高等学校教学参考书

微积分学教程

第二卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微积分学教程

第二卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社

本书第二卷根据菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著《微积分学教程》（Курс дифференциального и интегрального исчисления）第二卷1951年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微积分学教程

第二卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

北京大学高等数学教研室译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0109　开本 850×1168　1/32　印张 7 5/16

字数 205,000　印数 87,601—145,800 定价¥(6)0.75

1954年5月第1版　1979年12月北京第17次印刷

俄中名詞对照表

А

Абель 亚貝尔
Абеля лемма 亚貝尔引理
—преобразование 亚貝尔变换
—признак сходимости 亚貝尔收斂判別法
—теорема 亚貝尔定理
абсолютно сходящееся произведение 絕对收斂乘积
абсолютно сходящийся ряд 絕对收斂級数
———, переместительное свойство 絕对收斂級数的可交換性
———, умножение 絕对收斂級数的乘法
Адамар 阿达瑪
аналитическая функция 解析函数
аргумент комплексного числа 复数的輻角
арксинус, главное значение 反正弦的主値
—, степенной ряд 反正弦的冪級数
арктангенс, главное значение 反正切的主値
—, степенной ряд 反正切的冪級数
Арцела 亚尔齐拉

Б

Бернуллиевы числа 伯努里数
Бертрана признак 伯尔特昂判別法
Бесселевы функции 貝色耳函数
Бесселя дифференциальное уравнение 貝色耳微分方程
биномиальный ряд 二項式級数

В

Валлиса формула 瓦理斯公式
ван-дер-Варден 凡德魏尔登
варианта Бертрана 伯尔特昂数串
варианта Даламбера 达郎伯尔数串
— комплексная 复数貫数
——, предел 复数貫数的极限
варианта Коши 歌西数串
— Куммера 庫麦尔数串
— Раабе 拉阿伯数串
Вейерштрасс 外尔史特拉斯
Вейерштрасса формула 外尔史特拉斯公式
Виета 維也达
вычисление определённых интегралов, разложение в ряд 定积分展成級数的計算法

Г

гамма-функция 格瑪函数
——, вейерштрасса формула 格瑪函数的外尔史特拉斯公式
——, дополнения формула 格瑪函数的余元公式
——, логарифмическая производная 格瑪函数的对数微商
——, рекуррентная формула 格瑪函数的递推公式
——, Эйлера-Гаусса формула 格瑪函数的欧拉高斯公式
гармонический ряд 調和級数
Гаусс 高斯
Гаусса признак 高斯判別法
— Эйлера формула 高斯欧拉公式
гиперболические функции, сопоставление с тригонометрическими 双曲綫函数与三角函数之比較
гипергеометрический ряд 超越几何級数

гипергеометрическое дифференциальное уравнение 超越几何微分方程
главное значение аргумента комплексного числа 复数輻角的主値
—— арксинуса 反正弦的主値
—— арктангенса 反正切的主値
—— логарифма 对数的主値
—— степени 乘方的主値
Гольдбах 过耳巴赫

Д

Даламбера признак 达郎伯尔判別法
двойной ряд 二重級数
дзета-функция 杰塔函数
Дини 狄尼
— теорема 狄尼定理
Дирихле признак 狄銳西勒判別法
— ряды 狄銳西勒級数
дифференциальное уравнение Бесселя 貝色耳微分方程
—— гипергеометрическое 超越几何微分方程
дифференцирование ряда, почленное 級数的逐項微分法

З

Зайдель 賽得耳
знакопеременный ряд 交錯級数
——, оценка остатка 交錯級数的誤差估計

И

интегральный признак Коши 歌西积分判別法
интегралы, не выражающиеся в конечном виде 不能表成有限形式的积分
интегрирование радикальных выражений 根式的积分法
— ряда, почленное 級数的逐項积分法
— тригонометрических и показательных выражений 包含三角函数与指数函数的表达式的积分法
интегрируемость предельной функции 极限函数的可积性

К

Каталана постоянная 卡大兰常数
Кеплера уравнение 凱卜勒方程
комплексная варианта 复数貫数
— переменная, функции от неё 复变函数
— плоскость 复平面
комплексное число 复数
——, аргумент 复数的輻角
——, вещественная часть 复数的实部
——, действия 复数的运算
——, мнимая часть 复数的虛部
——, модуль 复数的模
——, тригонометрическая форма 复数的三角式
корень из комплексного числа 复数的根
корни из вещественных чисел, вычисление 实数的根式的計算法
косинус, аналитическое определение 余弦的分析定义
—, Бесконечное произведение 余弦的无穷乘积
—, степенной ряд 余弦的幂級数
косинус, степенной ряд 余弦的幂級数
—, для логарифма 对数余弦的幂級数
— гиперболический, бесконечное произведение 双曲綫余弦的无穷乘积
——, степенной ряд 双曲綫余弦的幂級数
котангенс, разложение на простые дроби 正切的部分分式展开式
—, степенной ряд 正切的幂級数
котангенс гиперболический, разложение на простые дроби 双曲綫正切的部分分

式展开式

——,степенной ряд 双曲綫正切的幂級数

Коши 歌西

— Адамара теорема 歌西阿达瑪定理

— признаки 歌西判别法

— теорема 歌西定理

— Хёльдера неравенство 歌西侯耳德尔不等式

кратный ряд 多重級数

Куммера признак 庫麦尔判别法

Л

Лагранжа ряд 拉格朗日級数

Ламберта ряд 拉木伯特級数

Лаплас 拉卜拉斯

Лежандра полиномы 勒让德多項式

— функции $F(k)$, $E(k)$ 勒让德函数 $F(k)$ 与 $E(k)$

Лейбница теорема 莱不尼慈定理

логарифм комплексного числа 复数的对数

логарифмическая функция, степенной ряд 对数函数的幂級数

логарифмическая функция в комплексной области 复数域内的对数函数

логарифмы, вычисление 对数的計算法

М

мажорантный ряд 优势級数

мажорантных рядов метод 优势級数法

Минковского неравенство 明考斯基不等式

многозначные функции комплексной переменной 多值的复变函数

Моавра формула 莫窪弗公式

модуль комплексного числа 复数的模

—перехода от натуральных логарифмов к десятичным 换自然对数成常用对数时的模

Мэшина формула 馬信公式

Н

натуральный логарифм комплексного числа 复数的自然对数

неабсолютно сходящееся произведение 非絕对收斂乘积

——ряд 非絕对收斂級数

неопределённых коэффициентов метод 未定系数法

непрерывная функция без производной 沒有微商的連續函数

непрерывность предельной функции 极限函数的連續性

—суммы ряда 級数的和的連續性

——степенного ряда 幂級数的和的連續性

—функции комплексной переменной 复变連續函数

неравномерная сходимость последовательности, ряда 序列与級数的非一致收斂性

неравномерности точки 非一致性的点

Неявные функции 隐函数

Ньютон 牛頓

О

обращение степенного ряда 幂級数的反演

остаток ряда 級数的余式

остаточное произведение 余乘积

ось вещественная 实軸

—мнимая 虛軸

оценка остатка ряда 級数余式的估值

П

переместительное свойство абсолютно сходящегося произведения 絕对收斂乘积的可交换性

————ряда 絕对收斂級数的可交换性

π(число), приближённое вычисление 数π

C

Сапогова признак 薩波果夫判别法

синус, аналитическое определение 正弦的分析定义

синус, бесконечное произведение 正弦的无穷乘积

—, степенной ряд 正弦的幂級数

—, разложение обратной величины на простые дроби $\frac{1}{\sin x}$ 的部分分展开式

—, степенной ряд для $\log\frac{\sin x}{x}$ $\log\frac{\sin x}{x}$ 的幂級数

—в комплексной области 复数域中的正弦

—гиперболический, бесконечное произведение 双曲綫正弦的无穷乘积

——, разложение обратной величины на простые дроби $\frac{1}{\operatorname{sh}x}$ 的部分分式展开式

——, степенной ряд 双曲綫正弦的幂級数

сочетательное свойство ряда 級数的可結合性

сравнения теоремы для рядов 对于級数的比較定理

степенной ряд 幂級数

——, действия 幂級数的运算

——, деление 幂級数的除法

——, дифференцерование 幂級数的微分法

——, единственность 幂級数的唯一性

——, интегрирование 幂級数的积分法

——, круг сходимости 幂級性的收斂圓

——, непрерывность 幂級数的連續函数

——, промежуток сходимости 幂級数的收斂区間

——, радиус сходимости 幂級数的收斂半徑

——, с двумя переменными 两个变数的幂級数

——, с несколькими переменными 多变数的幂級数

Стирлинг 司特林

Стирлинга формулы 司特林公式

Стокс 司鐸克斯

сумма ряда 級数的和数

сходимости пограничная абсцисса 收斂边界点

—принцип 收斂原理

сходимость бесконечного произведения, признаки 无穷乘积的收斂判别法

—бесконечного ряда, признаки: 无穷級数的收斂判别法

Абеля 亚貝耳的

Бертрана 伯尔特昂的

Гуасса 高斯的

Даламбера 达郎伯尔的

Дирихле 狄銳西勒的

Коши 歌西的

Куммера 庫麦尔的

Лейбница 萊不尼慈的

Раабе 拉阿伯的

Сапогова 薩波果夫的

———, условие 无穷級数的收斂条件

сходящееся бесконечное произведение 收斂的无穷乘积

сходящийся бесконечный ряд 收斂的无穷級数

T

тангенс, разложение на простые дроби 正切的部分分式展开式

—, степенной ряд 正切的幂級数

тождество степенных рядов 幂級数之恒等

тригонометрическая форма комплексного

第二分册目录

第十一章　常数項无穷級数

第十二章 函数序列与函数級数

第十一章　常数項无穷級数

§1. 引言

353. 基本概念　設給定某一无穷数串

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

从这些数所作的符号

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{2}$$

叫做无穷級数，而(1)中各数叫做級数的項。利用累加記号Σ，常把(2)写作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2a}$$

这里指标n通过所有由1到∞的值*。

依次把級数的各項加起来，作(无穷多个)和数：

$$A_1=a_1,\ A_2=a_1+a_2,\ A_3=a_1+a_2+a_3,\ \cdots,\ A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \cdots; \tag{3}$$

这些和数就叫做級数的部分和数(或段)。以后我們将时常把这个部分和数的数串$\{A_n\}$跟級数(2)相参照：因为(2)这个符号正表示上述数串的結果。

如果級数(2)的部分和数 A_n 当 $n\to\infty$ 时具有有穷或无穷(但有确定的正号或負号的)极限 A：

$$A=\lim A_n,$$

那么这个极限就叫做級数的和数并写

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

* 但是，級数的項的下标，不从1开始，而从0或任何一个大于1的自然数开始，有时是更方便的。

这就給了符号(2)或(2a)以数值的意义。**如果級数具有有穷和数，就叫它是收斂的，相反的情况(即是，如果和数等于$\pm\infty$，或根本沒有和数)，就叫它是发散的。**

这样，級数(2)收斂的問題，依定义，就与数串(3)的有穷极限存在的問題相同。相反地，无論事先取什么样的数串 $x=x_n(n=1,2,3,\cdots)$，这个数串的有穷极限存在的問題都可以化成級数

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})+\cdots \tag{4}$$

收斂的問題，数串 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 的順次的每个值恰恰就是級数(4)的部分和数。而且級数的和数就与数串的极限一致。

換句話說，研究无穷級数及其和数不过是研究数串及其极限的一种新的形式。但是，讀者在以后的叙述中可以看到，无論在确定极限本身存在的时候，或者在計算这极限的时候，这种形式都显示着无法估价的优越性。这种情况就使无穷級数成为数学分析及其应用中最重要的研究工具。

354. 例題 1) 无穷級数的最簡单的例子是讀者熟知的几何級数：

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

这个几何級数的部分和数是(如果 $q\neq1$)

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

如果級数的公比 q，其絕对值小于1，那么[如我們已經知道的，**25**, 7)] s_n 具有有穷极限

$$s=\frac{a}{1-q},$$

也就是所說級数收斂，而 s 是它的和数。

当 $|q|\geqslant1$ 时，这个級数就是发散級数的例子。如果 $q\geqslant1$，級数的和数就是无穷(有确定的正号或負号)；在其他情形下，和数根本不存在。我們指出，特别地，当 $a=1$ 及 $q=-1$ 时，就得到一个有趣的級数：

$$1-1+1-1+\cdots\equiv1+(-1)+1+(-1)\cdots^*.$$

---

* 如果級数的某一項是負数：$a=-b$ (其中 $b>0$)，那么可不必写作 $\cdots+(-b)+\cdots$，而写作 $\cdots-b+\cdots$。我們强調，这儿級数的項仍然是 $-b$，而不是 b。

这个級数的部分和数輪流地一会儿等于 1, 一会儿等于 0。

2) 展开成无穷小数

$$C_0 \cdot c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdots$$

的实数 a[9], 显然是下列級数的和数:

$$a = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots$$

3) 依(4)的样式作成的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} [\log(n+1) - \log n]$$

显然是发散的, 因为 $\log(n+1) \to \infty$。

4) 在实质上同样的观念下也可作成級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

因为第 n 部分和数（以后簡称第 n 和——譯者）等于 $1-\frac{1}{n+1}$, 所以級数收斂幷且具有和数 1。

5) 容易确定級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

的发散性。实际上, 因为这个級数的項是遞降的, 所以它的第 n 和

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

但这个第 n 和随着 n 的无限增大而趋于无穷。

6) 最后, 我們給出一个值得一提的数串的例子:

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

关于这个数串, 在第 **37** 目中我們已証明过它趋于数 e。这就等于断定: e 是下面无穷級数的和数:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

回忆一下第 **37** 目中数 e 的近似計算, 从这个例子, 讀者可以看出继續引进愈来愈不紧

要的校正数的好处，这种好处就在于这些校正数是把用部分和数的形式表示出的 e 的近似值来逐步地加以改进。

355. 基本定理 如果在級数(2)中弃去前面的 m 个項，就得到級数：

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{5}$$

即所謂級数(2)第 m 項后的余式。

1° 如果級数(2)**收斂，則它的任何一个余式**(5)**也收斂；反之，从余式**(5)**的收斂性可推出原来的級数**(2)**的收斂性。**

固定 m，并用 A'_k 表示級数(5)的第 k 和：

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}.$$

于是，显然

$$A'_k=A_{m+k}-A_m. \tag{6}$$

如果級数(2)收斂，于是 $A_n \to A$，那么——当 k 无限增大时——就存在一个有穷极限

$$A'=A-A_m \tag{7}$$

而对于和数 A'_k 来說，这就表示級数(5)的收斂性。

反之，如果已知級数(5)收斂，于是 $A'_k \to A'$，那么在等式(6)中令 $k=n-m$(当 $n>m$ 时)，改写等式(6)成为：

$$A_n=A_m+A'_{n-m};$$

由此就可以看出，当 n 无限增大时，部分和数 A_n 具有极限

$$A=A_m+A', \tag{8}$$

即是，級数(2)收斂。

换个說法：**弃去級数前面的有限个項或在級数前面加进若干新的項，并不影响級数的性质**(在級数的收斂性或发散性的意义上的性质)。

不用 A' 而用符号 α_m 表示級数(5)的和数(如果級数(5)收斂的話)，新符号的下标指出在什么項以后取余式。于是公式(8)与公式(7)

可改写成下面的形式:

$$A=A_m+\alpha_m,\quad \alpha_m=A-A_m \tag{9}$$

如果把 m 增大到无穷, 則 $A_m\to A$, 而 $\alpha_m\to 0$。所以:

2° 如果級数(2)收斂, 則它的第 m 項后的余式的和数 α_m 随着 m 的增大而趋于 0。

我們提出收斂級数的如下的一些簡单性质:

3° 如果以同一因数 c 去乘收斂級数(2)的各項, 則它的收斂性并不受到破坏(而仅仅在和数上乘以 c)。

实际上, 級数

$$ca_1+ca_2+\cdots+ca_n+\cdots$$

的部分和数 $\bar{A}_n$ 显然等于

$$\bar{A}_n=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)=cA_n$$

并且具有极限 cA。

4° 两个收斂級数

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

与

$$B=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

可以逐項相加(或相减), 于是級数

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)+\cdots$$

也收斂, 而它的和数相应地等于 $A\pm B$。

如果 A_n, B_n 与 C_n 分别表示上述級数的部分和数, 那么, 显然,

$$C_n=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)=A_n\pm B_n.$$

取极限, 得到

$$\lim C_n=\lim A_n\pm\lim B_n,$$

这就证明了我們的論断。

我們現在来确定級数 (2) 的收斂性的一般条件。因为这收斂性与

数串 A_n 的有穷极限的存在性相当，所以，回忆一下第 **39** 目中数串情形的收斂原则，就可以把这个原則翻譯成适用于級数的收斂原則：

5° 級数(2)**收斂的充分与必要条件是：对应于每一数** $\varepsilon>0$，**有如此的数** N，**使得当** $n>N$ **时，不管是怎样的** $m=1, 2, 3, \cdots$，**不等式**

$$|A_{n+m}-A_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon \tag{10}$$

成立。

可是，在实际問題中利用这个条件通常是困难的；所以在級数的理論中要建立許許多多收斂性(与发散性)的判別法。这些判別法不像收斂原則那样有普遍性，它們只給出充分条件，但它們是簡单的而且总合起来可以解决所有实际的需要。下面两节就是专用来讲述这些判別法的。

最后，还要作一点說明：假定級数是收斂的，如果在不等式(10)中，特別地，取 $m=1$，就得到：

$$|a_{n+1}|<\varepsilon(\text{当 } n>N \text{ 时}),$$

于是 $a_{n+1}\to 0$ 或(同样地)$a_n\to 0$。这样一来：

6° 收斂級数的普遍項 a_n **趋于** 0。

这也完全可用初等方法来证明：既然 A_n (A_{n-1} 也与 A_n 一样)具有有穷极限 A，所以

$$a_n=A_n-A_{n-1}\to 0.$$

上述断言中包含着我們时常要利用的級数收斂性的必要条件。当違反这一条件时，級数显然是发散的。但这是很重要的，就是应該强調这个条件比收斂原則所要求的少得多，而且条件本身并不是級数收斂性的充分条件。換句話說，即使在这一条件滿足时，級数也可能发散。上面[**354**, 3) 与 5)]考察过的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\text{与}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$