广义Birkhoff系统动力学

梅凤翔 著

科学出版社

广义 Birkhoff 系统动力学

梅凤翔 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书全面系统地论述广义 Birkhoff 系统动力学，包括 Birkhoff 系统动力学、广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程、广义 Birkhoff 系统的积分方法(I~IV)、二阶自治广义 Birkhoff 系统的定性理论、广义 Birkhoff 系统动力学逆问题、广义 Birkhoff 系统的运动稳定性等。

本书可作为高等学校力学、数学、物理学，以及工程专业高年级本科生和研究生的教学参考书，亦可供有关教师、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

广义 Birkhoff 系统动力学/梅凤翔著. —北京：科学出版社, 2013
ISBN 978-7-03-036858-4

Ⅰ. ①广… Ⅱ. ①梅… Ⅲ. ①系统动态学-研究 Ⅳ. ①N941.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 040030 号

责任编辑：刘信力 / 责任校对：朱光兰
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 4 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)
2013 年 4 月第一次印刷 印张：13 3/4
字数：262 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

1927 年美国数学家 Birkhoff (1884~1944) 出版名著《动力系统》, 书中提出一类新型积分变分原理和一类新型运动微分方程. 美国强子物理学家 Santilli 将 Birkhoff 的结果推广到它包含时间的情形, 并于 1978 年提出 Birkhoff 力学一词. Birkhoff 力学是量子力学出现之后经典力学的新发展.

1993 年作者在《中国科学》上发表文章《Birkhoff 系统的 Noether 理论》, 在研究 Pfaff 作用量在群的无限小变换下的广义准不变性时, 使 Birkhoff 方程出现了附加项, 并称之为广义 Birkhoff 方程. 2007 年作者与合作者在《北京理工大学学报》上发表文章《广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架》, 将 Pfaff-Birkhoff 原理加以推广, 并由此推导出了广义 Birkhoff 方程. 以广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程为基础, 研究广义 Birkhoff 系统的各类动力学问题, 就组成了本书的内容. 本书采用传统的分析力学研究方法, 提出基本原理, 由原理导出运动微分方程, 研究方程本身和积分方法以及各种应用.

全书共分 9 章. 第 1 章 Birkhoff 系统动力学, 包括 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理、完整力学系统和非完整力学系统的 Birkhoff 动力学、Birkhoff 系统的积分理论、Birkhoff 系统动力学逆问题、Birkhoff 系统的运动稳定性, 以及 Birkhoff 系统的代数和几何描述等, 该章为后续章节的基础. 第 2 章广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程, 包括 Pfaff-Birkhoff 原理的推广. 广义 Birkhoff 方程的导出、广义 Birkhoff 系统的两类积分及降阶法、系统的时间积分定理、系统的随机响应, 以及系统与梯度系统的关系等, 该章为全书的基础. 第 3 章 ~ 第 6 章为广义 Birkhoff 系统的各种积分方法, 包括 Poisson 方法、对称性方法、积分不变量、场方法、势积分方法、Jacobi 最终乘子法等. 第 7 章二阶自治广义 Birkhoff 系统的定性理论, 包括奇点类型、稳定流形、不稳定流形等. 第 8 章广义 Birkhoff 系统动力学逆问题, 包括方程的组建、方程的修改、方程的封闭等. 第 9 章广义 Birkhoff 系统的运动稳定性, 包括平衡稳定性、相对部分变量的稳定性、平衡状态流形的稳定性、运动稳定性, 以及梯度表示的稳定性等.

作者感谢国家自然科学基金 (批准号 10772025, 10932002) 以及北京市一般力学和力学基础重点学科基金的资助, 感谢北京理工大学力学系和数学系同事们的关

心和支持.

限于作者水平, 书中难免有疏漏, 敬请读者指正.

作　者

2012 年仲夏

目　　录

第 1 章 Birkhoff 系统动力学

文献 [1] 给出 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架, 包括 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理、完整力学系统和非完整力学系统的 Birkhoff 动力学、Birkhoff 系统的积分理论、Birkhoff 系统动力学逆问题、Birkhoff 系统的运动稳定性, 以及 Birkhoff 系统的代数和几何描述等.

作为后续章节的基础, 本章简要介绍 Birkhoff 系统动力学的主要内容.

1.1 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理

1.1.1 Birkhoff 方程

Birkhoff 方程有形式 [2]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{1.1.1}$$

这里相同指标表示求和, 下同. 这是美国强子物理学家 Santilli R M 于 1978 年建议命名的, 而 Birkhoff 的原著中不含时间 t [3]. 方程 (1.1.1) 中的函数 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数, 而 $2n$ 个函数 $R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 可称为 Birkhoff 函数组 [1].

自治情形和半自治情形的 Birkhoff 方程具有相容代数结构, 并且具有 Lie 代数结构.

当取

$$\begin{aligned}
&a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}\\
&R_\mu=\begin{cases}p_\mu & (\mu=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (\mu=n+1,n+2,\cdots,2n)\end{cases}\\
&B=H
\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

则 Birkhoff 方程 (1.1.1) 成为 Hamilton 方程

$$\omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial H}{\partial a^\mu}=0\tag{1.1.3}$$

其中

$$(\omega_{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & -1_{n\times n}\\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}\tag{1.1.4}$$

1.1.2 Pfaff-Birkhoff 原理

积分

$$A=\int_{t_0}^{t_1}(R_\nu\dot{a}^\nu-B)\mathrm{d}t \tag{1.1.5}$$

称为 Pfaff 作用量. 等时变分原理

$$\delta A=0 \tag{1.1.6}$$

带有交换关系

$$\mathrm{d}\delta a^\nu=\delta\mathrm{d}a^\nu\quad(\nu=1,2,\cdots,2n) \tag{1.1.7}$$

及端点条件

$$\delta a^\nu\big|_{t=t_0}=\delta a^\nu\big|_{t=t_1}=0 \tag{1.1.8}$$

称为 Pfaff-Birkhoff 原理. 这个原理是一个普遍的一阶积分变分原理. 当取式 (1.1.2) 时, 原理 (1.1.6) 成为 Hamilton 原理.

将原理 (1.1.6) 表示为形式

$$\delta A=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\delta a^\mu\mathrm{d}t=0 \tag{1.1.9}$$

由此利用 δa^μ 的独立性和积分区间 $[t_0,t_1]$ 的任意性, 可导出 Birkhoff 方程 (1.1.1).

1.1.3 Birkhoff 函数的构造

欲使微分方程组表示为 Birkhoff 形式, 需构造出 $(2n+1)$ 个动力学函数 B 和 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$, 有四种方法.

1. Santilli *第一方法*

取系统总能量为 Birkhoff 函数 B, 并解对 Birkhoff 函数组 R_μ 的 Cauchy-Kovalevskaya 方程.

设系统方程组表示为标准一阶形式

$$\dot{a}^\mu-\sigma^\mu(t,\boldsymbol{a})=0\quad(\mu=1,2,\cdots,2n) \tag{1.1.10}$$

欲使方程 (1.1.10) 有 Birkhoff 形式 (1.1.1), 即

$$\dot{a}^\mu-\sigma^\mu=\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0$$

由此得到 [2]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \tag{1.1.11}$$

对任何给定的函数 B, 方程 (1.1.11) 是 Cauchy-Kovalevskaya 型的. 根据 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 方程 (1.1.11) 的解总是存在的. 将方程 (1.1.11) 表示为形式

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{1.1.12}$$

如果已知系统的总能量, 即动能与势能之和, 并将其取为 Birkhoff 函数 B, 那么通过解对 R_μ 的方程 (1.1.12), 便可确定出 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$.

Santilli 第一方法对所有变量和函数有直接的物理意义, 利用它的主要困难在于求解 Cauchy-Kovalevskaya 方程 (1.1.12).

2. Santilli *第二方法*

如果能构造出自伴随协变一般形式

$$\Big[\Omega_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu+\Gamma_\mu(t,\boldsymbol{a})\Big]_{\mathrm{SA}}=0\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{1.1.13}$$

其中“SA”表示自伴随, 那么 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定 [2]

$$R_\mu(t,\boldsymbol{a})=\int_0^1\Big[\mathrm{d}\tau\,\tau\Omega_{\nu\mu}(t,\tau\boldsymbol{a})\Big]a^\nu\tag{1.1.14}$$

而 Birkhoff 函数为

$$B(t,\boldsymbol{a})=-\left[\int_0^1\mathrm{d}\tau\left(\Gamma_\mu+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)(t,\tau\boldsymbol{a})\right]a^\mu\tag{1.1.15}$$

利用 Santilli 第二方法的主要困难是如何将系统的方程组表示为自伴随形式. 一旦表示为自伴随形式, 便可按式 (1.1.14) 和 (1.1.15) 来构造函数 R_μ 和 B.

3. Hojman *方法*

假设已知方程的 $2n$ 个独立的第一积分 $I^\mu(t,\boldsymbol{a})(\mu=1,2,\cdots,2n)$, 那么 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定

$$R_\mu(t,\boldsymbol{a})=G_\nu\frac{\partial I^\nu}{\partial a^\mu}\tag{1.1.16}$$

而 Birkhoff 函数 B 为

$$B(t,\boldsymbol{a})=-G_\nu\frac{\partial I^\nu}{\partial t}\tag{1.1.17}$$

其中 $2n$ 个函数 $G_\mu(\boldsymbol{I})$ 满足条件

$$\det\left(\frac{\partial G_\mu}{\partial I^\nu}-\frac{\partial G_\nu}{\partial I^\mu}\right)\neq 0\tag{1.1.18}$$

Hojman 方法的关键是要已知系统方程的全部独立的第一积分.

4. 自治系统 Birkhoff 函数的构造

对自治系统, 方程 (1.1.11) 成为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{1.1.19}$$

将方程 (1.1.19) 两端乘以 σ^μ 并对 μ 求和, 得到

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\sigma^\mu=0\tag{1.1.20}$$

这就是函数 B 应满足的一阶齐次偏微分方程. 偏微分方程 (1.1.20) 的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{\sigma^1}=\frac{\mathrm{d}a^2}{\sigma^2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}a^{2n}}{\sigma^{2n}}\tag{1.1.21}$$

假设方程 (1.1.21) 有 $(2n-1)$ 个独立的第一积分

$$f^1(\boldsymbol{a})=c^1,\quad f^2(\boldsymbol{a})=c^2,\quad\cdots,\quad f^{2n-1}(\boldsymbol{a})=c^{2n-1}\tag{1.1.22}$$

则方程 (1.1.20) 的解可表示为

$$B=\varPsi(f^1(\boldsymbol{a}),f^2(\boldsymbol{a}),\cdots,f^{2n-1}(\boldsymbol{a}))\tag{1.1.23}$$

其中 $\varPsi$ 为某函数. 在具体应用时, 不必求出形如 (1.1.23) 的解. 实际上, 只要找到特征方程 (1.1.21) 的某一积分, 并将其取为 Birkhoff 函数即可 [1].

找到函数 B 之后, 将其代入方程 (1.1.19), 便可进一步求得 R_μ. 在具体应用时, 可取一部分 R_μ 为零.

例 1　研究线性阻尼振子

$$\ddot{x}+x+\gamma\dot{x}=0\quad(\gamma=\text{const.})\tag{1.1.24}$$

的 Birkhoff 表示.

首先, 用 Santilli 第一方法. 令

$$a^1=x,\quad a^2=\dot{x}$$

则方程 (1.1.24) 表示为

$$\dot{a}^1=a^2,\quad\dot{a}^2=-a^1-\gamma a^2$$

取 Birkhoff 函数 B 为系统的总能量, 即

$$B=\frac{1}{2}(a^1)^2+\frac{1}{2}(a^2)^2$$

将其代入方程 (1.1.12), 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial t} &= \left(\frac{\partial R_2}{\partial a^1}-\frac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)(-a^1-\gamma a^2)-a^1\\ \frac{\partial R_2}{\partial t} &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial a^2}-\frac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)a^2-a^2\end{aligned}\tag{1.1.25}$$

假设 R_2 不依赖于 a^1, 则方程 (1.1.25) 第一个的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{0}=\frac{\mathrm{d}a^2}{-a^1-\gamma a^2}=\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}R_1}{-a^1}$$

它有如下积分

$$a^1=c_1,\quad (a^1+\gamma a^2)\exp(\gamma t)=c_2,\quad R_1+a^1t=c_3$$

于是, 解为

$$\Psi(a^1,(a^1+\gamma a^2)\exp(\gamma t),R_1+a^1t)=0$$

其中 Ψ 为任意函数. 可简单地取

$$\Psi=R_1+a^1t-\frac{1}{\gamma}(a^1+\gamma a^2)\exp(\gamma t)=0$$

即

$$R_1=\frac{1}{\gamma}(a^1+\gamma a^2)\exp(\gamma t)-a^1t$$

将其代入方程 (1.1.25), 得

$$\frac{\partial R_2}{\partial t}=a^2\exp(\gamma t)-a^2$$

于是有

$$R_2=\frac{1}{\gamma}a^2\exp(\gamma t)-a^2t$$

其次, 用 Santilli 第二方法. 这个方法要求方程是自伴随的, 但方程 (1.1.24) 不是自伴随的. 为此, 将方程写成形式

$$(\ddot{x}+x+\gamma\dot{x})\exp(\gamma t)=0$$

令

$$a^1=x,\quad a^2=\dot{x}$$

则有

$$-\dot{a}^2\exp(\gamma t)-(a^1+\gamma a^2)\exp(\gamma t)=0$$