

高等学校教学参考书

微积分学教程

第二卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微 积 分 学 教 程

第二卷 第二分册

Г. М. 菲 赫 金 哥 尔 茨 著

北京大学高等数学教研室译

人 民 教 育 出 版 社

本书第二卷根据菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第二卷 1951 年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微积分学教程

第二卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0109 开本 880×1188 1/32 印张 7 8/16

字数 205,000 印数 37,601—145,800 定价 ¥(6)0.75

1954年5月第1版 1979年12月北京第17次印刷

俄中名詞对照表

А

Абель 亚貝尔
 Абея лемма 亚貝尔引理
 —преобразование 亚貝尔变换
 —признак сходимости 亚貝尔收敛判别法
 —теорема 亚貝尔定理
 абсолютно сходящееся произведение 絕對收敛乘积
 абсолютно сходящийся ряд 絕對收敛級数
 ———, переместительное свойство 絕對收敛級数的可交换性
 ———, умножение 絕對收敛級数的乘法
 Адамар 阿达瑪
 аналитическая функция 解析函数
 аргумент комплексного числа 复数的幅角
 арксинус, главное значение 反正弦的主值
 —, степенной ряд 反正弦的幂級数
 арктангенс, главное значение 反正切的主值
 —, степенной ряд 反正切的幂級数
 Арцела 亚尔齐拉

Б

Бернуллиевы числа 伯努里数
 Бертрана признак 伯特昂判别法
 Бесселевы функции 貝色耳函数
 Бесселя дифференциальное уравнение 貝色耳微分方程
 биномиальный ряд 二項式級数

В

Валлиса формула 瓦理斯公式
 ван-дер-Варден 凡德魏尔登

варианта Бертрана 伯特昂数串
 варианта Даламбера 达郎伯尔数串
 — комплексная 复数貫数
 ———, предел 复数貫数的极限
 варианта Коши 歌西数串
 — Куммера 庫麦尔数串
 — Раабе 拉阿伯数串
 Вейерштрассе 外尔史特拉斯
 Вейерштрасса формула 外尔史特拉斯公式
 Вьета 維也达
 вычисление определённых интегралов, разложение в ряд 定积分展成級数的計算法

Г

гамма-функция 格瑪函数
 ———, вейерштрасса формула 格瑪函数的外尔史特拉斯公式
 ———, дополнения формула 格瑪函数的余元公式
 ———, логарифмическая производная 格瑪函数的对数微商
 ———, рекуррентная формула 格瑪函数的递推公式
 ———, Эйлера-Гаусса формула 格瑪函数的欧拉高斯公式
 гармонический ряд 調和級数
 Гаусс 高斯
 Гаусса признак 高斯判别法
 — Эйлера формула 高斯欧拉公式
 гиперболические функции, сопоставление с тригонометрическими 双曲线函数与三角函数之比較
 гипергеометрический ряд 超越几何級数

гипергеометрическое дифференциальное уравнение 超越几何微分方程
главное значение аргумента комплексного числа 复数幅角的主值
— арксинуса 反正弦的主值
— арктангенса 反正切的主值
— логарифма 对数的主值
— степени 乘方的主值
Гольдбах 过耳巴赫

Д

Даламбера признак 达郎伯尔判别法
двойной ряд 二重级数
дзета-функция 杰塔函数
Дини 狄尼
— теорема 狄尼定理
Дирихле признак 狄锐西勒判别法
— ряды 狄锐西勒级数
дифференциальное уравнение Бесселя 貝色耳微分方程
— гипергеометрическое 超越几何微分方程
дифференцирование ряда, почленное 級数的逐項微分法

З

Зайдель 賽得耳
знакопеременный ряд 交錯級数
—, оценка остатка 交錯級数的誤差估計

И

интегральный признак Коши 歌西积分判别法
интегралы, не выражающиеся в конечном виде 不能表成有限形式的积分
интегрирование радикальных выражений 根式的积分法
— ряда, почленное 級数的逐項积分法

— тригонометрических и показательных выражений 包含三角函数与指数函数的表达式的积分法
интегрируемость предельной функции 极限函数的可积性

К

Каталана постоянная 卡大兰常数
Кеплера уравнение 凯卜勒方程
комплексная варианта 复数变数
— переменная, функции от неё 复变函数
— плоскость 复平面
комплексное число 复数
—, аргумент 复数的幅角
—, вещественная часть 复数的实部
—, действия 复数的运算
—, мнимая часть 复数的虚部
—, модуль 复数的模
—, тригонометрическая форма 复数的三角式
корень из комплексного числа 复数的根
корни из вещественных чисел, вычисление 实数的根式的计算法
косинус, аналитическое определение 余弦的分析定义
—, бесконечное произведение 余弦的无穷乘积
—, степенной ряд 余弦的幂级数
косинус, степенной ряд 余弦的幂级数
—, для логарифма 对数余弦的幂级数
— гиперболический, бесконечное произведение 双曲线余弦的无穷乘积
—, степенной ряд 双曲线余弦的幂级数
котангенс, разложение на простые дроби 正切的部分分式展开式
—, степенной ряд 正切的幂级数
котангенс гиперболический, разложение на простые дроби 双曲线正切的部分分

式展开式

—, степенной ряд 双曲线正切的幂级数
Коши 歌西

— Адамара теорема 歌西阿达玛定理

— признаки 歌西判别法

— теорема 歌西定理

— Хёльдера неравенство 歌西侯耳德尔不等式

кратный ряд 多重级数

Куммера признак 库麦尔判别法

Л

Лагранжа ряд 拉格朗日级数

Ламберта ряд 拉木伯特级数

Лаплас 拉卜拉斯

Лежандра полиномы 勒让德多项式

— функции $F'(k), E(k)$ 勒让德函数 $F'(k)$ 与 $E(k)$

Лейбница теорема 莱不尼慈定理

логарифм комплексного числа 复数的对数

логарифмическая функция, степенной ряд
对数函数的幂级数

логарифмическая функция в комплексной
области 复数域内的对数函数

логарифмы, вычисление 对数的算法

М

мажорантный ряд 优势级数

мажорантных рядов метод 优势级数法

Минковского неравенство 明考斯基不等式

многозначные функции комплексной пе-
ременной 多值的复变函数

Моавра формула 莫霍弗公式

модуль комплексного числа 复数的模

— перехода от натуральных логарифмов
к десятичным 换自然对数成常用对数时
的模

Мэшина формула 马信公式

Н

натуральный логарифм комплексного чи-
сла 复数的自然对数

неабсолютно сходящееся произведение
非绝对收敛乘积

— ряд 非绝对收敛级数

неопределённых коэффициентов метод 未
定系数法

непрерывная функция без производной
没有微商的连续函数

непрерывность предельной функции 极限
函数的连续性

— суммы ряда 级数的和的连续性

— степенного ряда 幂级数的和的连续性

— функции комплексной переменной 复变
连续函数

неравномерная сходимость последовате-
льности, ряда 序列与级数的非一致收敛
性

неравномерности точки 非一致性的点

Неявные функции 隐函数

Ньютон 牛顿

О

обращение степенного ряда 幂级数的反演

остаток ряда 级数的余式

остаточное произведение 余乘积

ось вещественная 实轴

— мнимая 虚轴

оценка остатка ряда 级数余式的估值

П

переместительное свойство абсолютно
сходящегося произведения 绝对收敛乘
积的可交换性

— — — — — ряда 绝对收敛级数的可交换性

π (число), приближённое вычисление 数 π

的近似計算
 повторный ряд 累級数
 подстановка ряда в ряд 把級数代入級数
 показательная функция, связь с тригонометрическими функциями 指数函数与三角函数的联系
 —, степенной ряд 指数函数的幂級数
 — в комплексной области 复数域中的指数函数
 полиномы Лежандра 勒让德多项式
 последовательных приближений метод 逐渐近似法
 почленное дифференцирование ряда 級数的逐項微分法
 — интегрирование ряда 級数的逐項积分法
 — умножение рядов 級数的逐項乘法
 предел интеграла по параметру (предельный переход под знаком интеграла) 积分对于参变量取极限 (积分号下取极限法)
 — функции комплексной переменной 复变函数的极限
 предельная функция, дифференцируемость 极限函数的可微性
 —, интегрируемость 极限函数的可积性
 предельный переход в ряде, почленный 級数的逐項取极限
 приближенные вычисления с помощью рядов 借助于級数作近似計算
 произведение бесконечное 无穷乘积
 —, абсолютно сходящееся 绝对收敛的无穷乘积
 —, признаки сходимости и расходимости 无穷乘积的收敛与发散的判别法
 —, расходящееся 发散的无穷乘积
 —, сходящееся 收敛的无穷乘积
 — остаточное 余乘积
 — частичное 部分乘积

производная функции комплексной переменной 复变函数的微商
 производящая функция для бесселевых функций 貝色耳函数
 — — полиномов Лежандра 勒让德多项式
 простые дроби, разложение функций $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctn} x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ 等函数的部分分式展开式

P

равномерная сходимость ряда, последовательности 級数与序列的一致收敛性
 — —, признаки 級数的一致收敛性的判别法
 — —, условие 級数的一致收敛性的条件
 равномерная сходимость степенного ряда 幂級数的一致收敛性
 расходящееся бесконечное произведение 发散的无穷乘积
 расходящийся ряд 发散級数
 Риман 黎曼
 Римановая теорема 黎曼定理
 ряд (бесконечный) (无穷) 級数
 — гармонический 調和級数
 — гипергеометрический 超越几何級数
 — двойной 二重級数
 — знакопеременный 交錯級数
 — кратный 多重級数
 — Лейбницева типа 萊不尼慈型的級数
 — повторный 累級数
 — расходящийся 发散級数
 — сходящийся абсолютно 绝对收敛級数
 — неабсолютно 非绝对收敛級数
 —, остаток 級数的余式
 —, сумма 級数的和数
 —, условие сходимости 級数的收敛条件
 —, частичная сумма 級数的部分和数

С

Сапогова признак 薩波果夫判別法
 синус, аналитическое определение 正弦的分析定义
 синус, бесконечное произведение 正弦的无穷乘积
 —, степенной ряд 正弦的幂級数
 —, разложение обратной величины на простые дроби $\frac{1}{\sin x}$ 的部分分展开式
 —, степенной ряд для $\log \frac{\sin x}{x} \log \frac{\sin x}{x}$ 的幂級数
 — в комплексной области 复数域中的正弦—гиперболический, бесконечное произведение 双曲綫正弦的无穷乘积
 —, разложение обратной величины на простые дроби $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ 的部分分式展开式
 —, степенной ряд 双曲綫正弦的幂級数
 сочетательное свойство ряда 級数的可結合性
 сравнения теоремы для рядов 对于級数的比較定理
 степенной ряд 幂級数
 —, действия 幂級数的运算
 —, деление 幂級数的除法
 —, дифференцирование 幂級数的微分法
 —, единственность 幂級数的唯一性
 —, интегрирование 幂級数的积分法
 —, круг сходимости 幂級数的收敛圆
 —, непрерывность 幂級数的連續函数
 —, промежутки сходимости 幂級数的收敛区間
 —, радиус сходимости 幂級数的收敛半径

—, с двумя переменными 两个变数的幂級数
 —, с несколькими переменными 多变数的幂級数
 Стирлинг 司特林
 Стирлинга формулы 司特林公式
 Стокс 司鐸克斯
 сумма ряда 級数的和数
 сходимости пограничная абсцисса 收敛边界点
 — принцип 收敛原理
 сходимость бесконечного произведения, признаки 无穷乘积的收敛判別法
 — бесконечного ряда, признаки: 无穷級数的收敛判別法
 Абеля 亞貝耳的
 Бертрана 伯特昂的
 Гаусса 高斯的
 Даламбера 达郎伯尔的
 Дирихле 狄銳西勒的
 Коши 歌西的
 Гуммера 庫麦尔的
 Лейбница 萊不尼慈的
 Раабе 拉阿伯的
 Сапогова 薩波果夫的
 —, —, условие 无穷級数的收敛条件
 сходящееся бесконечное произведение 收敛的无穷乘积
 сходящийся бесконечный ряд 收敛的无穷級数

T

тангенс, разложение на простые дроби 正切的部分分式展开式
 —, степенной ряд 正切的幂級数
 тождество степенных рядов 幂級数之恒等
 тригонометрическая форма комплексного

числа 复数的三角式	
тригонометрические функции, аналитическое определение 三角函数的分析定义	
—, связь с гиперболическими функциями 三角函数与双曲线函数的联系	
—, связь с показательной функцией 三角函数与指数函数的联系	
— в комплексной области 复数域中的三角函数	
Тэйлора ряд 泰乐级数	
— формула 泰乐公式	
—, дополнительный член 泰乐公式的余项	
	У
умножение рядов 级数的乘法	
	Х
	Хёльдера (Коши) Неравенство 侯耳德尔(歌西)不等式
	Ч
	частичная сумма 部分和数
	Ш
	Шлёмилх 石略米翁
	Штейнер 施太纳
	Э
	Эйлер 欧拉
	Эйлера формулы 欧拉公式
	Эйлера-Гаусса формула 欧拉高斯公式
	Эйлерова постоянная 欧拉常数
	Эллиптические интегралы полные 全椭圆积分

第二分册目录

第十一章 常数项无穷级数

- § 1. 引言355
353. 基本概念(255) 354. 例题(256) 355. 基本定理(258)
- § 2. 正项级数的收敛性261
356. 正项级数收敛的条件(261) 357. 级数的比较定理(263) 358. 例题(265) 359. 歌西判别法与达郎伯尔判别法(269) 360. 拉阿伯判别法(271) 361. 例题(274) 362. 库麦尔判别法(276) 363. 高斯判别法(279) 364. 歌西积分判别法(280) 365. 补充材料(284)
- § 3. 任意项级数的收敛性291
366. 绝对收敛性(291) 367. 例题(293) 368. 幂级数、幂级数的收敛区间(294) 369. 交错级数(297) 370. 例题(299) 371. 亚贝尔变换(300) 372. 亚贝尔判别法与狄利克雷判别法(302) 373. 例题(304)
- § 4. 收敛级数的性质308
374. 可结合性(308) 375. 绝对收敛级数的可交换性(310) 376. 非绝对收敛级数的情形(312) 377. 级数的乘法(315) 378. 例题(318) 379. 级数乘法定理的推广(320)
- § 5. 二重级数322
380. 基本概念(322) 381. 正项级数(326) 382. 绝对收敛级数(329) 383. 例题(333) 384. 两个变数的幂级数; 收敛区域(338) 385. 例题(341) 386. 多重级数(342)
- § 6. 无穷乘积343
387. 基本概念(343) 388. 例题(344) 389. 基本定理 与级数的关系(346) 390. 例题(349)
- § 7. 初等函数的展开357
391. 展开函数成幂级数; 泰乐级数(357) 392. 展开指数函数、基本三角函数及其他函数成为级数(359) 393. 对数级数、司特林公式(361) 394. 二项式级数(365) 395. 展开 $\sin x$ 与 $\cos x$ 成无穷乘积(367)
- § 8. 借助于级数作近似计算371
396. 一般说明(371) 397. 数 π 的计算(372) 398. 对数的计算(374) 399. 根式的计算(376)

第十二章 函数序列与函数级数

§ 1. 一致收敛性	378
400. 引言(378) 401. 一致收敛性与非一致收敛性(380) 402. 一致收敛性的条件(385) 403. 级数一致收敛性的判别法(386)	
§ 2. 级数和的函数性质	389
404. 级数和的连续性(389) 405. 逐项取极限(392) 406. 级数的逐项求积分(394) 407. 级数的逐项求微商(396) 408. 序列的观点(400) 409. 幂级数的和的连续性(402) 410. 幂级数积分与微分(406)	
§ 3. 应用	410
411. 逐项取极限的例(410) 412. 级数的逐项求积分的例(413) 413. 级数的逐项求微商的例(422) 414. 隐函数理论中的逐渐近似法(426) 415. 三角函数的分析定义(429) 416. 没有微商的连续函数的例子(431)	
§ 4. 关于幂级数的补充知识	433
417. 利用系数表示收敛半径(433) 418. 关于幂级数的运算(435) 419. 把级数代入级数(438) 420. 例(440) 421. 幂级数的除法(445) 422. 伯努里数及含有伯努里数的展式(447) 423. 利用级数解方程式(451) 424. 幂级数之反演(455) 425. 拉格朗日级数(456)	
§ 5. 复变数的初等函数	459
426. 复数(459) 427. 复数幂数及其极限(461) 428. 复变数的函数(464) 429. 幂级数(466) 430. 指数函数(469) 431. 对数函数(471) 432. 三角函数及反三角函数(473) 433. 乘方函数(477) 434. 例(477)	

第十一章 常数項无穷級数

§ 1. 引言

353. 基本概念 設給定某一无穷数串

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

从这些数所作的符号

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

叫做无穷級数，而(1)中各数叫做級数的項。利用累加記号 Σ ，常把(2)写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2a)$$

这里指标 n 通过所有由 1 到 ∞ 的值*。

依次把級数的各項加起来，作(无穷多个)和数：

$$A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots; \quad (3)$$

这些和数就叫做級数的部分和数(或段)。以后我們將时常把这个部分和数的数串 $\{A_n\}$ 跟級数(2)相参照：因为(2)这个符号正表示上述数串的结果。

如果級数(2)的部分和数 A_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时具有有穷或无穷(但有确定的正号或負号的)极限 A ：

$$A = \lim A_n,$$

那么这个极限就叫做級数的和数并写

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

* 但是，級数的項的下标，不从 1 开始，而从 0 或任何一个大于 1 的自然数开始，有时是更方便的。

这就给了符号(2)或(2a)以数值的意义。如果级数具有有穷和数,就叫它是收敛的,相反的情况(即是,如果和数等于 $\pm\infty$,或根本没有和数),就叫它是发散的。

这样,级数(2)收敛的问题,依定义,就与数串(3)的有穷极限存在的問題相同。相反地,无论事先取什么样的数串 $x = x_n (n=1, 2, 3, \dots)$,这个数串的有穷极限存在的問題都可以化成级数

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots \quad (4)$$

收敛的问题,数串 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 的顺次的每个值恰恰就是级数(4)的部分和数。而且级数的和数就与数串的极限一致。

换句话说,研究无穷级数及其和数不过是研究数串及其极限的一种新的形式。但是,读者在以后的叙述中可以看到,无论在确定极限本身存在的时候,或者在计算这极限的时候,这种形式都显示着无法估价的优越性。这种情况就使无穷级数成为数学分析及其应用中最重要的研究工具。

354. 例题 1) 无穷级数的最简单的例子是读者熟知的几何级数:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

这个几何级数的部分和数是(如果 $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

如果级数的公比 q ,其绝对值小于1,那么[如我們已经知道的,25,7)] s_n 具有有穷极限

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

也就是所说级数收敛,而 s 是它的和数。

当 $|q| \geq 1$ 时,这个级数就是发散级数的例子。如果 $q \geq 1$,级数的和数就是无穷(有确定的正号或负号);在其他情形下,和数根本不存在。我們指出,特别地,当 $a=1$ 及 $q=-1$ 时,就得到一个有趣的级数:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) \dots^*$$

* 如果级数的某一项是负数: $a = -b$ (其中 $b > 0$),那么可不必写作 $\dots + (-b) + \dots$,而写作 $\dots - b + \dots$ 。我們强调,这儿级数的项仍然是 $-b$,而不是 b 。

這個級數的部分和數輪流地一會兒等於 1, 一會兒等於 0。

2) 展開成無窮小數

$$C_0 \cdot C_1 C_2 C_3 \cdots C_n \cdots$$

的實數 α [9], 顯然是下列級數的和數:

$$\alpha = C_0 + \frac{C_1}{10} + \frac{C_2}{10^2} + \frac{C_3}{10^3} + \cdots + \frac{C_n}{10^n} + \cdots$$

3) 依(4)的樣式作成的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [\log(n+1) - \log n]$$

顯然是發散的, 因為 $\log(n+1) \rightarrow \infty$ 。

4) 在實質上同樣的觀念下也可作成級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

因為第 n 部分和數 (以後簡稱第 n 和——譯者) 等於 $1 - \frac{1}{n+1}$, 所以級數收斂並且具有和數 1。

5) 容易確定級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

的發散性。實際上, 因為這個級數的項是遞降的, 所以它的第 n 和

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

但這個第 n 和隨着 n 的無限增大而趨於無窮。

6) 最後, 我們給出一個值得一提的數串的例子:

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

關於這個數串, 在第 37 目中我們已證明過它趨於數 e 。這就等於斷定: e 是下面無窮級數的和數:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

回憶一下第 37 目中數 e 的近似計算, 從這個例子, 讀者可以看出繼續引進愈來愈不緊

要的校正数的好处，这种好处就在于这些校正数是把用部分和的形式表示出的 e 的近似值来逐步地加以改进。

355. 基本定理 如果在级数(2)中弃去前面的 m 个项，就得到级数：

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \quad (5)$$

即所谓级数(2)第 m 项后的余式。

1° 如果级数(2)收敛，则它的任何一个余式(5)也收敛；反之，从余式(5)的收敛性可推出原来的级数(2)的收敛性。

固定 m ，并用 A'_k 表示级数(5)的第 k 和：

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}.$$

于是，显然

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \quad (6)$$

如果级数(2)收敛，于是 $A_n \rightarrow A$ ，那么——当 k 无限增大时——就存在一个有穷极限

$$A' = A - A_m \quad (7)$$

而对于和数 A'_k 来说，这就表示级数(5)的收敛性。

反之，如果已知级数(5)收敛，于是 $A'_k \rightarrow A'$ ，那么在等式(6)中令 $k = n - m$ (当 $n > m$ 时)，改写等式(6)成为：

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

由此就可以看出，当 n 无限增大时，部分和数 A_n 具有极限

$$A = A_m + A', \quad (8)$$

即是，级数(2)收敛。

换个说法：弃去级数前面的有限个项或在级数前面加进若干新的项，并不影响级数的性质（在级数的收敛性或发散性的意义上的性质）。

不用 A' 而用符号 α_m 表示级数(5)的和数（如果级数(5)收敛的话），新符号的下标指出在什么项以后取余式。于是公式(8)与公式(7)

可改寫成下面的形式：

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \quad (9)$$

如果把 m 增大到無窮，則 $A_m \rightarrow A$ ，而 $\alpha_m \rightarrow 0$ 。所以：

2° 如果級數(2)收斂，則它的第 m 項後的余式的和數 α_m 隨着 m 的增大而趨于 0。

我們提出收斂級數的如下的一些簡單性質：

3° 如果以同一因數 c 去乘收斂級數(2)的各項，則它的收斂性并不受到破壞(而僅僅在和數上乘以 c)。

實際上，級數

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

的部分和數 \bar{A}_n 顯然等于

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

並且具有極限 cA 。

4° 兩個收斂級數

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

與

$$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots$$

可以逐項相加(或相減)，於是級數

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) + \cdots$$

也收斂，而它的和數相應地等于 $A \pm B$ 。

如果 A_n, B_n 與 C_n 分別表示上述級數的部分和數，那麼，顯然，

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

取極限，得到

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

這就證明瞭我們的論斷。

我們現在來確定級數(2)的收斂性的一般條件。因為這收斂性與

数串 A_n 的有穷极限的存在性相当，所以，回忆一下第 39 目中数串情形的收敛原则，就可以把这个原则翻译成适用于级数的收敛原则：

5° 级数(2)收敛的充分与必要条件是：对应于每一数 $\varepsilon > 0$ ，有如此的数 N ，使得当 $n > N$ 时，不管是怎样的 $m = 1, 2, 3, \dots$ ，不等式

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon \quad (10)$$

成立。

可是，在实际问题中利用这个条件通常是困难的；所以在级数的理论中要建立许许多多收敛性(与发散性)的判别法。这些判别法不像收敛原则那样有普遍性，它们只给出充分条件，但它们是简单的而且总合起来可以解决所有实际的需要。下面两节就是专用来讲述这些判别法的。

最后，还要作一点说明：假定级数是收敛的，如果在不等式(10)中，特别地，取 $m = 1$ ，就得到：

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \text{ (当 } n > N \text{ 时),}$$

于是 $a_{n+1} \rightarrow 0$ 或(同样地) $a_n \rightarrow 0$ 。这样一来：

6° 收敛级数的普遍项 a_n 趋于 0。

这也完全可用初等方法来证明：既然 A_n (A_{n-1} 也与 A_n 一样)具有有穷极限 A ，所以

$$a_n = A_n - A_{n-1} \rightarrow 0.$$

上述断言中包含着我们时常要利用的级数收敛性的必要条件。当违反这一条件时，级数显然是发散的。但这是很重要的，就是应该强调这个条件比收敛原则所要求的少得多，而且条件本身并不是级数收敛性的充分条件。换句话说，即使在这一条件满足时，级数也可能发散。上面[354, 3) 与 5)]考察过的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$