167354

材料力学

下册

華東紡織工學院
力学教研組編

1961

167354

~~55087~~

材料力学

下 册

无锡轻工业学院图书馆
CANG SHU

華東紡織工學院
力学教研組編

1961

62
江南大学图书馆
91293508

下 册 目 次

第十一章　运用变形能法求位移

〔提要〕 解决材料力学問題的分析方法，一般可以分为二大类：

第一类方法是从討論力的平衡、变形的几何关系以及应力和变形的物理关系三方面来解問題。这一类方法在以前几章已經常提到。

第二类方法是从討論体系的能量来求解問題，这种方法又称为能量法。

本章就是介紹运用能量概念的变形能法来計算位移以及求解超靜定問題，在求解一些比較复杂的問題时，这种方法往往是比較簡便的。

本章將首先归納各种基本变形的变形能計算，然后推导卡氏定理和馬克斯威尔—摩尔定理並計算位移，从而运用最小功原理来求解超靜定問題。

§11-1　变形能的計算，克拉伯依隆原理

我們知道当彈性体逐漸受到外力（靜載荷）作用，在变形前后都处在平衡状态时，若彈性体的应力在彈性极限以內，則外力所作的功將全部以变形能的形式“儲藏”在彈性体內，所以变形能在数值上等于外力所作的功。即：

$$U = A_P \tag{11-1}$$

式中U为彈性体所儲藏的变形能，A_P为外力对該彈性体所作的功。

在第三章中我們知道拉伸或压縮时的变形能为：

$$U = \frac{1}{2}P\Delta l = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{\Delta l^2 EF}{2l} \tag{11-2a}$$

式中的P是作用在杆上的拉力或压力，Δl是由于P力所引起杆的伸長或縮短，l是杆的長度，E是材料的彈性模数，F是杆的横截面面积。对于由拉压杆所組成的杆系，祇須將各杆的变形能相加，即得到这杆系的变形能。

$$U = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^2 l_i}{2E_iF_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta l_i^2 E_iF_i}{2l_i} \tag{11-2b}$$

圓杆扭轉时的变形能在第七章中已經知道：

$$U = \frac{1}{2}M_k\phi = \frac{M_k^2 l}{2GJ_P} = \frac{\phi^2 GJ_P}{2l} \tag{11-3}$$

式中M_k是作用于杆的扭矩，ϕ是由于M_k所引起的杆的扭轉角，GJ_P是抗扭剛度，l是杆的長度。

在純弯曲时的变形能类似地得到：

$$U = \frac{1}{2}M\theta = \frac{M^2 l}{2EJ} = \frac{\theta^2 EJ}{2l} \tag{11-4}$$

式中M是作用于梁上的弯矩，θ是由于M所引起的梁的截面轉角，EJ是抗弯剛度，l是梁的長度。

梁在剪切弯曲时，对于一般細長的梁，由于剪力所产生的变形能要比弯曲的变形能小得多；因此剪力变形可以忽略不計，而祇要計算弯曲变形能，其計算与純弯曲时相仿，但由于

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

各截面的弯矩不同，所以先取梁的一微段 dx 来計算它的变形能：

$$dU=\frac{M^2(x)\,dx}{2EJ} \tag{11-5}$$

然后将上式积分遍及全梁得到梁总的变形能：

$$U=\int_l \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ} \tag{11-6}$$

若梁有若干分段时，各段的$M(x)$不同，则全梁总的变形能为各段积分之和。

綜合上述各种基本变形的变形能計算，可以看出：变形能等于力(力偶)与該力(力偶)所作用的截面在沿該力(力偶)方向所产生的位移(綫位移或角位移)的乘积的一半。現以一般形式表示为：

$$U=\frac{1}{2}P\delta \tag{11-7}$$

式中的：P称为广义力（包括集中力和力偶）。

δ称为广义位移为相应于該广义力的位移（包括綫位移和角位移）。

因此总的說：**变形能在数值上就等于广义力和广义位移乘积的一半。**

从(11-2)—(11-4)式可以看到变形能亦是广义力或广义位移的二次函数，並不与支座反力有关；因此若：

(1) 材料服从虎克定律。

(2) 弹性体的微小变形並不影响外力作用的方式，而且在計算应力时，这微小的变形可以忽略不計。

符合以上兩条件时，則上述結果对于一般彈性体受任何形式的載荷都能适用；並且彈性体各点的位移将与外力成綫性关系，如果外力按某一比例增加，則位移也按同一比例增加。現举例說明：

設有一彈性体，作用有P_1，P_2，P_3，……等外力（图11-1），在这些外力作用下彈性体就发生彈性变形，以δ_1，δ_2，δ_3……等表示P_1，P_2，P_3等外力的作用点沿作用綫方向的位移。若这些外力逐漸增大，則外力在任何瞬时都与彈性体的內力相平衡。故这些外力所作之功在数值上将等于儲藏在該彈性体內的变形能。

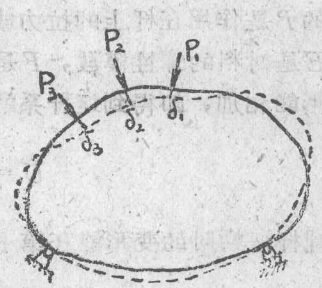


图 11-1

則
$$U=\frac{P_1\delta_1}{2}+\frac{P_2\delta_2}{2}+\frac{P_3\delta_3}{2}+\cdots\cdots \tag{11-8}$$

由上式可知，**彈性体总的变形能在数值上將等于每一外力与該力作用点沿其作用綫相应的位移的乘积之半的总和。**这是变形能的一般算式，在有些书上称之为克拉伯依隆原理。

因为δ_1、δ_2、δ_3……均为P_1、P_2、P_3……的綫性函数，所以把它代入（11-8）式就可得变形能为外力的二次齐次方程。反之，則得变形能为位移的二次齐次方程。現举例来說明：

設有一簡支梁，受載荷如图（11-2）所示，現来計算它的变形能。

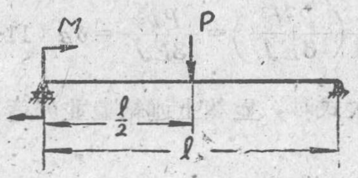


图 11-2

根据梁的变形叠加法可得：

梁中点撓度：　$\delta=\dfrac{Pl^3}{48EJ}+\dfrac{Ml^2}{16EJ}$

梁左端轉角：　$\theta=\dfrac{Pl^2}{16EJ}+\dfrac{Ml}{3EJ}$

若外力 P 与外力偶 M 各逐漸增大至最終値，則該梁的变形能为：

$$U=\frac{P\delta}{2}+\frac{M\theta}{2}=\frac{P}{2}\left(\frac{Pl^3}{48EJ}+\frac{Ml^2}{16EJ}\right)+\frac{M}{2}\left(\frac{Pl^2}{16EJ}+\frac{Ml}{3EJ}\right)$$

$$=\frac{1}{EJ}\left[\frac{P^2l^3}{96}+\frac{MPl^2}{16}+\frac{M^2l}{6}\right]$$

若該梁先作用集中力 P，然后再加力偶 M，則变形能为：

$$U=\frac{P}{2}\cdot\frac{Pl^3}{48EJ}+P\cdot\frac{Ml^2}{16EJ}+\frac{M}{2}\cdot\frac{Ml}{3EJ}$$

$$=\frac{1}{EJ}\left[\frac{P^2l^3}{96}+\frac{MPl^2}{16}+\frac{M^2l}{6}\right]$$

比較上述結果，显然可知梁的**变形能与外力作用的先后次序无关，仅由它的最終値决定**。

§11—2　卡斯奇頁諾定理

現在来說明若已知一彈性体或彈性系統內的变形能，怎样求得彈性体各点的位移？例如当杆件受簡单拉(压)时，若把变形能 U 对 P 微分，即得 P 作用点的位移 Δl：

$$\frac{dU}{dP}=\frac{d}{dP}\left(\frac{P^2l}{2EJ}\right)=\frac{Pl}{EF}=\Delta l \qquad (11\text{-}9)$$

再如当軸受扭轉时，把变形能 U 对 M_k 微分，即得軸的扭轉角 ϕ：

$$\frac{dU}{dM_k}=\frac{d}{dM_k}\left(\frac{M_k{}^2l}{2GJ_P}\right)=\frac{M_kl}{GJ_P}=\varphi \qquad (11\text{-}10)$$

又如当梁受純弯曲时，把变形能 U 对 M 微分，即得梁在 M 作用截面轉角，如图(11-3)所示梁在 B 点轉角为

$$\frac{dU}{dM}=\frac{d}{dM}\left(\frac{M^2l}{2EJ}\right)=\frac{Ml}{EJ}=\theta_B \qquad (11\text{-}11)$$

同理若将变形能对作用于梁上的集中載荷 P 微分，即得該力作用处沿力作用方向的位移（撓度）如图11-4所示。

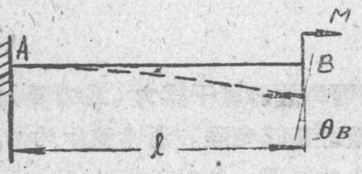


图 11-3

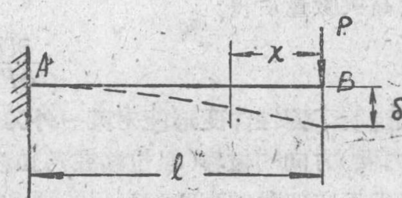


图11-4

$$\frac{dU}{dP}=\frac{d}{dP}\int_0^l \frac{M^2(x)dx}{2EJ}=\frac{d}{dP}\int_0^l \frac{(Px)^2dx}{2EJ}=\frac{d}{dP}\left(\frac{P^2l^3}{6EJ}\right)=\frac{Pl^3}{3EJ}=\delta_B \quad (11\text{-}12)$$

在§11-1中知道当弹性体的变形能为外力的二次齐次式时，显然上述結論並可适用在一般彈性体。

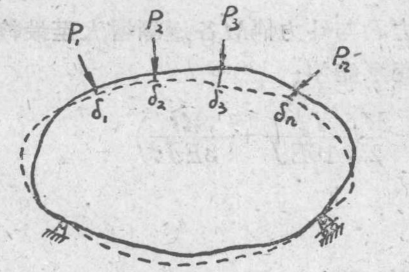


图 11-5

設彈性体上作用載荷 P_1，P_2，$P_3 \cdots\cdots P_n$；如图所示，則彈性体內的变形能为 $P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots P_n$ 的函数，即

$$U=f(P_1P_2P_3\cdots\cdots P_n)$$

現若使这些載荷中某一外力 P_n 改变一微量，如增加 dP_n，則彈性体变形能将增加一微量 dU，成为：

$$U'=U+dU$$

由于 dU 是作用在彈性体上独立变数中的一个 P_n 的极小增量而产生的，所以这样的复杂函数的微分等于：

$$dU=\frac{\partial U}{\partial P_n}dP_n$$

因此彈性体总的变形能为：

$$U'=U+dU=U+\frac{\partial U}{\partial P_n}dP_n \quad (a)$$

由上节我們知道彈性体的变形能数值与載荷作用的先后次序无关，而仅与彈性体变形后作用外力的最終值有关。現設想在彈性体上先作用 dP_n，在該力作用处产生一微小位移 $d\delta_n$，然后再作用 P_1，P_2，$P_3 \cdots\cdots P_n$；最終的变形能值应与(a)式完全相等。

由小变形假設可知，載荷 P_1、P_2、$P_3 \cdots\cdots P_n$ 所产生的变形能将不因彈性体上先作用有 dP_n 而有所改变，故仍为U。而由于 dP_n作用，它的变形能等于：

$$\frac{1}{2}dP_n\,d\delta_n+dP_n\cdot\delta_n$$

上式第二項是由于 P_1、P_2、$P_3 \cdots\cdots P_n$ 的作用，在 dP_n 亦即 P_n 的作用方向引起 δ_n 而又引起的变形能 $dP_n\delta_n$。因此彈性体总变形能应为：

$$U'=U+\frac{1}{2}dP_n\,d\delta_n+dP_n\delta_n \quad (b)$$

(a)和(b)式应該相等，則：

$$U+dU=U+\frac{1}{2}dP_n\,d\delta_n+dP_n\delta_n$$

上式略去高次微量后得：

$$\frac{\partial U}{\partial P_n}=\delta_n \quad (11\text{-}13)$$

上式說明了彈性体变形能对某一外力（或力偶）的偏导数即等于該力（或力偶）作用处沿該力(或力偶)方向的位移(綫位移或角位移)。此即卡斯奇貢諾定理。通常簡称为卡氏定理。

运用卡氏定理我們有时就可以很便利地求得彈性体的变形。如对于由拉(压)杆所組成的杆系，欲求載荷P作用处沿該力方向的位移δ_p，由(11-13)及(11-2b)式得：

$$\delta_p=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{\partial}{\partial P}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i^2 l_i}{2E_iF_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i l_i}{E_iF_i}\ \frac{\partial N_i}{\partial P} \qquad (11\text{-}14)$$

又如在梁受弯曲变形时，欲求某一集中載荷P_n作用处沿該力方向的撓度y_n，得：

$$y_n=\frac{\partial U}{\partial P_n}=\frac{\partial}{\partial P_n}\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EJ}$$

由于$M(x)$是x及P_n的函数，积分是以x为变数，而微分則以P_n为变数；我們知道定积分可以先对P_n微分然后再对x积分，結果相同，因此上式又可写成：

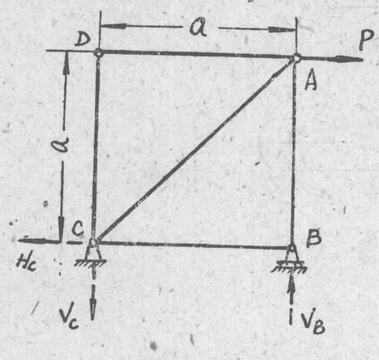
$$y_n=\int_l\frac{M(x)dx}{EJ}\ \frac{\partial M(x)}{\partial P_n} \qquad (11\text{-}15)$$

同理，欲求梁上外力偶M_n作用截面的轉角θ_n，得：

$$\theta_n=\frac{\partial U}{\partial M_n}=\frac{\partial}{\partial M_n}\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EJ}=\int_l\frac{M(x)dx}{EJ}\ \frac{\partial M(x)}{\partial M_n} \qquad (11\text{-}16)$$

(11–15)(11–16)式积分均应遍及全梁；假如$M(x)$要分成几段来表示，則积分也应分成同样段数，然后再計算各段之和。

根据卡氏定理法求出位移(綫位移或角位移)为正値时，則表示該位移与相应該位移处作用的外力(或力偶)的方向一致。若为負値，則表示与該外力(或力偶)作用的方向相反。



例 11-1 图

例11-1：求图示杆系节点A的水平位移：

解：根据静力平衡条件可解得：

支座反力为：　$V_B=P$

$V_C=P$　　$H_C=P$

各杆内力为：　AB杆内力：　$N_{AB}=-P$

AC杆内力：　$N_{AC}=\sqrt{2}P$

AD，DC，BC三杆内力：

$N_{AD}=N_{DC}=N_{BC}=0$

由(11–14)式得：

$$\delta_A=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i l_i}{EF_i}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial P}=\frac{N_{AB}\ l_{AB}}{E\cdot F}\cdot\frac{\partial N_{AB}}{\partial P}+\frac{N_{AC}l_{AC}}{EF}\ \frac{\partial N_{AC}}{\partial P}$$

$$\delta_A=\frac{-Pa}{EF}\cdot\frac{\partial(-P)}{\partial P}+\frac{\sqrt{2}P\sqrt{2}a}{EF}\cdot\frac{\partial(\sqrt{2}P)}{\partial P}=\frac{Pa}{EF}+\frac{2\sqrt{2}P\cdot a}{EF}=\frac{Pa}{EF}(1+2\sqrt{2})$$

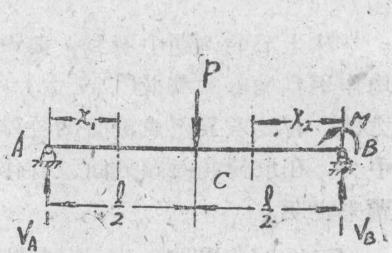
显然，用能量方法求节点A的位移是較其他方法簡便得多。

例11-2：求图示梁中点C的撓度及梁右端B的轉角：

解：梁分AC及CB二段，二段弯矩方程不同，故应分段积分。

$$y_c=\frac{\partial U}{\partial P}=\int_{AC}\frac{M_1dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial P}+\int_{BC}\frac{M_2dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial P} \qquad (a)$$

$$\theta_B=\frac{\partial U}{\partial M}=\int_{AC}\frac{M_1dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial M}+\int_{BC}\frac{M_2dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial M} \qquad (b)$$



例 11-2 图

在求M_1时，我們取梁端A为計算X_1的起点，則：

$$M_1=V_A\cdot x_1 \qquad O\leqslant x_1\leqslant\frac{l}{2}$$

在求M_2时，为方便起見我們取梁端B为計算x_2的起点，則:

$$M_2=V_B\cdot x_2+M \qquad O\leqslant x_2\leqslant\frac{l}{2}$$

在求M_1、M_2对P或M的偏导数时，必須要以卡氏定理所考虑的独立外力来表示，即反力V_A、V_B需通过P，M来表示，否則容易忘記V_A、V_B是M的函数，这將造成錯誤。

$$\Sigma M_A=O \qquad V_B=\frac{P}{2}-\frac{M}{l}$$

$$\Sigma M_B=O \qquad V_A=\frac{p}{2}+\frac{M}{l}$$

代入弯矩方程:

$$M_1=\left(\frac{P}{2}+\frac{M}{l}\right)x_1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P}=\frac{x_1}{2} \qquad \frac{\partial M_1}{\partial M}=\frac{x_1}{l}$$

$$M_2=\left(\frac{P}{2}-\frac{M}{l}\right)x_2+M=\frac{Px_2}{2}+M\left(1-\frac{x_2}{l}\right)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P}=\frac{x_2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial M}=1-\frac{x_2}{l}$$

代入(a)式得:

$$y_c=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\left(\frac{P}{2}+\frac{M}{l}\right)}{EJ}\cdot\frac{x_1^2}{2}\cdot dx_1+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\frac{Px_2}{2}+M\left(1-\frac{x_2}{l}\right)}{EJ}\cdot\frac{x_2}{2}dx_2$$

$$=\frac{Pl^3}{48EJ}+\frac{Ml^2}{16EJ}$$

代入(b)式得:

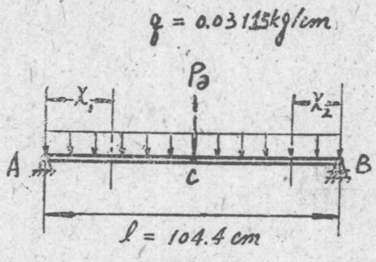
$$\theta_B=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\left(\frac{P}{2}+\frac{M}{l}\right)}{EJ}\left(\frac{x_1^2}{l}\right)dx_1+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\frac{Px_2}{2}+M\left(1-\frac{x_2}{l}\right)}{EJ}\left(1-\frac{x_2}{l}\right)dx_2$$

$$=\frac{Pl^2}{16EJ}+\frac{Ml}{3EJ}$$

§11-3 附加力法

从上节的例題中看到，要求彈性体上某点或截面的位移(广义位移)时，在該点或截面上均作用有相应的載荷(广义力)；如求梁的撓度时作用着集中力，在求梁的截面轉角处作用着力偶。若要求某点或截面的位移而沒有作用着相应的載荷；如要求撓度时該点沒有作用着集中力，在求轉角时該截面沒有作用着力偶，則必須运用附加力的方法来計算位移。現通过例題来説明。

例11-3: 校核例10-7所示梳棉机盖板的剛度，若已知盖板的長度$l=104.4$cm，均佈載荷$q=0.03115$ kg/cm，$E=1.6\times10^6$kg/cm²，$J=5.16$cm⁴，允許盖板与錫林間的隔距为0.2～0.23mm。



例 11-3 图

解: 由于载荷对称故盖板最大挠度必发生在中点 C。因为 C 点无集中載荷，所以在 C 点附加一集中力 P_∂ 如图所示，其方向可任意假定，现設为向下。这样就可按卡氏定理来求 C 点的撓度。所求得的 y_c 是用 q 及 P_∂ 所組成式子来表示的，此式对任何数值的 q 及 P_∂ 都是适用的，当然中亦包括 $P_\partial=O$ 的情况，故若在此結果中令 $P_\partial=O$，則就得到仅有 q 所作用时的 y_c。現計算如下:

$$\because \qquad V_A=V_B=\frac{1}{2}ql+\frac{1}{2}P_\partial$$

必須注意，在求反力时，切不可忘記附加力 P_∂，必須将它与其它載荷一樣看待。

列出 AC 和 BC 二段弯矩方程:

当 $O\leqslant x_1\leqslant\frac{l}{2}$ 　則: $M_1=V_A\cdot x_1-\frac{1}{2}qx_1^2$

$$=\left(\frac{1}{2}ql+\frac{1}{2}P_\partial\right)x_1-\frac{1}{2}qx_1^2$$

对附加力 P_∂ 取偏导数: $\qquad \dfrac{\partial M}{\partial P_\partial}=\dfrac{x_1}{2}$

当 $O\leqslant x_2\leqslant\frac{l}{2}$ 　則: $M_2=V_B\cdot x_2-\frac{1}{2}qx_2^2$

$$=\left(\frac{1}{2}ql+\frac{1}{2}P_\partial\right)x_2-\frac{1}{2}qx_2^2$$

对附加力 P_∂ 取偏导数: $\qquad \dfrac{\partial M_2}{\partial P_\partial}=\dfrac{x_2}{2}$

代入求撓度的方程，並令 $P_\partial=O$，得:

$$y_c=\frac{\partial U}{\partial P_\partial}=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{M_1dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial P_\partial}+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{M_2dx_2}{EJ}\cdot\frac{\partial M}{\partial P_\partial}$$

$$=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\frac{1}{2}qlx_1-\frac{1}{2}qx_1^2}{EJ}\cdot\frac{x_1}{2}dx_1+\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{\frac{1}{2}qlx_2-\frac{1}{2}qx_2^2}{EJ}\cdot\frac{x_2}{2}dx_2$$

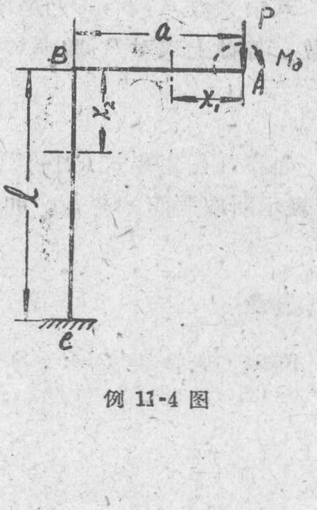
$$=\frac{q}{2EJ}\int_0^{\frac{l}{2}}(lx_1^2-x_1^3)\,dx_1=\frac{q}{2EJ}\left(\frac{lx_1^3}{3}-\frac{x_1^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{5ql^4}{384EJ}=0.00535\text{ cm}<0.2\sim0.25\text{ mm}$$

∴ 盖板剛度是足够的。

例11-4: 图示剛架，設各截面的慣矩都相同，求截面 A 的轉角。

解: 由于 A 端沒有力偶作用，所以在 A 处必須加上附加力偶 M_∂ (方向任意設)，如图所示。



例 11-4 图

当 $O\leqslant x_1\leqslant a$ 　則: $M_1=-Px_1-M_\partial$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M_\partial}=-1$$

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

当 $0\leqslant x_2\leqslant l$ 则: $M_2=-Pa-M_\partial$

$$\frac{\partial M_2}{\partial M_\partial}=-1$$

代入下式並令$M_\partial=0$，

$$\theta_A=\int_0^a\frac{M_1dx_1}{EJ}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial M_\partial}+\int_0^l\frac{M_2dx_2}{EJ}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial M_\partial}$$

得:
$$\theta_A=\frac{1}{EJ}\int_0^a(-Px_1)(-1)dx_1+\frac{1}{EJ}\int_0^l(-Pa)(-1)dx_2$$

$$=\frac{1}{EJ}\left[P\cdot\frac{a^2}{2}+Pal\right]=\frac{Pa(a+2l)}{2EJ}$$

其結果为正，即表示轉角与假設M_∂方向一致。

§11-4 馬克斯威尔—摩尔定理

由卡氏定理知道，梁在集中力P或集中力偶M作用之截面的撓度及轉角为:

$$y=\int_l\frac{M(x)dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial P}$$

$$\theta=\int_l\frac{M(x)dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial M}$$

对以拉(压)杆組成的杆系，在外力P作用处的位移为:

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_il_i}{EF_i}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial P}$$

現我們来研究这些偏微分$\frac{\partial M(x)}{\partial P}$，$\frac{\partial M(x)}{\partial M}$，$\frac{\partial N_i}{\partial P}$究竟代表什么？

設梁上同时作用集中力P_1、P_2……，力偶M_1、M_2……，分佈載荷q_1、q_2……，則梁上任意截面的弯矩$M(x)$可以載荷的綫性函数形式表示为:

$$M(x)=a_1P_1+a_2P_2+\cdots\cdots+b_1M_1+b_2M_2+\cdots\cdots+c_1q_1+c_2q_2\cdots\cdots \quad (11\text{-}17)$$

式中系数a，b，c乃是梁的跨度和各載荷作用点間的距离及所取截面位置坐标x等等的函数。若将上式对P_1取偏导数:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P_1}=a_1$$

如我們在弯矩式(11-17)中，令$P_1=1$（称为单位載荷），並令其它載荷都等于零，以M^0表示所取截面的弯矩，則:

$$M^\circ=a_1$$

显然，
$$M^\circ=\frac{\partial M(x)}{\partial P_1}$$

同理，若令$M_1=1$（亦称单位載荷）並令其它載荷都等于零，我們得到:

$$M^\circ=b_1$$

显然这和在(11-17)弯矩式中对M_1取偏导数結果相同:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial M_1}=b_1$$

所以得到:

$$M^{\circ}=\frac{\partial M(x)}{\partial M_1}$$

因此欲求梁上某截面的撓度 y 或轉角 θ，祇要求得由原有載荷所引起的弯矩方程$M(x)$、以及不管該截面上原來有无外力，要相应地在該截面处加一个单位載荷(在求撓度时为$P=1$，在求轉角时为$M=1$)並求出仅由这个单位載荷所引起的弯矩方程M°，然后按下式积分:

$$y=\int_{l}\frac{M(x)M^{\circ}}{EJ}dx \tag{11-18}$$

$$\theta=\int_{l}\frac{M(x)M^{\circ}}{EJ}dx \tag{11-19}$$

(11-18)式中的M°是表示仅由单位載荷$P=1$作用在所求截面处时的弯矩方程，(11-19)式中的M°是表示仅由单位載荷$M=1$作用在所求截面处时的弯矩方程。假使梁有若干分段，則$M(x)$和M°各段的形式不同，則(11-18)及(11-19)式应为若干段积分之和。

在以拉(压)杆組成的杆系中，类似地可以得到:

$$N^{\circ}=\frac{\partial N_i}{\partial P}$$

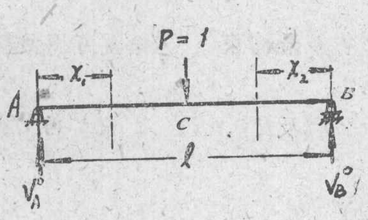
式中N°表示仅由单位載荷$P=1$作用在所求点位移处时任一杆內引起的內力。因此**欲求拉(压)杆系上某一点的位移时，首先求出由原来外力引起的各杆的內力N，然后在該点相应地加一单位載荷$P=1$，並求出由此单位載荷在各杆內所引起的內力N°**，所求的位移按下式計算:

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_iN^{\circ}}{EF_i}l_i \tag{11-20}$$

上述計算方法是由馬克斯威尔首先提出，后由摩尔运用在实际計算中，故称为馬克斯威尔—摩尔定理。

将卡氏定理(11-14)—(11-16)式与摩尔定理(11-18)—(11-20)式比較，可以看出**它們之間的区别在于一个乘数**；在卡氏定理中是$\frac{\partial M(x)}{\partial P}$或$\frac{\partial M(x)}{\partial M}$或$\frac{\partial N_i}{\partial P}$，而在摩尔定理中是$M^{\circ}$或$N^{\circ}$；$M^{\circ}$(或$N^{\circ}$)是仅由于单位載荷(广义力)作用时的弯矩(或軸向力)。

例11-5: 用摩尔定理計算例11-2中的撓度y_C及轉角θ_B。



例 11-5 图 (a)

解: 首先求出由原来載荷作用时的二段弯矩方程:

$$M_1=\left(\frac{P}{2}+\frac{M}{l}\right)x_1$$

$$M_2=\frac{Px_2}{2}+M\left(1-\frac{x_2}{l}\right)$$

欲求y_c則在梁的C截面处加一單位力$P=1$(图a)。則仅由單位載荷所引起支座反力为:

$$V_A^{\circ}=V_B^{\circ}=\frac{1}{2}$$

仅由單位載荷所引起各段內弯矩方程为:

$$M_1^\circ = V_A^\circ x_1 = \frac{x_1}{2}$$

$$M_2^\circ = V_B^\circ x_2 = \frac{x_2}{2}$$

$$\therefore \quad y_c = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_1 M_1^\circ}{EJ} \cdot dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_2 \cdot M_2^\circ}{EJ} \cdot dx_2$$

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}+\frac{M}{l}\right) x_1 \frac{x_1}{2} \cdot dx_1}{EJ} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left[\frac{Px_2}{2} + M\left(1-\frac{x_2}{l}\right)\right] \frac{x_2}{2} dx_2}{EJ}$$

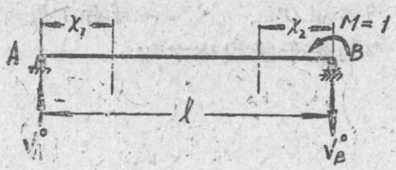
$$= \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Ml^2}{16EJ}$$

欲求 θ_B 則在梁的 B 处加一單位力偶 $M=1$（图 b）

則仅由于單位力偶所引起支座反力为:

$$V_A^\circ = \frac{1}{l}$$

$$V_B^\circ = \frac{1}{l}$$



例 11-5 图 (b)

仅由單位力偶所产生的弯矩为:

$$M_1^\circ = V_A^\circ x_1 = \frac{x_1}{l}$$

$$M_2^\circ = 1 - V_B^\circ x_2 = 1 - \frac{x_2}{l}$$

$$\therefore \quad \theta_B = \int_{AC} \frac{M_1 M_1^\circ}{EJ} \cdot dx_1 + \int_{BC} \frac{M_2 M_2^\circ}{EJ} dx_2$$

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{P}{2}+\frac{M}{l}\right) x_1}{EJ} \cdot \frac{x_1}{l} \cdot dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left[\frac{Px_2}{2} + M\left(1-\frac{x_2}{l}\right)\right]}{EJ} \left(1-\frac{x_2}{l}\right) dx_2$$

$$= \frac{Pl^2}{16EJ} + \frac{Ml}{3EJ}$$

§11-5 最 小 功 能 原 理

运用上述变形能法还可計算超靜定問題。設有一彈性体上作用了 n 个載荷(P_1、P_2、$P_3 \cdots \cdots P_n$)，並有$(m+2)$个支座(图 11-6 a)。

若以m个多余未知反力（R_1、R_2、$R_3 \cdots \cdots R_m$）代替m个多余約束，这样就可得到該系統的靜定基。如图 11-6(b)。

設靜定基总的变形能为U，則U为外力 P_1、P_2、$P_3 \cdots \cdots P_n$及R_1、$R_2 \cdots \cdots R_m$ 的二次齐次函数。

$$U = U(P_1 P_2 P_3 \cdots \cdots P_n, \ R_1 R_2 \cdots \cdots R_m)$$

根据卡氏定理可知，若把总的变形能对每个多余未知反力求偏导数，則可得每个多余約

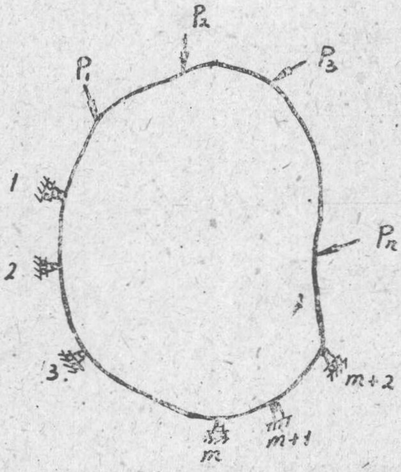


图 11-6 (a)

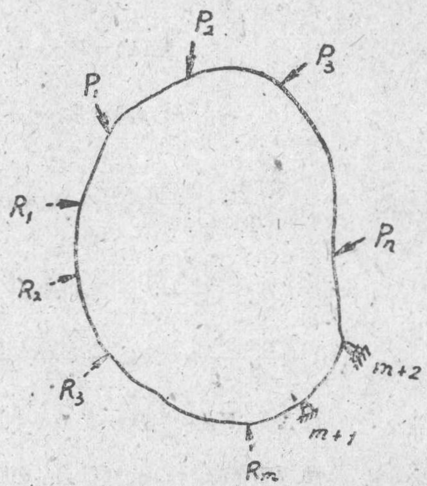


图 11-6 (b)

束的位移；显然它們应等于零。即：

$$\frac{\partial U}{\partial R_1}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial R_2}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial R_3}=0, \cdots\cdots \quad \frac{\partial U}{\partial R_m}=0$$

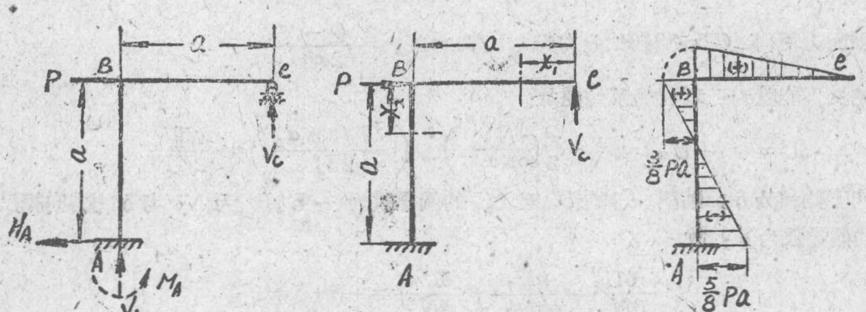
此亦即是m次超靜定問題中的m个补充方程。

由m个偏导数为零說明了該系統的彈性变形能，若以多余反力R_1、R_2、$R_3\cdots\cdots R_m$为变数时，則要求变形能U为极值。又因U是P_1、$P_2\cdots\cdots P_n$，R_1、$R_2\cdots\cdots R_m$的二次齐次函数，若对它們求二阶偏导数时恆为正值，因此U应为极小值。

由此可知：**在所有滿足靜力平衡的未知反力中，能使系統所保持的变形能（这些外力所作的功）为最小值的一組力是該系統的眞正解答；这就是最小功原理。**

例11-7：运用最小功能原理求图示剛架的支座反力，及繪出它的弯矩图（設剛架剛度为EJ）：

解：取支反力V_C为多余的，設其方向向上如图(a)所示，故靜定基受到外力P及V_C作用，如图(b)所示。根据最小功原理得：



(a)　(b)　(c)

例 11-6 图

$$\frac{\partial U}{\partial V_C}=\int_l \frac{M(x)\,dx}{EJ}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial V_C}=0$$

而:
$$M(x)=V_C\cdot x_1,\qquad \frac{\partial M(x_1)}{\partial V_C}=x_1$$
$$M(x_2)=V_C\cdot a-Px_2,\qquad \frac{\partial M(x_2)}{\partial V_C}=a$$

代入上式:
$$\frac{\partial U}{\partial V_C}=\int_0^a \frac{V_C\cdot x_1}{EJ}\cdot x_1\cdot dx_1+\int_0^a \frac{V_C\cdot a-Px_2}{EJ}\cdot a\,dx_2=0$$

或
$$V_C\cdot\frac{x_1{}^3}{3}\Big|_0^a+V_C\,a^2x_2\Big|_0^a-Pa\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=0$$

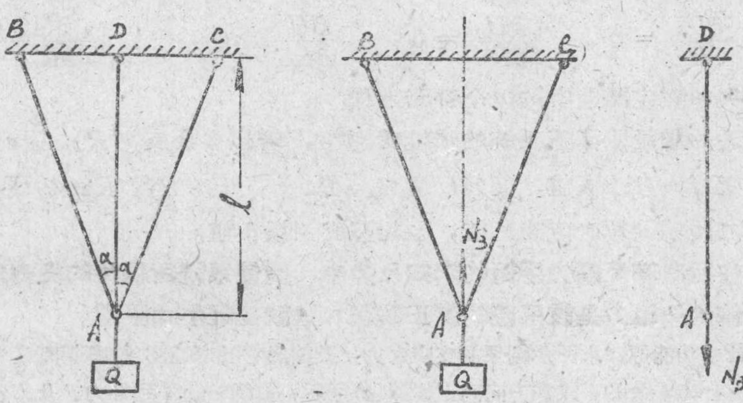
或
$$\frac{V_C\cdot a^3}{3}+a^3V_C-\frac{Pa^3}{2}=0$$

$$\therefore\quad V_C=\frac{3}{8}P$$

把此V_C值代入弯矩方程$M(x_1)$及$M(x_2)$，即可画出弯矩图，如图(c)所示

例11-7: 求图(a)示杆系中各杆件的內力。設各杆有相同的E及F，中間杆長为l。

解: 这是拉(压)超靜定杆系。若取AD杆的內力N_3为多余約束力，則杆系就可看成由图(b)及(c)組成。



(a) (b) (c)

例 11-7 图

从靜力平衡方程得AC及AB杆受內力为 $N_1=N_2=\dfrac{Q-N_3}{2\cos\alpha}$

杆系总的变形能就为二者(图b及c)叠加:

$$U=U_1+U_2=2\left(\frac{Q-N_3}{2\cos\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{l/\cos\alpha}{2EJ}\right)+\frac{N_3^2 l}{2EJ}$$

若节点向下位移为δ；則图(b)的U_1对N_3的偏导数为($-\delta$)(因为N_3与δ的方向相反)，而图(c)的U_2对N_3的偏导数为δ，故

$$\frac{\partial U}{\partial N_3}=\frac{\partial U_1}{\partial N_3}+\frac{\partial U_2}{\partial N_3}=-\delta+\delta=0$$

把变形能值代入上式，則得:

$$\frac{Q-N_3}{2^2\cos\alpha}\cdot\frac{l}{EF\cos\alpha}+\frac{N_3 l}{EF}=0$$

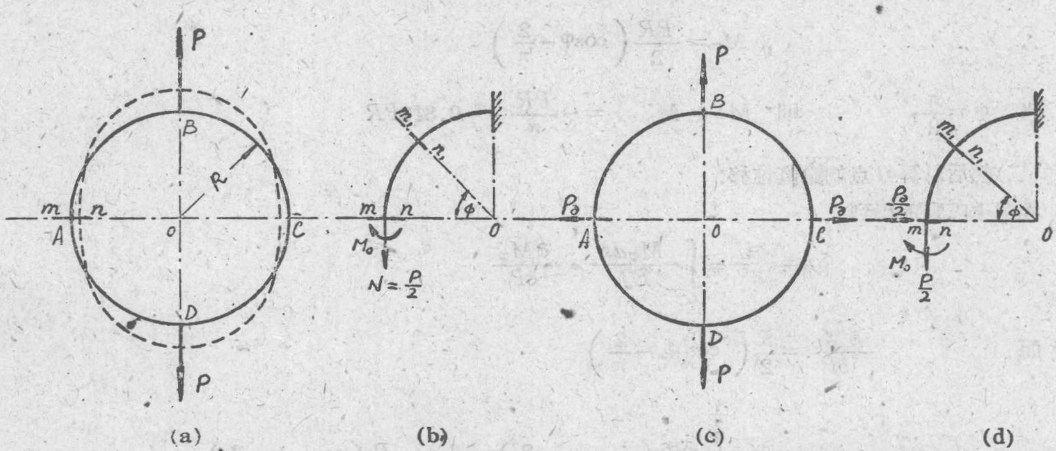
$$N_3=\frac{Q}{1+2\cos^3\alpha}$$

根据静力平衡方程可得：

$$N_1=N_2=\frac{Q\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}$$

例11-8：求图(*a*)所示圆环任一徑向截面上的內力、B点的鉛直位移和A点的水平位移。

解：用截面法分析，知道这是超静定問題，但我們可以通过变形能法很易求得其变形及內力。



例 11-8 图

(一)首先計算任一徑向截面上的內力：

由于圓环是对称于x及y軸，故它們的內力亦为对称，我們只需討論$\frac{1}{4}$圓环就可以了。見图(*b*)所示。

显然，在mn截面上作用有內力N及弯矩M_0，而无剪力存在(因为图形及載荷都为对称的)。用平衡条件得：

$$N=\frac{P}{2}$$

圓环經变形后mn截面並未轉动，即該截面的轉角$\theta_A=0$。同样根据最小功原理亦可得出：

$$\theta_A=\frac{\partial U}{\partial M_0}=0 \tag{a}$$

式中U表示該部份圓环的变形能。

而
$$\frac{\partial U}{\partial M_0}=\int_{\frac{L}{4}}\frac{M_\varphi ds}{EJ}\cdot\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_0} \tag{b}$$

式中M_φ表示圓环上任一徑向截面m_1n_1(它与水平面夾角为φ)上的弯矩。L为圓环周長。

$$\left.\begin{aligned}&M_\varphi=M_0-\frac{P}{2}\cdot R(1-\cos\phi)\\&\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_0}=1\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

將(*b*)(*c*)式代入(*a*)式，得到：

$$\int_{\frac{L}{4}}\frac{M_0-\frac{P}{2}R(1-\cos\phi)}{EJ}\cdot Rd\phi\cdot(1)=0$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com