的开胞腔，而且 $c'^{n+k} - (U_0 + U_1)$ 的维数是 $n+k-2$. 故一方面，c'^{n+k} 能否定向按照 $U_0 + U_1$ 能否定向 [6]; 另一方面，它是假流形. 再者，$U_0 + U_1 \subset c'^{n+k} - c'^{n-1} \subset c'^{n+k}$, 因而 c'^{n+k} 能否定向按照 $c'^{n+k} - c'^{n-1}$ 能否定向；而后者是一个 n 维开胞腔和一个 k 维射影空间的拓扑积. 故假流形 c'^{n+k} 能否定向按照 k 是奇数或偶数；然后 [7,§20] 得到关联数 $[c'^{n+k} : c'^{n+k-1}]$.

现在要利用 M 来计算 M' 上的关联数 $[c'^n : c'^{n-1}]$. 实际上,

$$\begin{aligned} c'^{n-1} &= \{(a_0; \pm y)\}, \\ c'^n &= \{(x; \pm y) | x \in S^n - a_0, f(\pm y(x)) \parallel x_n\text{轴}; \text{或}x = a_0\}. \end{aligned}$$

设 (η^0) 是正 x_n 轴的单位矢. 考虑流形 M 上的

$$\begin{aligned} c^{n-1} &= \{(a_0; \pm y)\}, \\ c^n &= \{(x; y) | x \in S^n - a_0, f(x; y) = (f(x); \eta^0); \text{或}x = a_0\}, \\ \bar{c}^n &= \{(x; y) | x \in S^n - a_0, f(x; y) = (f(x); -\eta^0); \text{或}x = a_0\}. \end{aligned}$$

这里的 c^{n-1} 是一个 $n-1$ 维球，而且 $c^n \cap \bar{c}^n = c^{n-1}$. 在叠合 $(x; y) \rightleftharpoons (x; -y)$ 下，c^{n-1} 变成 c'^{n-1} ，而 c^n 和 $\bar{c}^n$ 变成 c'^n . 可以假设 $c^n + \bar{c}^n$ 有一个单纯剖分，在叠合下，$c^n - c^{n-1}$ 的一个 n 维单纯形和 $\bar{c}^n - c^{n-1}$ 的相应的一个叠和成 $c'^n - c'^{n-1}$ 的一个 n 维单纯形，而 c^{n-1} 的两个对径的 $n-1$ 维单纯形叠和成 c'^{n-1} 的一个 $n-1$ 维单纯形. 在球 c^{n-1} 上设 $b^{n-1} = (b_0 b_1 \cdots b_{n-1})$ 是任一个 $n-1$ 维单纯形. 而且 $\bar{b}^{n-1} = (\bar{b}_0 \bar{b}_1 \cdots \bar{b}_{n-1})$ ，其中 $\bar{b}^i$ 是 b_i 的对径点. b^{n-1} 或 $-\bar{b}^{n-1}$ 的定向和 b^{n-1} 的定向在 c^{n-1} 上协和，按照 $n-1$ 是偶数或奇数. 因此，在适当地选取定向后,

$$[c'^n : c'^{n-1}] = \begin{cases} 0 \cdot [c^n : c^{n-1}], & \text{当}n\text{是奇数}, \\ 2 \cdot [c^n : c^{n-1}], & \text{当}n\text{是偶数}. \end{cases}$$

这就证明了最后一个关联关系.

从关联关系，证得

引理 2. $2n-1(n>1)$ 维的流形 M' 是否能定向，按照 n 是偶数或奇数. 它的非零的整同调群如下：偶数 n 时，$H_0(M')$ 和 $H_{2n-1}(M') \approx G_0$ ，$H_{n-1}(M') \approx G_4$ ，$H_r(M')$

和 $H_{n+r}(M')\approx G_2, r=1,3,...,n-3$；奇数 n 时， $H_0(M')$ 和 $H_n(M')\approx G_0$， $H_r(M')$ 和 $H_{n+r}(M')\approx G_2, r=1,3,...,n-2$．

M' 的非零的整上同调群因而由下：偶数 n 时， $H^0(M')$ 和 $H^{2n-1}(M')\approx G_0$， $H^n(M')\approx G_4$， $H^r(M')$ 和 $H^{n+r}(M')\approx G_2, r=2,4,...,n-2$；奇数 n 时， $H^0(M')$ 和 $H^n(M')\approx G_0$， $H^r(M')$ 和 $H^{n+r}(M')\approx G_2, r=2,4,...,n-1$．

7. M′ 上的胞腔点集的相交　§5 中的胞腔剖分是由一个点 $a_0\in S^n$ 和 Π^n 中的 Π^k 决定的．对于任意两个这种剖分，存在着 M' 的一个形变，把一个剖分中的一个胞腔另一个中的同维的胞腔．

我们求一些胞腔点集的相交．这里所谓胞腔点集的相交，是指把胞腔看作点集时的交集．首先考虑下列两个胞腔：

$$\begin{aligned} c'^{2n-1-k} &= \{(x;\pm y)|x\in S^n-a_0, f(\pm y(x))\subset \Pi^{n-k}(f(x)); 或x=a_0\},\\ c'^{k}_{1} &= \{(\bar a_0;\pm y)|f(\pm y(\bar a_0))\subset \tau_1^{k+1}(0)\}; \end{aligned}$$

这里的 $k=0,1,...,n-1, \bar a_0$ 是 a_0 的对径点，而且 τ_1^{k+1} 是 Π^n 的 $k+1$ 维的线性子空间，使得 $\tau_1^{k+1}\cap\Pi^{n-k}=\Pi^1$．这两个胞腔有一个交点（交点的简单性见本节附记；下同.），是使得 $f(\pm y(\bar a_0))\subset\Pi^1$ 的点 $(\bar a_0;\pm y)$，用 c'^{0}_{1} 表示．因此得到胞腔点集的相交关系：

$$c'^{2n-1-k}\circ c'^{k}_{1}=c'^{0}_{1},\quad k=0,1,...,n-1. \tag{2}$$

其次考虑

$$\begin{aligned} c'^{2n-1-r} &= \{(x;\pm y)|x\in S^n-a_0, f(\pm y(x))\subset \Pi^{n-r}(f(x)); 或x=a_0\},\\ c'^{s}_{2} &= \{(\bar a_0;\pm y)|f(\pm y(\bar a_0))\subset \tau_2^{s+1}\},\\ c'^{2n-1-(s-r)} &= \{(x;\pm y)|x\in S^n-a_0, f(\pm y(x))\subset \tau_2^{n-(s-r)}(f(x)); 或x=a_0\}, \end{aligned}$$

这里的 $n-1\geqq s\geqq r$，而且 τ_2^{s+1} 和 $\tau_2^{n-(s-r)}$ 都是 Π^n 中的通过原点的线性子空间，使得 $\tau_2^{s+1}\cap\tau_2^{n-(s-r)}\cap\Pi^{n-r}$ 是一条直线．有一个交点 $(\bar a_0;\pm y)$ 使得， $f(\pm y(\bar a_0))$ 平行于这条直线，用 c'^{0}_{2} 表示．因此得到胞腔点集的相交关系：

$$c'^{2n-1-r}\circ c'^{r}_{2}\circ c'^{n-1-(s-r)}_{2}=c'^{0}_{2},\quad r\leqq s\leqq n-1. \tag{3}$$

同样地可得

$$c'^{2n-1-r}\circ c'^{2n-1-s}_{3}\circ c'^{r+s}_{3}=c'_{3},\quad r+s\leqq n-1. \tag{4}$$

最后考虑

$$\begin{aligned} c'^{2n-2} &= \{(x;\pm y)|x\in S^n-a_0, f(\pm y(x))\subset \tau_0\cap\tau_1(f(x)); 或x=a_0\},\\ c'^{n}_{4} &= \{(x;\pm y)|x\in S^n-a_1, f_1(\pm y(x))\subset \tau_0\cap\tau_1\cap\tau_3\cap...\tau_n(f_1(x)); 或x=a_1\},\\ c'^{n}_{5} &= \{(x;\pm y)|x\in S^n-a_2, f_2(\pm y(x))\subset \tau^*\cap\tau_2\cap\tau_3\cap...\tau_n(f_2(x)); 或x=a_2\}; \end{aligned}$$

这里的 a_i 是 S^n 和正 x_i 轴的交点，$i=1,2,\tau^*$ 是超平面 $x_0+x_1=0$，而且 f_i 是以 a_i 为中心的球极赤道平面射影. 用这三个胞腔的方程直接计算，知道这三个胞腔点集有下列四个交点：

$$c'^0_4=(p_1;\pm\omega_1),\quad c'^0_5=(p_2;\pm\omega_1),\quad c'^0_6=(p_3;\pm\omega_2)\quad c'^0_7=(p_4;\pm\omega_2)$$

这里的

$$\begin{aligned}
&p_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,...,0\right),p_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,...,0\right),\\
&p_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0,...,0\right),\ p_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,...,0\right),\\
&\omega_1=(0,0,1,0,...,0),\qquad \omega_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,...,0\right),
\end{aligned}$$

ω_1 平行于直线 $\tau_0\cap\tau_1\cap\tau_3\cap...\cap\tau_n$，而 ω_2 平行于直线 $\tau^*\cap\tau_2\cap\tau_3\cap...\cap\tau_n$. 因而有胞腔点集的相交关系：

$$c'^{2n-2}\circ c'^n_4\circ c'^n_5=c'^0_4+c'^0_5+c'^0_6+c'^0_7. \tag{5}$$

附记 我们用 (5) 为例，来说明 (2) 至 (5) 中的交点都是简单的交点. (5) 中的三个胞腔 (在 M' 上) 可以看作是经过叠合 $(x;y)\rightleftharpoons(x;-y)$ 分别由 M 上的 c^{2n-2},c^n_4,c^n_5 得来的，后者的方程如下：

$$\begin{aligned}
&x'x=1,\quad x'y=0,\quad y'y=1,\\
&(1-x_0)y_1+x_1y_0=0,\quad (1-x_2)(y_0+y_1)+(x_0+x_1)y_2=0,\\
&(1-x_1)y_i+x_iy_1=0,\quad i=0,3,4,...,n,\\
&(1-x_2)y_j+x_jy_2=0,\quad j=3,4,...,n.
\end{aligned}$$

这 $2n+2$ 个方程表出 R^{2n+2} 中 $2n+2$ 个二阶曲面. 他们有八个交点，成对的以 $(x;y)$ 和 $(x;-y)$ 的形式出现，恰叠合成 $c'^0_k,k=4,5,6,7$. 很容易用直接计算验证，表出这些二阶曲面的函数的函数行列式在这八个交点处都不等于零. 故这些交点是这些曲面的简单交点. 因为这些曲面是 M 在 R^{2n+2} 中的拓扑像，故这些交点是 M 上的胞腔点集 c^{2n-2},c^n_4,c^n_5 的简单交点；又因为 M 是 M' 的两叶的覆叠流形，故 c'^0_k 是 M' 上的胞腔点集 c'^{2n-2},c'^n_4,c'^n_5 的简单交集.

8. M′ 的模 2 上同调环 用 G_2 为系数时，§5 中所有的 c'^k 和 c'^{n+k} 都是闭链. 根据 §7 开始时所说的，(2) 至 (5) 中的同维的闭链都属于同一同调类，而且根据引理 2，任一维数模 2 同调群都是二阶循环群；因而在 G_2 时 (2) 至 (5) 分别给出：

$$\begin{aligned}
&c'^{2n-1-k}\circ c'^k\sim c'^0,\\
&c'^{2n-1-r}\circ c'^s\circ c'^{2n-1-(s-r)}\sim c'^0,\quad r\leqq s\leqq n-1,\\
&c'^{2n-1-r}\circ c'^{2n-1-s}\circ c'^{r+s}\sim c'^0,\quad r+s\leqq n-1,\\
&c'^{2n-2}\circ c'^n\circ c'^n\sim 0
\end{aligned}$$