数学系文化补习試用教材

初等代数

天津师范学院数学系

数学系文化补习試用教材

初等代数

天津师范学院数学系

一九七四年一月

目　录

前 言

伟大领袖毛主席教导我们:“**人民，只有人民，才是创造世界历史的动力。**”人民群众是社会实践的主体，是认识和改造世界的主体。数学的产生和发展，是由劳动人民在长期的社会实践中总结出来的。那种编造“数学是天才数学家脑髓的产物”、“头脑制造法则”和反动唯心主义者杜林所宣扬的数学是“自由创造物和想象物”是同一个货色，妄图否认实践是数学的源泉，实质是反动的“英雄创造历史”和“天才论”的翻版。

数学是研究现实世界的空想形式和数量关系的一门科学，因生产实践和科学发展的需要而产生，又广泛的用于实践。初等代数主要是从定量的角度来反映物理现象的变化规律，用代数运算从相对静止的观点研究数量关系，正如恩格斯指出:“**我们的几何学是从空间关系出发，我们的算术和代数学是从数量出发，这些数量和我们的地球上的关系相适应**”。代数学研究的对象之一——方程式就是满足一定自然规律数量间的关系式。

初等代数的内容，在三大革命运动中应用十分广泛，並且是进一步学习数学的其他部份和其他科学技术的基础。我们开设《代数》这门课的主要任务是：通过本课的学习，使学员对初等代数的内容和研究方法有较全面的了解，在其理论上有一定的提高，为进一步学习高等数学创造条件。

通过批林整风运动，我们深刻体会到“**路綫是个纲，纲举目张**”，在编写教材时，我们努力用毛主席的哲学思想作统帅，运用辩证唯物主义观点分析和处理教材，並注意理论和实际相

结合。同时，我们批判地吸取了旧教材的有用部份，使教材适应三大革命的需要。

此教材虽经两次修改，並被两期工农兵学员先后使用，但因修改仓促，还会存在很多缺点和错误，须在今后不断修改和完善。

本教材供我系普通班和进修班补课试用，为了避免重复，有些较深内容放在有关的高等数学和三年级开设的“初等代数复习研究”中，为此，各班特别是进修班尚需根据实际情况做必要的删减和增补。

第一章 有 理 数

一、基本概念

1. 正数和负数

毛主席教导我们说：**“马克思主义者认为人类社会的生产活动，是一步又一步地由低级向高级发展，因此，人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面。”**人们对数的认识，是随着生产力的不断发展，生产规模的不断扩大，涉及到的领域不断增多而逐渐发展的，因此，每一次数的扩充，都是从为了表达实际存在的量出发的，而不是某些“先知先觉”的人的凭空臆造。

算术里的数，有自然数、零和分数．人类最初由于生产和生活的需要，从数东西开始而产生自然数．但是，还有许多量不能用它们来表示．例如，要把一件东西分成几份，就没有自然数可表示，为了解决这种量的问题，数做了第一次扩充引进了分数．为了表达“没有东西”的情况，又产生了数“0”，数又做了第二次扩充．自从有了自然数和零以后，不少的量可以用它们来表示，所以说，在算术里，数已做了两次扩充，每一次扩充的数的范围，都解决了原有数的范围所不能解决的矛盾．

算术数虽然正确地表达了自然界和人们生产实践中经常遇到的量，但是，它所表达的范围还是太小了，是很片面的．人们在社会实践中遇到的大量的量，用算术数不好表达，有些根本无法表达．例如：温度零上5°C与零下5°C，地面高度在海

平面以上50公尺与海平面以下50公尺，填筑土方100立方米与开挖土方100立方米，收入100元与支出100元，机车向东运行50公里与向西运行50公里等等．每一组的两个量都具有相反的意义，对于这些量，为了确切地表达它们的意义，不仅要用数来表示量的多少，而且还要表示出它们的方向．算术数已经不能表示具有相反意义的量了，新的需要和算术数的局限性形成了尖锐的矛盾，这种矛盾运动，推动了数向高一级程度的发展，数又做了第三次扩充．

我们用正数和负数来表示相反意义的量．两个相反意义的量，如果一个用算术中不等于零的数来表示，也就是我们把这种数看做前面带有“+”号的数，例如，5看作+5，我们叫它做**正数**；那末，另一个量就用前面带“-”号的数来表示，我们叫它做**负数**．通常我们把零上、海平面以上、上升、收入、向东等规定为正，相反方向规定为负．例如：零上5°C记作+5°C，零下5°C记作-5°C；收入100元记作+100元，支出100元记作-100元等．这里符号“+”和“-”已经不是运算符号，而是方向符号（或叫性质符号）了．为了方便起见，还规定正数前面的“+”号，可以省略不写．

恩格斯说：“**正和负可以看作彼此相等的东西——不管把哪方面当作正，把哪方面当作负，都是一样的**”．我们在上面对正和负的规定是通常的习惯，便于使用的统一．

根据上面的讨论，我们知道，正数就是算术里不是零的数，负数是算术里不是零的数前面加上“-”号的数．很明显，每一个正数a，都有唯一的负数$-a$与它对应，象a和$-a$这种互相对应的数，叫做互为相反的数．

要注意的一点，不是任何情况都具有相反意义的量，例如：我国有七亿五千万人口，京津公路长120公里等等，就不

具有相反意义的量。

2． 正负数的关系

毛主席教导说：**“矛盾着的各方面，不能孤立地存在。假如没有和它作对的矛盾的一方，它自己这一方就失去了存在的条件。”**正数和负数是两类矛盾的量，它们互为依存的条件，没有正数无所谓负数；没有负数，也无所谓正数（正数和负数，它们只有在它们的相互关系中才有意义）。这种认识深刻地说明，用正数和负数来刻划相反意义的量是十分生动的、确切的。

“事情不是矛盾双方互相依存就完了，更重要的，还在于矛盾着的事物的互相转化。”我们只有认识了正负数“**在一定条件之下互相转化**”，才对正数和负数概念有比较清楚的认识。正负数之间转化的内容很丰富，转化条件不同，转化的形式和结果也不同。例如，$-3°C$（零上为正），在以“零下为正”的条件下，$-3°C$转化为$+3°C$；在以$-270°C$作为零点的绝对温度条件下，$-3°C$转化为$270°T$（T表示绝对温度）。这里，计算方向和基准点的选定，都可成为正负数转化的条件。因此，我们不应当把正负数看作死的、凝固的东西，而应当看作是生动的、有条件的、可变动的、互相转化的东西。

3． 零的意义

正负数的建立，丰富了零的内容，进一步揭示了零所表达的实际意义。这时的零，不再简单地表示“没有”，而是在某些事物中表示“有”了，“**零是具有非常确定的内容的**。”（恩格斯：《自然辩证法》）如温度是零度，决不是没有温度，而是一个完全确定的使水结冰的温度；半夜零点，并非没有时间，而是两天时间的区分点；零还作为一切正数和负数之间的界线。弄清零的意义，可以使我们更具体地理解零“**即不是正又不是负的**

唯一真正的中性数”（《自然辩证法》）．

4．有理数

在扩充后的数的范围里，比算数里的数增加了负整数和负分数，我们把**正的整数和分数、负的整数和分数以及零，统称为有理数．**

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

5．绝对值

正负数的建立给我们提供了表示有方向的量的一种很简明的方式，但是，在三大革命实践中，有时考虑的只是量的数值，而不管它的方向．例如，甲乙两地位于丙地的东西两方，在计量丙地到甲乙两地的距离时，我们就不考虑它们的方向只考虑其里程．又如一个货场的装卸能力，也不必去区分是能装货多少，卸货多少．

由于社会实践的需要，在数学上也就抽象概括出绝对值这个概念，绝对值也叫做模．

定义　一个正数或零的绝对值，就是这个数的本身；一个负数的绝对值就是和它相反的正数．

如果用字母 a 表示任意有理数，那末

$$|a|=\begin{cases}a\text{（如果}a\text{是正数），}\\ 0\text{（如果}a\text{是零），}\\ -a\text{（如果}a\text{是负数）．}\end{cases}$$

两个相反的数的绝对值是相等的．例如，

$$|+5|=|-5|=5.$$

绝对值的概念，为下面建立比较有理数大小的方法，研究有理数的运算法则，创造了有利条件．

6．数轴

定义　规定了方向、原点和长度单位的一条直綫，叫做数軸．原点、方向和长度单位叫做数軸的三要素．

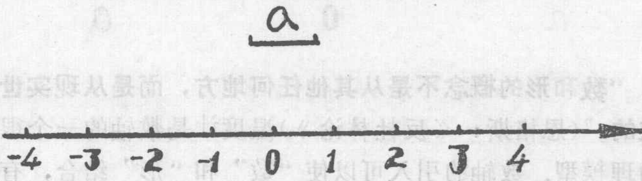


图1—1

例　在数轴上把＋４，－３表示出来．

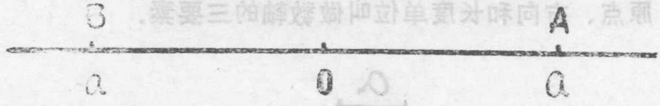
图1—2

从原点O开始，向正方向截取四个长度单位，取得点A，点A就表示＋４；从原点O开始，向负方向截取三个单位，取得点B，点B就表示－３．

任何一个有理数a都可以在数轴上找到一个唯一确定的点A来表示它．但是，並不是说数轴上的任何一点，都能够表示

一个有理数。

从数轴上可以看到，表示互为相反的数a和$-a$的 两点A，B位于原点的两旁，与原点的距离相等，而它们的绝对值也相等．因此在数轴上表示一个数的点，它与原点的距离就是该数的绝对值，这就是一个数的绝对值的几何意义。



“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。”（恩格斯：《反杜林论》）温度计是数轴的一个很形象的物理模型。数轴的引入可以使“数”和“形”结合，有助于我们进一步理解相反的数、数的绝对值、数的大小比较和数的运算规律等。

7． 有理数的大小比较

我们现在对整个有理数系统的内部规律性了解还太少，譬如，对它们的顺序关系就不清楚。因此，需要研究有理数大小的比较方法，便于用这种客观规律性的认识，服务于我们三大革命运动的实践。

对于有理数里的正数和零的大小比较方法，在算术里已经研究过，要找出全部有理数大小的比较方法，只要找出正数和负数、零和负数、两个负数的大小比较方法就可以了。

为了防止把算术中已形成的比较两个正数大小的方法，错误的应用到比较两个负数大小上，从实际问题进行理解是很重要的，例如：

零上5°C比零下5°C高，即-5小于5，记为$-5<5$，或$5>-5$；

$0°C$比零下$3°C$高，即-3小于0，记为$-3<0$或$0>-3$；

零下$4°C$比零下$5°C$高，虽然$|-4|<|-5|$，但是，实际情况乃是$-5<-4$。

把上面各数，用符号“<”连接起来，就有

$$-5<-4<-3<0<5.$$

图1—3

在数轴上把表示各数的点标出来，加以分析可以认识到，数轴上从左往右，越在右边的点，所表示的数就越大，因此得出下面的结论：

（1）正数大于零，也大于一切负数；

（2）负数都小于零，也小于一切正数；

（3）两个负数中绝对值大的反而小，绝对值小的反而大。

二、有理数的四则运算

有理数的四则运算是代数运算的基础，是数学中的一个重要部分。我们研究算术数的四则运算时已经知道，减法是加法的逆运算，乘法是几个相同数连加的简便算法，除法是乘法的逆运算。因此，加法是这几种运算的基础，有理数的四则运算也是如此。

通过实例并形象地应用数轴加以表示，对理解掌握有理数四则运算很有启发。

1. 有理数的加法

有理数的加法分做三种情况：同号两数相加，异号两数相加，同零相加．两个正数相加，一个正数同零相加，在算术里已做出结论．现在实际研究的内容是两个负数相加，异号两数相加和一个负数同零相加．

（1）两个负数相加

例 温度第一天从零度下降了4度，第二天又下降了2度，两天一共下降了多少度？

如图中所示：

图 1—4

两次一共下降了6度，即

$$(-4)+(-2)=-6.$$

（2）异号两数相加

例 某天夜里温度从零度下降了4度，第二天早晨从零下4度上升2度，第二天早晨气温是多少？

如图1—5所示，第二天早晨的气温是-2度，即

$$(-4)+(+2)=-2.$$

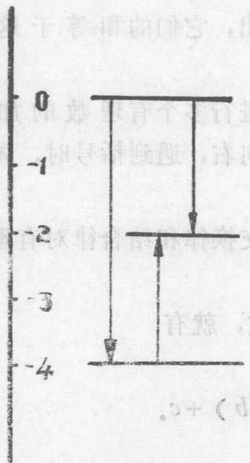


图1—5

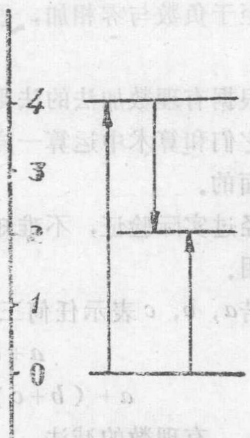


图1—6

例 如果某天中午温度从零度上升了4度，傍晚又下降了2度，那么到傍晚共上升几度？

如图1—6所示，傍晚气温是零上2度，即

$$(+4)+(-2)=+2.$$

（3）相反的两个数相加

例 如果中午从零度上升了4度，下午又下降了4度，共上升几度？

很明显，上升了0度，即

$$(+4)+(-4)=0.$$

通过对上面问题的讨论，可以得到**有理数的加法法则：**

同号两数相加，绝对值相加，符号不变；

异号两数相加，绝对值相减，符号取绝对值较大加数的符号。

至于负数与零相加，很容易看出，它们的和等于这个负数。

根据有理数加法的法则，可以进行多个有理数的加法运算，它们和算术中运算一样，从左向右，遇到括号时，先算括号里面的。

经过实际验证，不难知道加法交换律和结合律对有理数同样适用。

若a，b，c表示任何三个有理数，就有

$$a+b=b+a,$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

2. 有理数的减法

有理数的减法是加法的逆运算，就是已知两个数的和与其中一个加数，求另一个加数的运算。

例 首都体育馆内溜冰场上，运动员膝盖以下的温度是零下5度(−5°C)，看台上的温度是零上28度，那末看台上的温度比溜冰场的温度高多少？

解 据题意即是$(+28)-(-5)=?$

$$(-5)+?=+28.$$

$$\because\quad(-5)+(+33)=+28,$$

$$\therefore\quad(+28)-(-5)=+33.$$

我们知道 $(+28)+(+5)=+33,$

$$\therefore\quad (+28)-(-5)=(+28)+(+5).$$

于是，我们找到这样一个规律：**减去一个数，等于加上这个数的相反的数**．如果a,b表示任何两个有理数，这个规律可表示为

$$a-b=a+(-b).$$

利用上面的条件，我们可以把有理数的减法运算转化为加法运算．这样，有理数的减法就可统一在有理数的加法里．

例 计算：

（1）$(+26)-(-13)$；

（2）$(-25)-(-20)$．

解 （1）$(+26)-(-13)=(+26)+(+13)$
$=26+13=39$；

（2）$(-25)-(-20)=(-25)+(+20)$
$=-25+20=-5$．

在算术里进行减法的运算是有条件限制的，即$a-b$只有在$a>b$时才能进行，而在有理数里，就没有条件限制了，任何两个数相减，其差总是一个唯一确定的有理数．

以上的研究，能使我们得到这样的一个看法：有理数的加法和减法，是算术里的加法和减法向高级的程度发展了一步．**"有比较才能鉴别"**，与算术里的加减法相比较，还可看到在有理数里，两数的和不一定比加数大；两数的差不一定比被减数小，反而可能比被减数大．

定义 几个正数、负数或零的和，叫做代数和．

在代数和里，因为所有的运算都是加法，所以可以把各个加号省略不写．例如，

$$(-10)+(-5)+(+2)$$

$$=-10-5+2.$$