霍爾乃特

高中三角學

李友梅譯

湘芬書局印行

本書是根據蘇聯七年制中學及十年制中學8——10 年級代數教科書編譯的。原書爲蘇聯吉西略夫 (А. П. КИСЕЛЁВ) 所著, 1949 年, 莫斯科出版。

冊目錄

習 題 目 錄

第八章　方程的討論

I　一元一次方程的討論

123. 討論方程的意義是什麼　討論方程是研究解方程時所有可能出現的特殊情形，並且解釋這些情形在組成這方程的問題裏具有的意義。

124. 一元一次方程的一般形式　我們在初中代數的 §88 中已經學過，所有一元一次方程經過一切可能的整理（脫括號，去分母，移項，併項等）後，可寫成如下的簡單形式：

$$ax=b,$$

式中文字 a 和 b 的值，可為正數、負數或等於零。

現在我們來討論，在 a 和 b 的各種數值下，這方程將有多少種解。

125. 正解　正解只有當 a 和 b 皆為正數或皆為負數時才能得到，例如：$3x=6$ 或 $-3x=-6$。由這兩式可得

$$x=\frac{6}{3}=2,\quad \text{或}\quad x=\frac{-6}{-3}=2.$$

若方程能將問題的一切條件都包含在內，則適合於這方程的正解必能滿足於問題；但若問題的全部條件沒有完全包含在方程內，那麼由此所求得的正解，就可能不適合於該問題。關於這點我們舉個例子來說明：

〔問題〕　由 20 個工人（成年人和未成年人）組成的一個小組大家湊錢為圖書館買書，成年人每人拿出 3 萬元，未成年人每人拿出 1 萬元，若共湊了 35 萬元，則這個小組裏，有多少個成年人和多少個未成年人？

設成年的人數為 x，則未成年的人數為 $20-x$，而成年人共湊了 $3x$ 萬元，未成年人共湊 $(20-x)$ 萬元；因而得出下面的方程：

$$3x+(20-x)=35,\quad \text{由此得}\quad x=7\frac{1}{2}.$$

這個正解，雖適合於方程，但不適合於問題。因為按照問題的性質，

未知數 x 應該是整數，但這個方程裏沒有含未知數應該是整數的條件，而得一分數解。因此這個問題沒有解。

126. 負解 在方程 $ax=b$ 裏，只有當 a 與 b 符號相反時才能得負解，例如：

$$5x=-15,\quad \text{或}\quad -5x=15;$$

於是 $$x=\frac{-15}{5}=-3,\quad \text{或}\quad x=\frac{15}{-5}=-3.$$

對於負解 $x=-m$，我們應作如下的理解：假設 $-m$ 適合於方程 $ax=b$，於是將 $-m$ 代入方程後，便得等式 $-am=b$，由這等式看出，正解 m 能適合另一方程 $-ax=b$；而此方程可看做是將上面方程中的 x 換成 $-x$ 而得到的。由此可知，若根據某問題而作成一個具有負解 $x=-m$ 的方程，則可把 x 換成 $-x$ 而得一新方程，這新方程應有正解 $x=m$。

但是這個新方程不能由原問題直接得出，故若想得到正解 $x=m$，必須將原問題加以適當的改變。舉一簡單的例題來說明：

父親 40 歲，兒子 10 歲，幾年後父親的歲數是兒子的 7 倍？

設以 x 爲未知數。很明顯，x 年後父親的歲數爲 $40+x$，而兒子的歲數爲 $10+x$，由題設的條件列出方程：

$$40+x=7(10+x),\quad \text{由此得}\quad x=-5.$$

在方程裏，若將 x 變爲 $-x$，則可得出新方程：

$$40-x=7(10-x),$$

這個方程的解是正數。但是產生這個方程的問題是已經變了，它是問多少年以前父親的歲數是兒子的 7 倍。

由這個例子可以看到，負解應該理解爲與正解有恰相反的意義。若正解表示某事件後的時間，則負解表示這事件前的時間；若正解表示收入，則負解表示支出等等。若按問題的意思，未知數 x 不能有兩個相反的意義時，則負解將表明那個問題沒有解。

127. 零解 假設在方程 $ax=b$ 中，$b=0$ 而係數 $a\neq 0$，例如方程 $4x=0$，就是乘積 $4x$ 等於零。但我們知道，只有乘積中的某乘數等於零時，乘積才等於零，所以 x 應爲零。或由式子的運算上也可得出 $x=\frac{0}{4}$，即 $x=0$。

問題。於分數 $\frac{13}{26}$ 的分子及分母同加上什麼數，這分數方能成爲 $\frac{1}{2}$？

用 x 代表加數，我們得方程：

$$\frac{13+x}{26+x}=\frac{1}{2},$$

由此得 $$26+2x=26+x, \quad 即\ x=0.$$

此即分數本身就等於 $\frac{1}{2}$。

128. 方程無根的情形 於方程 $ax=b$ 中，a 爲零而 b 不等於零時，例如：$0\cdot x=10$，像這樣的等式是不能成立的，因爲 x 不論是什麼數，乘積 $0\cdot x$ 都必等於零，而不能等於 10。又例如方程：

$$\frac{x}{2}-4+\frac{x}{3}=7+\frac{5x}{6}.$$

用一般的方法即可解此方程，去分母（公分母爲 6）得

$$3x-24+2x=42+5x,$$

即 $5x=66+5x$ 或 $5x-5x=66$。

無論 x 是什麼值，$5x-5x$ 恆爲零，而不是 66。即此方程無根。

若最初不知係數 $a=0$，用它除方程 $ax=b$ 的兩邊，則得 $x=\frac{b}{a}$。及至知道 $a=0$ 時，那末上式就變爲 $x=\frac{b}{0}$。但以零爲除數是不可能的，所以從最後的式子裏可以得出結論：若 $a=0$，則方程 $ax=b$ 無根（即問題無解）。但僅限於這一種結論還是不足的，我們更應該指出另一個重要的情況，爲了解釋這個情況，應預先觀察當分數分子不變、分母無限縮小時，分數值的變化。

129. $\frac{m}{0}=\pm\infty$ 的意義 設在分數 $\frac{m}{n}$ 中，其分母 n 的絕對值無限縮小，而趨近於零，但分子不變。例如分母 n 按以下各值逐漸縮小：

$n=0.1$; $n=0.01$; $n=0.001$; $n=0.0001$, 等等。

由此，分數可得到一些逐漸擴大的數值：

$\frac{m}{0.1}=10m$; $\frac{m}{0.01}=100m$; $\frac{m}{0.001}=1000m$; $\frac{m}{0.0001}=10000\,m$, 等等。

很明顯，當分子不變而分母無限趨近於零，則分數$\frac{m}{n}$(分子或分母均可爲負數)的絕對值將無限增大。這種情形用式子簡單地表示則爲：

$$\frac{m}{0}=\pm\infty,$$

式中符號∞是表示'無限大'。但不要把它了解爲一個數，因爲用零作除數本來是不可能的，在這裏只簡單地表示這分數的絕對值無限增大(或如一般所說的趨近無限大)的意思。若分母趨近於零，而分子不變，則分數變爲正無限大或負無限大(應視趨近於零的分母與分子的符號是相同或相異而定)。

130. §128的補充 現在我們可以補充§128的討論如下：

當$a=0$時，方程$ax=b$無根；但假如a不等於零而是趨近於零時，則根的絕對值無限增大。

131. 不定解 設在方程$ax=b$中，二數a和b都是零，則方程變爲恆等式：$0\cdot x=0$，對於x的一切值都正確。即在這種情形，方程成爲不定的，也就是它有無數的任意解。

若不知a等於零，以a除方程的兩邊，則x等於分數$\frac{b}{a}$。當 $b=a=0$時，這分數成爲$\frac{0}{0}$。這種式子沒有任何一定的數值。

我們來研究下面的問題：

問題。應在分數$\frac{b}{a}$的分母及分子加上什麼數，才使這分數能等於m?

設所求的數爲x，則得下列方程：

$$\frac{a+x}{b+x}=m$$

由此，$a+x=bm+mx$; $x-mx=bm-a$; $(1-m)x=bm-a$。

若　$m \neq 1$，則 $x=\dfrac{bm-a}{1-m}$。

若　$m=1$，而差 $b-a$ 爲零以外的任意數(正或負)，則得

$$0\cdot x=b-a.$$

由此我們可以知道，當 $m=1$ 及 $b\neq a$ 時，沒有任何的 x 值能適合這個問題；但假如 m 不等於 1 而只是趨近於 1，則 x 的絕對值無限增大。

若　$m=1$ 及 $b=a$ 時，則得

$$0\cdot x=0.$$

從此式可以知道，x 的任何數值都適合題意(實際是分數 $\dfrac{a+x}{a+x}$ 對於 x 的一切值都等於 1)。

132. 方程 $ax=b$ 的解的圖象　方程的左邊用 y_1、右邊用 y_2 表示，在同一坐標系中作兩個表示函數 $y_1=ax$ 和 $y_2=b$ 的圖象。

第一函數的圖象是過原點和點$(1, a)$的直線；

第二函數的圖象是平行於 x 軸且 y 軸截距爲 b 的直線(如圖 31，這是表示 $a>0$ 和 $b>0$ 的情形；學者可自作以下幾種情形的圖象：1)$a>0$，但 $b<0$；2)$a<0$ 但 $b>0$；3)$a<0$ 和 $b<0$)。這兩條直線相交於 M 點，這點的橫坐標 OA 就是方程 $ax=b$ 的根，因爲當橫坐標等於 OA 時，則直線 $y_1=ax$ 的縱坐標等於直線 $y_2=b$ 的縱坐標，因此 $ax=b$。

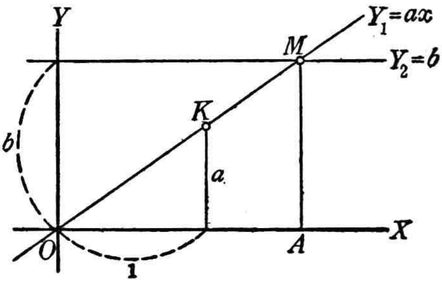

圖　31

用這類圖形表示法我們能够直觀地解釋方程 $ax=b$ 的解的所有情形。現在只就圖來說明下面兩種情形：

1) 方程無解；　2) 方程有不定解。

1) 方程無解(圖 32)。係數 a 的值愈減小，則直線 $y=ax$ 愈接近 x 軸，於是直線 $y=b$ 與直線 $y=ax$ 的交點 M 隨之而向右移至 M_1、M_2、M_3，等

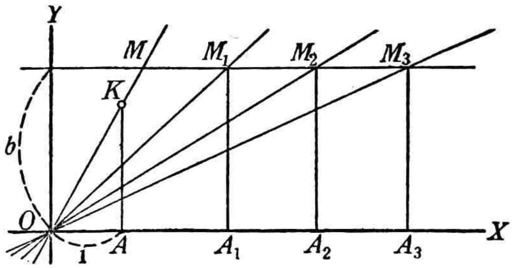

圖 32

等．這時橫坐標 OA 也逐漸增大，而變爲 OA_1、OA_2、OA_3，等等．這就是說，當 a 無限縮小趨近於零時，則方程 $ax=b$ 的根，便無限增大（可以這樣表示：$x=\dfrac{b}{0}=\infty$）．

2）方程有不定解．我們在 § 131 中已看到，當 $a=b=0$ 時，便產生不定解，爲說明這種情形，可看 32 圖．當 b 值趨近於 0 時，直線 $y_2=b$ 仍然平行於 x 軸而趨近於它，當 $b=0$ 時便與 x 軸相重合．另一方面，當 $a=0$ 時，則直線 $y_1=ax$ 也變爲 x 軸，此時兩條直線 $y_2=b$，$y_1=ax$ 皆與 x 軸重合，所以在 x 軸上的一切點都可看作二直線的交點，即根的值爲不定．

練　習

試驗證下列方程無解（使變成不能成立的等式）：

233. $\dfrac{5x+1}{6}+\dfrac{x+3}{4}=x+1+\dfrac{x-3}{12}$.

234. $(x+2)^2+(x-2)^2=(x+3)^2-(x-3)^2$.

試驗證下列方程有無窮多解（變爲恆等式）：

235. $8x+3=(x+2)^2-x^2+4x-1$.

236. $(x+1)^2+(x-1)^2=2(x^2+1)$.

237. 二圓的半徑爲 r 及 r_1，二圓心的距離爲 d，試在連心線上找一點，由這點作二圓的外公切線．並檢查這問題中的各種可能情形．

238. 如上題，但作內公切線．

II. 二元一次聯立方程的討論

133. 一般公式　在初中代數 § 97 中，已經看到聯立方程的一般式：

$$ax+by=c \text{ 及 } a'x+b'y=c'$$

解這聯立方程，可得求解公式：

$$(ab'-a'b)x=(b'c-bc');\quad (ab'-a'b)y=(ac'-a'c). \qquad (1)$$

設 $ab'-a'b\neq 0$, 則

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b};\quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}. \qquad (2)$$

134. 討論 關於求解公式分爲兩種情形討論如下:

1) 公分母 $ab'-a'b\neq 0$. 在這種情形下方程僅有一組解, 這個解對於問題的意義, 則與在討論一元一次方程時所作的說明相同.

2) 公分母 $ab'-a'b=0$. 在這種情形下, (2)式中的分子可能不等於零, 也可能等於零, 若 a、a'、b、b' 都不等於零, 則必屬於下列兩種情形之一.

1. 在(2)式內若 x 或 y 的一個的分子爲零則他一個的分子亦必爲零.

比如 x 的分子爲零, 即:

$$cb'=c'b;\ \text{又原設}\ a'b=ab'$$

將這兩式, 左邊乘左邊, 右邊乘右邊, 則得

$$cb'a'b=c'bab'\ \text{即}\ cb'a'b-c'bab'=0,$$

所以
$$bb'(a'c-ac')=0$$

因爲 b 及 b' 都不等於零, 所以此式若成立, 必須 $a'c-ac'=0$, 也就是 y 的分子等於零.

若(2)式中 y 的分子等於零, (即 $ac'=a'c$ 及 $ab'=a'b$), 則得 $ac'a'b=a'cab'$; $aa'(c'b-cb')=0$; $c'b-cb'=0$.

2. 在(2)式中若未知數中一個的分子不等於零, 則他一個未知數的分子也不等於零.

因在前面已證明, 若(2)式中的一個未知數的分子等於零, 則他一個未知數的分子也必等於零; 所以若兩分子中的一個不等於零則他一個當然也不能等於零.

若在(2)式中，二未知數的分子都等於零，則此題的解是不定的。因爲若將第一個方程的所有項乘以 b'，第二個方程的所有項乘以 b（按假定 b、b' 都不等於零）則得

$$ab'x+bb'y=cb' \text{ 及 } a'bx+bb'y=c'b \qquad (A)$$

但因 $ab'=a'b$ 及 $cb'=c'b$，所以方程 (A)，可以看做一個含有兩個未知數的方程，在這種情形下，正如我們所知，未知數可能有無限多個數值。

若在(2)式中分子不等於零，而分母 $ab'-a'b=0$，則方程相矛盾，因爲若 $ab'=a'b$，而 $cb'\neq c'b$，則聯立方程 (A) 的左邊有相同數值，而右邊却相異，這二方程相矛盾，亦即問題無解。

更要注意到，方程(1)有 $0\cdot x=0$; $0\cdot y=0$ 的形式時，這並不是就可以給兩個未知數以任意的數值；我們給其中一個未知數選定一個值後，將它代到所與的一個原方程裏，再求出他一未知數的值。

總之，若 $ab'-a'b\neq 0$ 則聯立方程：

$$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'$$

有解，若 $ab'-a'b=0$，但 a、a'、b、b' 中無一數爲 0，則聯立方程或有無窮多的解，或無解。此外在 $ab'-a'b=0$，且 a、b、a'、b' 中的某一數爲零的情形下，我們不討論。

III. 二次方程的討論

135. 公式的討論 我們已經知道，完全二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根可用公式表示如下：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a 爲正數（假如是負數，我們可以將方程中所有的項變號），且 a 不能等於零（因爲 a 若爲零，則這方程不是二次而變成一次方程）。

在前面講過（§ 42），二次方程的根，可以全是實數，或全是虛數，這決

定於判別式 b^2-4ac 的值爲正或爲負。

對此問題詳加討論如下：

1) 若 $b^2-4ac>0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 爲正實數(根號 $\sqrt{}$ 表示算術根)，所以二根皆爲實數，且不相等；此時能有以下三種情形。

1. 二根皆爲正數。當 $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ 及 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ 都大於零時，則二根皆爲正數。此時，b 必須是負數(若 b 爲正數，則 x_2 的值必爲負數)，且其絕對值大於 $\sqrt{b^2-4ac}$。

2. 二根皆爲負數。當 $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ 及 $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ 皆小於零時，則二根皆爲負數。此時，b 必須是正數(在 b 爲負數時 x_1 的值必爲正數)，且其絕對值大於 $\sqrt{b^2-4ac}$。

3. 一根爲正數而另一根爲負數。當 b 爲正數或負數，而其絕對值小於 $\sqrt{b^2-4ac}$ 時，則二根異號。

2) 若 $b^2-4ac=0$，則二根爲實數且相等。即 $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ 此二實根同爲正、負或零(當 $b=0$)。

3) 若 $b^2-4ac<0$，則二根都爲虛數(這種情形當 $c<0$ 時是不可能的)。

4) 根等於零的條件。在 x_1 和 x_2 的公式中，有一個分子爲零或兩個分子皆爲零時則產生零根。第一種情形，是 $c=0$，也就是方程爲 $ax^2+bx=0$ 的形式時；第二種情形，是 $c=0$ 與 $b=0$，即方程爲 $ax^2=0$ 的形式時。

5) 若 $a=0$，則這方程不是二次而變爲一次方程 $bx+c=0$。但當 a 無限趨近於零時，二根 x_1 及 x_2 將如何變化呢？我們可作一個解析的推論：假如 a 無限的趨近於零，則二次方程的一個根無限增大，而另一個根無限趨近於 $-\dfrac{c}{b}$。

136. 關於兩個光源的問題 爲了理解在解二次方程時所產生各種情形的意義，我們引用關於兩個光源的問題來加以說明。

在直線 MN 上的點 A 和點 B，各有一光源。光源 A 的光度爲 a 燭

光，光源 B 的爲 b 燭光。A 與 B 間的距離爲 d 米。試在 MN 線上找一點，使這點由兩光源所得的照度相等(圖 33)。

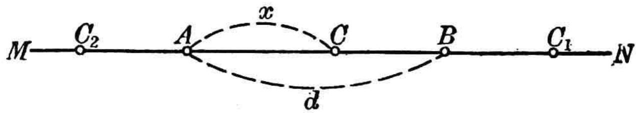

圖 33

由兩光源得到照度相等的點，可能在 AB 之間，或在 B 右或在 A 左。現在假設它在 AB 之間，例如在點 C，距 A 爲 x 米。由物理學得知，光的照度在相同條件下，與到光源的距離的平方成反比。由此定理可知，若 C 距 A 1 米，則由光源 A 所得的照度是 a 燭光；但它距 A 不是 1 米而是 x 米，所以它由光源 A 所得的照度乃是 $\frac{a}{x^2}$ 燭光。

同樣可知點 C 距光源 B 爲 $(d-x)$ 米，所以由 B 所得的照度應爲 $\frac{b}{(d-x)^2}$ 燭光。根據題意得方程

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}, \tag{1}$$

由此得 $a(d-x)^2=bx^2$，即 $ad^2-2adx+ax^2-bx^2=0$，

$$(a-b)x^2-adx+ad^2=0。$$

解這方程，得

$$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-(a-b)d^2}}{a-b}=\frac{ad\pm d\sqrt{ab}}{a-b}$$

$$=\frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

所以二根爲：

$$x_1=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}},\quad x_2=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

下面討論這方程的二根 x_1 和 x_2。因 a 和 b 皆爲正數，所以這方程沒有虛根。

1) 若 $a>b$, 則二根皆爲正數; 又因

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a}<\sqrt{a}+\sqrt{b}, \text{所以 } x_1>d \text{ 而 } x_2<d.$$

因假設所求的點在 A, B 之間, 所以第二個解 x_2 適合假設; 但第一個解 x_1 不適合於假設. 關於第一個解是否可以採取, 我們在下面用另一方程討論它. 現在假設所求的點在 B 的右邊(例如在 C_1)距 A 爲 x, 則此點由光源 A 所得的照度爲 $\frac{a}{x^2}$; 又點 C_1 距光源 B 爲 $x-d$, 故它由光源 B 所得的照度爲 $\frac{b}{(x-d)^2}$, 根據所設得下面的方程:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2}. \tag{2}$$

以此方程與方程(1)比較, 則知它們相同, 因爲 $(d-x)^2=(x-d)^2$.

由此我們便知解方程(1)所得的兩個正解都合題意.

2) 若 $a<b$, 則 x_1 爲負值而 x_2 爲正值, 且 $x_2<d$. 故知正解適合於題設, 即所求的點在 A、B 之間. 同時我們爲了理解負解 x_1 的意義, 可把方程(1)中的 x 換爲 $-x$, 得

$$\frac{a}{(-x)^2}=\frac{b}{(d+x)^2}$$

即

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2}. \tag{3}$$

方程(3)的根與方程(1)的根, 其絕對值相等而符號相反. 即方程(1)的負根的絕對值等於方程(3)的正根的絕對值. 但是方程(3)也適合題意, 不過此時須假設所求的點在 A 的左方. 現在我們假定所求的點爲 C_2. 這 C_2 在 A 的左方距 A 爲 x. 於是 C_2 由光源 A 所得的照度爲 $\frac{a}{x^2}$; 由光源 B 所得的照度爲 $\frac{b}{(d+x)^2}$. 因此方程(3)合於這個假定.

故知方程(1)的負解 x_1 所表示的點與 A 的距離, 與正解所表示的距離有相反的方向.

3) 若 $a=b$, 則 x_1 的值失去意義, 而 $x_2=\frac{d}{2}$.

由 § 129 知, 當 a 與 b 無限趨近於相等時, 則 x_1 無限增大, 即所求的

點距光源無限遠.

第二個解 $x_2=\dfrac{d}{2}$ 的意義是: 當 $a=b$ 時則所求的點在兩光源的正中間.

4) 若 $a=b$ 和 $d=0$ 則方程(2)變爲等式, 即

$$0\cdot x-0\cdot x+0=0,$$

在此式內, x 可爲任意數值, 即問題成爲不定.

在實際上, 假若光度相同的兩個光源放在一處($d=0$), 則在任意一點所接受到的照度都相同.

5) 若 $a\neq b$, 但 $d=0$, 則 $x_1=x_2=0$. 對此我們應這樣理解: 當光度不同的兩個光源間的距離縮小而趨近於零時, 則得到照度相同的兩點無限接近於光源 A.