普通高等教育“十二五”规划教材
武汉大学数学教学丛书

丛书主编　陈　化　副主编　樊启斌

高等数学
全程同步导引

（上册）

湛少锋　编著

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材
武汉大学数学教学丛书
丛书主编　陈化　副主编　樊启斌

高等数学全程同步导引

上　册

湛少锋　编著

科学出版社
北　京

内容简介

本套书为《高等数学》辅助教材，分为上、下两册，依据教育部颁发的《关于高等学校微积分课程的基本要求》，遵循工科硕士研究生入学考试大纲和全国大学生高等数学竞赛大纲，编写章节顺序与武汉大学数学与统计学院齐民友主编的《高等数学》(以下简称教材)一致. 按章节成书，每节分两个板块：内容概要、典型例题选讲. 每章加设两板块：学习要求；考研真题与竞赛真题解析. 本书(上册)从教材习题、多本《高等数学》辅导教材例题、高等数学习题集、数学分析习题集、历年研究生入学高等数学试题、国内外大学生高等数学竞赛试题中选择了近562道题进行了归类解析.

本套书(上、下两册)选题广泛，是所有正在学习或已经学习过《高等数学》课程、正准备参加非数学类研究生入学考试以及全国大学生数学竞赛的非数学类学生学习参考书，旨在使广大读者更好地把握《高等数学》的思想方法和知识内涵；增进数学思维和数学算理；有效地提高《高等数学》课程的学习效率. 也是高等学校《高等数学》课程教师的教学参考书，为广大教师提高课堂教学质量提供有效的教学素材. 力求使每位读者都能开卷有益.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程同步导引. 上册/湛少峰编著. —北京：科学出版社，2012. 11

(武汉大学数学教学丛书/陈化主编)

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-035832-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①湛… Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第249135号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉 黄彩霞

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2012年12月第 一 版 印张：21 3/4

2012年12月第一次印刷 字数：500 000

定价：38.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

编者在武汉大学教学一线教授高等数学三十余年，教授过各种层次学生，特别是在武汉大学弘毅课堂、研究生入学考试辅导、全国大学生数学竞赛辅导的教学活动中，面对不同的学习人群，总希望能做一件对所有学习人群都有所帮助的工作，正巧科学出版社给了我这样一次机会，从而就有了这本《高等数学全程同步导引》的辅导教材. 本书结合高等数学课程性质与特点，以及不同学习者的需求，组织了不同层次的知识素材，学习者可根据不同时期加以选取学习. 本辅导教材的基准教材是武汉大学数学与统计学院齐民友主编，湛少锋、胡新启、桂晓风、黄明、杨丽华老师编写的《高等数学》.

本辅导教材例题配备除基本思想方法、基本概念、基本理论和基本运算技能的体现外，各章节内容又有所深化与提高，意在与弘毅班教学、研究生考试、数学竞赛相衔接. 所以本辅导教材既可作为《高等数学(微积分)》课程的习题课教材、高等学校师生《高等数学(微积分)》课程的教学参考书，也可作为准备报考非数学类硕士研究生学生以及有意参加全国高等数学竞赛学生的复习用书.

本辅导教材的编写章节顺序与基准教材一致. 按章节成书，每节分两个板块：内容概要、典型例题选讲. 每章加设两板块：学习要求；考研真题与竞赛真题解析. 板块的设计与内容的选取若能为不同的学习群体带来有益的帮助，达到预期的效果那就是编者最大的心愿. 本书分上、下册.

本书的编写自始至终得到科学出版社和武汉大学数学与统计学院的大力支持，武汉大学数学与统计学院樊启斌教授对本书的编写

给予了很大的帮助.另外,本书在编写中参阅大量高等数学教材、辅导教材和研究生考试复习应试教材,这里恕不一一指明出处和作者,在此,编者一并深表感谢.

限于编者水平,加之时间紧迫,书中难免有不妥之处,敬请广大读者和各位同仁批评指正,使本书在教学实践中不断完善起来.

编 者

2012年7月25日于珞珈山

目　　录

第一章　极限与连续

学习要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念.

3. 了解反函数、复合函数的概念,会分析复合函数的复合结构.

4. 会建立简单实际问题的函数模型.

5. 了解极限的描述性定义.

6. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系和性质.

7. 会用两个重要极限公式求极限.

8. 掌握极限的四则运算法则.

9. 理解函数在一点连续的概念,知道间断点的分类.

10. 了解初等函数的连续性及连续函数在闭区间上的性质(最大值和最小值定理、根的存在定理、介值定理).

11. 会用函数的连续性求极限.

重点　极限的求法,两个重要极限,函数在一点连续的概念;函数的概念、复合函数和初等函数的概念,会求函数的定义域.

难点　分段函数的概念,建立简单实际问题的函数模型;间断点的分类,分段函数在分段点的连续性.

*　*　*　*　*　*

第一节　预备知识

一、内容概要

1. 数集的界

定义 1　对非空数集 $D\subset R$,若 $\exists M\in R$,使得 $\forall x\in D$,有 $x\leqslant M$,则称数集 D 是有上界的,称 M 为 D 的一个上界;若 $\exists m\in R$,使得 $\forall x\in D$,有 $x\geqslant m$,则称数集 D 是有下界的,称 m 为 D 的一个下界;若数集 D 既有上界又有下界,则称 D 是有界的.

定义 2　设非空集合 $D\subset R$,若存在 $\beta\in R$,满足:

(1) $\forall x\in D$,有 $x\leqslant\beta$;

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists x_\varepsilon\in D$,使得 $x_\varepsilon>\beta-\varepsilon$.

则称 β 为数集 D 的上确界，记为 $\beta = \sup D$

同理可以定义数集 D 的下确界 α，记为 $\alpha = \inf D$.

确界存在公理 若非空数集 D 有上(下)界，则 D 必存在上(下)确界.

2. 函数的概念

定义 3 设 D 与 B 是两个非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对 D 中任何一个实数 x，在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则对应规则 f 称为在 D 上的函数，记为

$$f: x \to y \quad 或 \quad f: D \to B$$

y 称为 x 对应的函数值，记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量.

函数的定义域和对应规则为函数的两个要素.

函数的 3 种表示方法是：图像法、表格法、公式法.

用公式法表示函数常有以下几种类型：

(1) 分段函数：函数的对应规律，在两个或两个以上的数集上，不同的部分需要不同的解析式表示其对应规律，这种函数关系，称为分段函数.

(2) 用参数方程确定的函数：用参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t \in I)$ 表示的变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数.

(3) 隐函数：设有两个变量 x, y 构成的方程 $F(x, y)=0$；如果存在一函数 $f(x)$，$x\in D(f)$，且满足 $F(x, f(x))=0$，则称方程 $F(x, y)=0$ 定义了 y 为 x 的隐函数(如果在方程 $F(x, y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x, y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数).

(4) 复合函数：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in D(f)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$，且 $\varphi(D)\subseteq D(f)$，则称 y 是 x 的复合函数，记为

$$y = f(\varphi(x)), \quad x \in D(\varphi)$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为中间变量.

(5) 反函数：对于函数 $y=f(x)$，如果每一个 $y\in f(D)$，都可以通过 $y=f(x)$ 唯一确定一个 $x\in D(f)$，这样得到的以 y 为自变量，x 为因变量的函数关系记为

$$x = f^{-1}(y)$$

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，即反函数记为

$$y = f^{-1}(x), \quad 且 \quad f[f^{-1}(x)] = x$$

函数 $y = f(x)$ 与其反函数的图像关于直线 $y = x$ 对称.

基本初等函数：通常把常数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数、双曲函数、反双曲函数等函数称为基本初等函数.

初等函数：由基本初等函数和常数经过有限次四则运算与有限次复合，且能用一个分析式表示的函数，称为初等函数.

3. 函数的特性

单调性 设函数 f 定义域为 D，区间 $I \subset D$. 若 $\forall x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2),$$

则称 f 在区间 I 上是**单调增加**. 若上式改为 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 在 I 上**严格单调增加**.

又若对 $\forall x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

则称 f 在区间 I 上是**单调减少**. 若上式改为 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 f 在 I 上**严格单调减少**.

有界性 如果存在常数 M，使得 $|f(x)| \leqslant M$，$\forall x \in X$，则称 f 在 X 上有界.

奇偶性 设函数 f 的定义域 D 关于原点对称(即当 $x \in D$ 时必有 $-x \in D$).

若 $f(-x) = -f(x)$，$\forall x \in D$，则称 f 为**奇函数**

若 $f(-x) = f(x)$，$\forall x \in D$，则称 f 为**偶函数**

周期性 设函数 f 定义域为 D. 如果存在不为零的实数 T，使得对每个 $x \in D$，总有 $x \pm T \in D$ 且总有 $f(x+T) = f(x)$，则称 f 是**周期函数**，T 为 f 的一个周期.

几种常用的重要函数：

(1) 取整函数：$y = [x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

(2) 狄利克雷(Dirichlet)函数： $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$

(3) 符号函数： $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

(4) 双曲正弦： $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(5) 双曲余弦： $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(6) 双曲正切： $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(7) 反双曲正弦： $y = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(8) 反双曲余弦： $y = \operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

(9) 反双曲正切： $y = \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

二、典型例题选讲

例 1 判断下列各对函数是否相同.

(1) $f(x) = (\sqrt{x-1})^2$，$g(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

(2) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 - 1})$，$g(x) = -\lg(x - \sqrt{x^2 - 1})$

解　确定函数的要素是其定义域和对应法则，因此，要判断两个函数是否相同，只要比较它们的定义域和对应法则.

(1) $f(x)$的定义域是$[1, +\infty)$，$g(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，两者不相同，故$f(x)$与$g(x)$不相同.

(2) $f(x)$与$g(x)$的定义域都是$[1, +\infty)$，且由

$$g(x)=\lg\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lg\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$$

可知$f(x)$与$g(x)$的对应法则也相同，故$f(x)$与$g(x)$表示同一个函数.

例 2　设函数$f(x)$的定义域为$(0, 1)$，又$[x]$表示不超过x的最大整数，试求函数$y=f\left(\frac{[x]}{x}\right)$的定义域.

解　因为$[x]$是取整函数，故$0<\frac{[x]}{x}<1$. 又$x=[x]+\gamma\ (\gamma\geqslant 0)$，即$\frac{[x]}{x}+\frac{\gamma}{x}=1$，故对于一切$x>0$，$x\neq k$ (k为正整数). 都有$0<\frac{[x]}{x}<1$. 所以$f\left(\frac{[x]}{x}\right)$的定义域为$x>0$，$x\neq k$ (k为正整数).

例 3　讨论下列函数的定义域、值域、奇偶性、周期性和有界性.

(1) $y=\tan|x|$　　　　(2) $y=|\sin x|+|\cos x|$

解　(1) **方法 1**　函数的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z^+$，值域为R，又

$$\tan|-x|=\tan|x|$$

所以函数$y=\tan|x|$是偶函数，函数$y=\tan|x|$不是周期函数.

用反证法证明：假设函数$y=\tan|x|$是周期函数，则存在周期$T>0$，对任意x，有

$$\tan|T+x|=\tan|x|$$

当$x\geqslant 0$时，有$\tan(T+x)=\tan x$，故有$\frac{\tan T+\tan x}{1-\tan T\tan x}=\tan x$，即

$$\tan T+\tan x=\tan x-\tan T\tan^2 x$$

所以有$\tan T(1+\tan^2 x)=0$，故有$\tan T=0$，即$T=n\pi$ (n为正整数). 当$x=-\frac{\pi}{4}$时，

$$\tan\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4},\quad 即\quad -\tan\frac{\pi}{4}=\tan\frac{\pi}{4}$$

故$-1=1$，矛盾，所以函数$y=\tan|x|$不是周期函数，且函数$y=\tan|x|$无界.

方法 2　设函数$y=\tan|x|$是周期函数，基本周期为T，定义域为

$$D=\left\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$$

当 $x=0$ 时，$\tan|T|=0$，那么 $T=k\pi$，$k\in Z^{+}$，但当 $x=-\dfrac{\pi}{4}$ 时，

$$\tan\left|-\frac{\pi}{4}+k\pi\right|=\tan\left|\frac{3\pi}{4}+(k-1)\pi\right|=\tan\frac{3\pi}{4}\neq\tan\left|-\frac{\pi}{4}\right|$$

所以 $T=k\pi$ 不是周期，y 不可能是周期函数. 由

$$y=\tan|x|=\begin{cases}\tan x, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ x\geqslant 0\\ -\tan x, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ x<0\end{cases}\quad k\in Z$$

知 $y=\tan|x|$ 是偶函数，且函数 $y=\tan|x|$ 无界.

(2) 函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的定义域为 R，值域为 $[1,\sqrt{2}]$，是偶函数，设 $T\neq 0$，且有

$$|\sin(T+x)|+|\cos(T+x)|=|\sin x|+|\cos x|$$

及

$$2|\sin(T+x)|\,|\cos(T+x)|=2|\sin x|\,|\cos x|$$

故有 $|\sin 2(T+x)|=|\sin 2x|$，从而有 $\sin^2 2(T+x)=\sin^2 2x$. 又

$$\sin^2 2(T+x)=\frac{1-\cos 4(T+x)}{2}=\frac{1-\cos 4x}{2}=|\sin^2 2x|$$

所以有 $\cos 4(T+x)=\cos 4x$，故有 $4T=2\pi$，即 $T=\dfrac{\pi}{2}$.

因此函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，$y=|\sin x|+|\cos x|$ 是有界函数.

例 4　设 $f(x)=\ln x$，$g(x)$ 的反函数 $g^{-1}(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$，求 $f(g(x))$.

解　由 $y=g^{-1}(x)=\dfrac{2x+2}{x-1}$，则有 $xy-y=2x+2$，即 $x=\dfrac{y+2}{y-2}$. 互换 x，y 位置，得 $g(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$，所以

$$f[g(x)]=\ln g(x)=\ln\frac{x+2}{x-2}$$

例 5　讨论函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ 的奇偶性.

解　由

$$f(-x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1},\quad f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}+\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$$

$$=\frac{[(x^2+1)-(x+1)^2]+[(x^2+1)-(x^2-1)^2]}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2-x^2}=0$$

从而 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

例 6　设函数 $f(x)$为偶函数，$g(x)$为奇函数，且 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，求 $f(x)$ 及$g(x)$.

解　由 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，而 $f(-x)+g(-x)=\dfrac{1}{-x-1}$，故有 $f(x)-g(x)=\dfrac{-1}{x+1}$. 从而得

$$2f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}，\quad 故\quad f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

因此得到

$$2g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}，\quad 故\quad g(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

例 7　设对一切实数 x，有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，$f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$，证明：$f(x)$ 是周期函数.

证　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+1)=f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right]^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(x)\right)^2}\quad\left(由\ f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$$

故 $f(x)$是周期函数.

例 8　函数 $f_1(x)=\sin^2x$，$f_2(x)=\sin x^2$，$f_3(x)=[x]$ 与 $f_4(x)=x-[x]$ 是否为周期函数？若是周期函数指出其周期，若不是说明理由（其中$[x]$是不超过 x 的最大整数）.

解　(1) 由 $f_1(x)=\sin^2x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，且

$$f_1(\pi+x)=\sin^2(\pi+x)=\frac{1-\cos 2(\pi+x)}{2}$$

$$=\frac{1-\cos(2\pi+2x)}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}=f_1(x)$$

故 $f_1(x)$是以 π 为周期的周期函数.

(2) $f_2(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

方法 1 若是周期函数,设 T 为其周期,则有 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$. 即

$$\sin(x^2+2xT+T^2)=\sin x^2$$

但这仅在 $T=0$ 时成立,所以 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

方法 2 考虑 $\sin x^2=0$,即函数 $f(x)$ 的零点分布:由 $f(x)=0$,则 $x^2=k\pi$, $x=\sqrt{k\pi}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$. 而由

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}}$$

其随着 k 的增大而变小,即函数 $\sin x^2$ 的零点随 k 增大越来越密,对周期函数来说这是不可能的,因为周期函数的零点分布也是以周期形式出现的. 所以 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

方法 3 若 $f(x)=\sin x^2$ 是周期函数,则设其周期为 $T>0$,由周期函数的定义知, $\forall x\in(-\infty, +\infty)$, 有

$$f(x+T)=\sin(x+T)^2=\sin x^2=f(x)$$

成立.

当然对于 $x=0$, $\sin(0+T)^2=\sin 0^2$ 也成立,即 $\sin T^2=\sin 0=0$,所以有 $T=\sqrt{k\pi}$ $(k\in Z^+)$,而对于 $x=\sqrt{2}T=\sqrt{2k\pi}$ 也成立,故有

$$\sin(\sqrt{2}T+T)^2=\sin 2T^2=\sin T^2=0$$

则 $(\sqrt{2}+1)^2k\pi=n\pi$ $(n\in Z^+)$. 于是$(\sqrt{2}+1)^2=\frac{n}{k}$ $(k, n\in Z^+)$,可 $3+2\sqrt{2}$ 是无理数,而$\frac{n}{k}$ 是有理数,故矛盾,所以 T 不存在,所以 $y=\sin x^2$ 不是周期函数.

(3) 设 $x=n+r$ $(0\leqslant r<1$, n 为整数),T 为任意整数,由 $f_3(x)=[n+r]=n$, 而

$$f_3(x+T)=[T+n+r]=T+n\neq n=[n+r]$$

故函数 $f_3(x)=[x]$ 不是周期函数.

(4) 对函数 $f_4(x)=x-[x]$,设 T 为任意整数,由

$$f_4(x+T)=x+T-[x+T]=T+n+r-[T+n+r]=T+n+r-(T+n)$$
$$=r=n+r-n=n+r-[n+r]=x-[x]=f_4(x)$$

故任意整数 T 都是函数 $f_4(x)=x-[x]$ 的周期,所以最小正周期为 1,即函数 $f_4(x)=x-[x]$ 的周期为 1.

例 9 讨论狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 的有界性、单调性与周期性.

解 (1) 对于任意的有理数 r,有

$$x+r=\begin{cases}\text{有理数}, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ \text{无理数}, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

于是对任一 $x\in R$,有 $D(x+r)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}=D(x)$,所以,任意的有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期. 但任何无理数都不是 $D(x)$ 的周期,事实上,任取无理数 α,对于无理数 $-\alpha$, $D(-\alpha)=0$, 而

$$D(\alpha+(-\alpha))=D(0)=1\neq D(-\alpha)$$

(2) 对于任意的有理数 x_1 与无理数 x_2, 无论 $x_1>x_2$ 或 $x_1<x_2$, 都有

$$D(x_1)=1>0=D(x_2)$$

所以 $D(x)$不具有单调性.

(3) 由 $D(x)$的定义知,对任意的 $x\in R$,有 $|D(x)|\leqslant 1$,所以 $D(x)$ 是 R 上的有界函数.

例 10 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在区间(a, b)内是单调增加的,证明:函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\} \quad \text{及} \quad \psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$$

在区间(a, b)内也是单调增加的.

证法 1 设 $x_1, x_2\in(a, b)$ 且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$, $g(x_1)<g(x_2)$, 从而

$$\max\{f(x_2), g(x_2)\}\geqslant f(x_1), \quad \max\{f(x_2), g(x_2)\}\geqslant g(x_1)$$

于是

$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2), g(x_2)\}\geqslant\max\{f(x_1), g(x_1)\}=\varphi(x_1)$$

因此 $\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\}$ 在(a, b) 内是单调增加的.

类似可证明 $\psi(x)=\min\{f(x), g(x)\}$ 区间(a, b) 内也是单调增加的.

证法 2 设 $x_1, x_2\in(a, b)$且 $x_1<x_2$,则

$$\varphi(x)=\max\{f(x), g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1)-\varphi(x_2)&=\frac{1}{2}[f(x_1)-f(x_2)+g(x_1)-g(x_2)\\&\quad+|f(x_1)-g(x_1)|-|f(x_2)-g(x_2)|]\\&\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)-f(x_2)+g(x_1)-g(x_2)\\&\quad+|f(x_1)-f(x_2)+g(x_1)-g(x_2)|]\\&\leqslant\frac{1}{2}[f(x_1)-f(x_2)+g(x_1)-g(x_2)\\&\quad+|f(x_1)-f(x_2)|+|g(x_1)-g(x_2)|]\leqslant 0\end{aligned}$$

即 $\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$, 故 $\varphi(x)$是(a, b)内的增函数.