

广义Birkhoff系统动力学

梅凤翔 著



科学出版社

013027677

N941.3
10

广义 Birkhoff 系统动力学

梅凤翔 著



科学出版社

北京



北航

C1637302

N941.3
10

778790819

内 容 简 介

本书全面系统地论述广义 Birkhoff 系统动力学,包括 Birkhoff 系统动力学、广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程、广义 Birkhoff 系统的积分方法(I-IV)、二阶自治广义 Birkhoff 系统的定性理论、广义 Birkhoff 系统动力学逆问题、广义 Birkhoff 系统的运动稳定性等。

本书可作为高等学校力学、数学、物理学,以及工程专业高年级本科生和研究生的教学参考书,亦可供有关教师、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

广义 Birkhoff 系统动力学/梅凤翔著. —北京:科学出版社, 2013
ISBN 978-7-03-036858-4

I. ①广… II. ①梅… III. ①系统动态学-研究 IV. ①N941.3
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 040030 号

责任编辑:刘信力/责任校对:朱光兰

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 4 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2013 年 4 月第一次印刷 印张: 13 3/4

字数: 262 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

1927 年美国数学家 Birkhoff (1884~1944) 出版名著《动力系统》，书中提出一类新型积分变分原理和一类新型运动微分方程。美国量子物理学家 Santilli 将 Birkhoff 的结果推广到它包含时间的情形，并于 1978 年提出 Birkhoff 力学一词。Birkhoff 力学是量子力学出现之后经典力学的新发展。

1993 年作者在《中国科学》上发表文章《Birkhoff 系统的 Noether 理论》，在研究 Pfaff 作用量在群的无限小变换下的广义准不变性时，使 Birkhoff 方程出现了附加项，并称之为广义 Birkhoff 方程。2007 年作者与合作者在《北京理工大学学报》上发表文章《广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架》，将 Pfaff-Birkhoff 原理加以推广，并由此推导出了广义 Birkhoff 方程。以广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程为基础，研究广义 Birkhoff 系统的各类动力学问题，就组成了本书的内容。本书采用传统的分析力学研究方法，提出基本原理，由原理导出运动微分方程，研究方程本身和积分方法以及各种应用。

全书共分 9 章。第 1 章 Birkhoff 系统动力学，包括 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理、完整力学系统和非完整力学系统的 Birkhoff 动力学、Birkhoff 系统的积分理论、Birkhoff 系统动力学逆问题、Birkhoff 系统的运动稳定性，以及 Birkhoff 系统的代数和几何描述等，该章为后续章节的基础。第 2 章广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程，包括 Pfaff-Birkhoff 原理的推广、广义 Birkhoff 方程的导出、广义 Birkhoff 系统的两类积分及降阶法、系统的时间积分定理、系统的随机响应，以及系统与梯度系统的关系等，该章为全书的基础。第 3 章 ~ 第 6 章为广义 Birkhoff 系统的各种积分方法，包括 Poisson 方法、对称性方法、积分不变量、场方法、势积分方法、Jacobi 最终乘子法等。第 7 章二阶自治广义 Birkhoff 系统的定性理论，包括奇点类型、稳定流形、不稳定流形等。第 8 章广义 Birkhoff 系统动力学逆问题，包括方程的组建、方程的修改、方程的封闭等。第 9 章广义 Birkhoff 系统的运动稳定性，包括平衡稳定性、相对部分变量的稳定性、平衡状态流形的稳定性、运动稳定性，以及梯度表示的稳定性等。

作者感谢国家自然科学基金 (批准号 10772025, 10932002) 以及北京市一般力学和力学基础重点学科基金的资助，感谢北京理工大学力学系和数学系同事们的关

心和支持.

限于作者水平, 书中难免有疏漏, 敬请读者指正.

作 者

2012 年仲夏

目 录

前言

第 1 章 Birkhoff 系统动力学	1
1.1 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理	1
1.1.1 Birkhoff 方程	1
1.1.2 Pfaff-Birkhoff 原理	2
1.1.3 Birkhoff 函数的构造	2
1.2 完整力学系统的 Birkhoff 动力学	7
1.2.1 特殊完整系统的 Birkhoff 动力学	7
1.2.2 一般完整系统的 Birkhoff 动力学	8
1.3 非完整力学系统的 Birkhoff 动力学	9
1.3.1 特殊非完整系统的 Birkhoff 动力学	10
1.3.2 一般非完整系统的 Birkhoff 动力学	10
1.3.3 高阶非完整系统的 Birkhoff 动力学	14
1.4 Birkhoff 系统的积分理论	14
1.4.1 Birkhoff 方程的变换理论	14
1.4.2 Birkhoff 系统的对称性与守恒量	15
1.4.3 Birkhoff 系统的 Poisson 积分法	19
1.4.4 积分 Birkhoff 方程的场方法	22
1.4.5 积分 Birkhoff 方程的势积分方法	24
1.5 Birkhoff 系统动力学逆问题	25
1.5.1 Birkhoff 方程的建立问题	25
1.5.2 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题	26
1.5.3 根据 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理组成运动方程	27
1.5.4 广义 Poisson 方法与动力学逆问题	27
1.6 Birkhoff 系统的运动稳定性	28
1.6.1 Birkhoff 系统的平衡稳定性	28
1.6.2 Birkhoff 系统的运动稳定性	29

参考文献	29
第 2 章 广义 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Birkhoff 方程	30
2.1 Pfaff-Birkhoff 原理的推广	30
2.1.1 Hamilton 原理的推广	30
2.1.2 Pfaff-Birkhoff 原理的推广	30
2.2 广义 Birkhoff 方程	31
2.2.1 广义 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理	31
2.2.2 广义 Birkhoff 方程	32
2.3 广义 Birkhoff 系统的两类积分和降阶法	34
2.3.1 类能量积分	34
2.3.2 类循环积分	34
2.3.3 利用类循环积分的降阶法	36
2.3.4 利用类能量积分的降阶法	38
2.4 广义 Birkhoff 系统的时间积分定理	42
2.4.1 广义 Birkhoff 系统的时间积分等式	42
2.4.2 导出类功率方程	42
2.4.3 导出类维里定理	43
2.4.4 导出积分变分原理和微分变分原理	44
2.5 广义 Birkhoff 系统的随机响应	45
2.5.1 系统的随机微分方程	45
2.5.2 Itô 方程和矩方程	46
2.6 广义 Birkhoff 系统与约束 Birkhoff 系统	50
2.6.1 约束 Birkhoff 系统	50
2.6.2 广义 Birkhoff 系统与约束 Birkhoff 系统	51
参考文献	52
第 3 章 广义 Birkhoff 系统的积分方法 I	54
3.1 广义 Birkhoff 系统的代数结构	54
3.1.1 广义 Birkhoff 方程的逆变代数形式	54
3.1.2 广义 Birkhoff 方程的代数结构	55
3.2 Poisson 积分方法	55
3.2.1 广义 Poisson 条件	55
3.2.2 由已知积分生成新的积分	56

3.3 Poisson 方法的应用	57
3.3.1 广义 Birkhoff 系统的两类积分	57
3.3.2 Poisson 方法应用举例	59
参考文献	64
第 4 章 广义 Birkhoff 系统的积分方法 II	65
4.1 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Noether 守恒量	65
4.1.1 Pfaff 作用量的变分	65
4.1.2 对称变换, 准对称变换和广义准对称变换	66
4.1.3 广义 Killing 方程	67
4.1.4 广义 Birkhoff 系统的 Noether 定理	68
4.2 广义 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与 Hojman 型守恒量	70
4.2.1 广义 Birkhoff 系统的 Lie 对称性	70
4.2.2 Hojman 定理的推广	71
4.3 广义 Birkhoff 系统的形式不变性与新型守恒量	74
4.3.1 广义 Birkhoff 系统的形式不变性	74
4.3.2 形式不变性直接导致的新型守恒量	75
4.4 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Hojman 型守恒量	78
4.4.1 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性	78
4.4.2 Noether 对称性间接导致的 Hojman 型守恒量	78
4.5 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与新型守恒量	81
4.5.1 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与形式不变性	81
4.5.2 Noether 对称性间接导致的新型守恒量	81
4.6 广义 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与 Noether 守恒量	83
4.6.1 广义 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与 Noether 对称性	83
4.6.2 Lie 对称性间接导致的 Noether 守恒量	83
4.7 广义 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与新型守恒量	85
4.7.1 广义 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与形式不变性	85
4.7.2 Lie 对称性间接导致的新型守恒量	85
4.8 广义 Birkhoff 系统的形式不变性与 Noether 守恒量	87
4.8.1 广义 Birkhoff 系统的形式不变性与 Noether 对称性	87
4.8.2 形式不变性间接导致的 Noether 守恒量	87
4.9 广义 Birkhoff 系统的形式不变性与 Hojman 型守恒量	89

4.9.1 广义 Birkhoff 系统的形式不变性与 Lie 对称性	89
4.9.2 形式不变性间接导致的 Hojman 型守恒量	89
参考文献	91
第 5 章 广义 Birkhoff 系统的积分方法 III	92
5.1 广义 Birkhoff 系统的弱 Noether 对称性与 Noether 守恒量	92
5.1.1 弱 Noether 对称性的定义和判据	92
5.1.2 弱 Noether 对称性导致的 Noether 守恒量	94
5.2 广义 Birkhoff 系统的弱 Noether 对称性与 Hojman 型守恒量	98
5.2.1 弱 Noether 对称性与 Lie 对称性	98
5.2.2 弱 Noether 对称性导致的 Hojman 型守恒量	99
5.3 广义 Birkhoff 系统的弱 Noether 对称性与新型守恒量	100
5.3.1 弱 Noether 对称性与形式不变性	100
5.3.2 弱 Noether 对称性与新型守恒量	101
5.4 广义 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性	102
5.4.1 系统 Birkhoff 对称性的定义和判据	102
5.4.2 Birkhoff 对称性导致的守恒量	103
5.5 广义 Birkhoff 系统的共形不变性	108
5.5.1 系统的共形不变性与 Lie 对称性	108
5.5.2 共形不变性导致的 Hojman 型守恒量	111
5.5.3 共形不变性导致的 Noether 守恒量	113
5.6 广义 Birkhoff 系统对称性摄动与绝热不变量	114
5.6.1 广义 Birkhoff 系统的摄动	115
5.6.2 广义 Birkhoff 系统的绝热不变量	115
5.7 广义 Birkhoff 系统的积分不变量	117
5.7.1 系统存在积分不变量的条件	117
5.7.2 系统的线性积分不变量	118
5.7.3 系统的通用积分不变量	119
5.7.4 系统的二阶绝对积分不变量	119
5.7.5 由积分生成积分不变量	120
5.8 广义 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分	121
5.8.1 系统的运动微分方程	122
5.8.2 Birkhoff 系统的无限小正则变换与积分	122

5.8.3 系统的无限小正则变换与积分	123
参考文献	125
第 6 章 广义 Birkhoff 系统的积分方法 IV	127
6.1 广义 Birkhoff 系统的场积分方法	127
6.1.1 场积分方法	127
6.1.2 广义 Birkhoff 方程的场积分方法	128
6.2 广义 Birkhoff 系统的势积分方法	134
6.2.1 势积分方法	134
6.2.2 广义 Birkhoff 方程的势积分方法	134
6.3 Jacobi 最终乘子法	136
6.3.1 最终乘子	136
6.3.2 广义 Birkhoff 系统的最终乘子	138
6.3.3 最终乘子法的应用	139
参考文献	144
第 7 章 二阶自治广义 Birkhoff 系统的定性理论	145
7.1 二阶自治广义 Birkhoff 系统的奇点类型	145
7.1.1 系统的运动方程和奇点方程	145
7.1.2 用线性近似系统判断系统的奇点	147
7.1.3 用 Birkhoff 函数判断系统的奇点	149
7.1.4 对称原理	150
7.1.5 关于平衡稳定性	151
7.2 二阶自治广义 Birkhoff 系统的稳定流形和不稳定流形	151
7.2.1 双曲平衡点	151
7.2.2 稳定流形和不稳定流形	152
7.2.3 无穷远奇点和全局结构	153
7.3 平衡点分岔	156
7.3.1 极限点分岔	156
7.3.2 跨临界分岔	157
7.3.3 叉形分岔	157
参考文献	157
第 8 章 广义 Birkhoff 系统动力学逆问题	158
8.1 根据系统的给定运动性质来建立广义 Birkhoff 方程	158

8.1.1 逆问题的提法	158
8.1.2 逆问题的解法	158
8.2 运动方程的修改	162
8.2.1 逆问题的提法	162
8.2.2 逆问题的解法	162
8.3 运动方程的封闭	166
8.3.1 逆问题的提法	166
8.3.2 逆问题的解法	166
8.4 广义 Birkhoff 系统的对称性与动力学逆问题	167
8.4.1 广义 Birkhoff 系统的 Noether 对称性	168
8.4.2 逆问题的第一种提法和解法	169
8.4.3 逆问题的第二种提法和解法	172
8.4.4 逆问题的第三种提法和解法	173
8.5 根据微分变分原理组建运动方程	174
8.5.1 微分变分原理	175
8.5.2 逆问题的提法和解法	175
8.6 广义 Poisson 方法与动力学逆问题	177
8.6.1 广义 Poisson 条件	177
8.6.2 逆问题的提法和解法	177
参考文献	179
第 9 章 广义 Birkhoff 系统的运动稳定性	181
9.1 广义 Birkhoff 系统的平衡稳定性	181
9.1.1 广义 Birkhoff 系统的平衡方程	181
9.1.2 广义 Birkhoff 系统的受扰运动方程和一次近似方程	182
9.1.3 平衡稳定性的一次近似方法	183
9.1.4 平衡稳定性的直接法	185
9.2 相对部分变量的平衡稳定性	190
9.2.1 关于部分变量稳定性的基本定理	190
9.2.2 对广义 Birkhoff 系统的应用	190
9.3 平衡状态流形的稳定性	191
9.3.1 基本定理	191
9.3.2 对广义 Birkhoff 系统的应用	192

9.4 广义 Birkhoff 系统的运动稳定性	193
9.4.1 系统的受扰运动方程和一次近似方程	194
9.4.2 运动稳定性的一次近似方法	194
9.4.3 运动稳定性的直接法	195
9.5 广义 Birkhoff 系统的全局稳定性	199
9.5.1 自治系统的全局稳定性	199
9.5.2 二阶自治广义 Birkhoff 系统的全局稳定性	200
9.6 梯度表示与稳定性	202
9.6.1 梯度系统	202
9.6.2 广义 Birkhoff 系统的梯度表示	203
9.6.3 稳定性问题	203
参考文献	205
索引	207

第 1 章 Birkhoff 系统动力学

文献 [1] 给出 Birkhoff 系统动力学的基本理论框架, 包括 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理、完整力学系统和非完整力学系统的 Birkhoff 动力学、Birkhoff 系统的积分理论、Birkhoff 系统动力学逆问题、Birkhoff 系统的运动稳定性, 以及 Birkhoff 系统的代数和几何描述等.

作为后续章节的基础, 本章简要介绍 Birkhoff 系统动力学的主要内容.

1.1 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理

1.1.1 Birkhoff 方程

Birkhoff 方程有形式 [2]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1.1)$$

这里相同指标表示求和, 下同. 这是美国强子物理学家 Santilli R M 于 1978 年建议命名的, 而 Birkhoff 的原著中不含时间 t [3]. 方程 (1.1.1) 中的函数 $B = B(t, \mathbf{a})$ 称为 Birkhoff 函数, 而 $2n$ 个函数 $R_\mu = R_\mu(t, \mathbf{a})$ 可称为 Birkhoff 函数组 [1].

自治情形和半自治情形的 Birkhoff 方程具有相容代数结构, 并且具有 Lie 代数结构.

当取

$$\begin{aligned} a^\mu &= \begin{cases} q_\mu & (\mu = 1, 2, \dots, n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1, n+2, \dots, 2n) \end{cases} \\ R_\mu &= \begin{cases} p_\mu & (\mu = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & (\mu = n+1, n+2, \dots, 2n) \end{cases} \\ B &= H \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

则 Birkhoff 方程 (1.1.1) 成为 Hamilton 方程

$$\omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial H}{\partial a^\mu} = 0 \quad (1.1.3)$$

其中

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -1_{n \times n} \\ 1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

1.1.2 Pfaff-Birkhoff 原理

积分

$$A = \int_{t_0}^{t_1} (R_\nu \dot{a}^\nu - B) dt \quad (1.1.5)$$

称为 Pfaff 作用量. 等时变分原理

$$\delta A = 0 \quad (1.1.6)$$

带有交换关系

$$d\delta a^\nu = \delta da^\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1.7)$$

及端点条件

$$\delta a^\nu|_{t=t_0} = \delta a^\nu|_{t=t_1} = 0 \quad (1.1.8)$$

称为 Pfaff-Birkhoff 原理. 这个原理是一个普遍的一阶积分变分原理. 当取式 (1.1.2) 时, 原理 (1.1.6) 成为 Hamilton 原理.

将原理 (1.1.6) 表示为形式

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right] \delta a^\mu dt = 0 \quad (1.1.9)$$

由此利用 δa^μ 的独立性和积分区间 $[t_0, t_1]$ 的任意性, 可导出 Birkhoff 方程 (1.1.1).

1.1.3 Birkhoff 函数的构造

欲使微分方程组表示为 Birkhoff 形式, 需构造出 $(2n+1)$ 个动力学函数 B 和 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$, 有四种方法.

1. Santilli 第一方法

取系统总能量为 Birkhoff 函数 B , 并解对 Birkhoff 函数组 R_μ 的 Cauchy-Kovalevskaya 方程.

设系统方程组表示为标准一阶形式

$$\dot{a}^\mu - \sigma^\mu(t, \mathbf{a}) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1.10)$$

欲使方程 (1.1.10) 有 Birkhoff 形式 (1.1.1), 即

$$\dot{a}^\mu - \sigma^\mu = \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0$$

由此得到 [2]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \sigma^\nu = \frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \quad (1.1.11)$$

对任何给定的函数 B , 方程 (1.1.11) 是 Cauchy-Kovalevskaya 型的. 根据 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 方程 (1.1.11) 的解总是存在的. 将方程 (1.1.11) 表示为形式

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \sigma^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1.12)$$

如果已知系统的总能量, 即动能与势能之和, 并将其取为 Birkhoff 函数 B , 那么通过解对 R_μ 的方程 (1.1.12), 便可确定出 Birkhoff 函数组 $R_\mu (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$.

Santilli 第一方法对所有变量和函数有直接的物理意义, 利用它的主要困难在于求解 Cauchy-Kovalevskaya 方程 (1.1.12).

2. Santilli 第二方法

如果能构造出自伴随协变一般形式

$$\left[\Omega_{\mu\nu}(t, \mathbf{a}) \dot{a}^\nu + \Gamma_\mu(t, \mathbf{a}) \right]_{\text{SA}} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1.13)$$

其中“SA”表示自伴随, 那么 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定^[2]

$$R_\mu(t, \mathbf{a}) = \int_0^1 \left[d\tau \tau \Omega_{\nu\mu}(t, \tau \mathbf{a}) \right] a^\nu \quad (1.1.14)$$

而 Birkhoff 函数为

$$B(t, \mathbf{a}) = - \left[\int_0^1 d\tau \left(\Gamma_\mu + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) (t, \tau \mathbf{a}) \right] a^\mu \quad (1.1.15)$$

利用 Santilli 第二方法的主要困难是如何将系统的方程组表示为自伴随形式. 一旦表示为自伴随形式, 便可按式 (1.1.14) 和 (1.1.15) 来构造函数 R_μ 和 B .

3. Hojman 方法

假设已知方程的 $2n$ 个独立的第一积分 $I^\mu(t, \mathbf{a}) (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$, 那么 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定

$$R_\mu(t, \mathbf{a}) = G_\nu \frac{\partial I^\nu}{\partial a^\mu} \quad (1.1.16)$$

而 Birkhoff 函数 B 为

$$B(t, \mathbf{a}) = -G_\nu \frac{\partial I^\nu}{\partial t} \quad (1.1.17)$$

其中 $2n$ 个函数 $G_\mu(I)$ 满足条件

$$\det \left(\frac{\partial G_\mu}{\partial I^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial I^\mu} \right) \neq 0 \quad (1.1.18)$$

Hojman 方法的关键是要已知系统方程的全部独立的第一积分.

4. 自治系统 Birkhoff 函数的构造

对自治系统, 方程 (1.1.11) 成为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \sigma^\nu = \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (1.1.19)$$

将方程 (1.1.19) 两端乘以 σ^μ 并对 μ 求和, 得到

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu} \sigma^\mu = 0 \quad (1.1.20)$$

这就是函数 B 应满足的一阶齐次偏微分方程. 偏微分方程 (1.1.20) 的特征方程为

$$\frac{da^1}{\sigma^1} = \frac{da^2}{\sigma^2} = \dots = \frac{da^{2n}}{\sigma^{2n}} \quad (1.1.21)$$

假设方程 (1.1.21) 有 $(2n-1)$ 个独立的第一积分

$$f^1(a) = c^1, \quad f^2(a) = c^2, \quad \dots, \quad f^{2n-1}(a) = c^{2n-1} \quad (1.1.22)$$

则方程 (1.1.20) 的解可表示为

$$B = \Psi(f^1(a), f^2(a), \dots, f^{2n-1}(a)) \quad (1.1.23)$$

其中 Ψ 为某函数. 在具体应用时, 不必求出形如 (1.1.23) 的解. 实际上, 只要找到特征方程 (1.1.21) 的某一积分, 并将其取为 Birkhoff 函数即可^[1].

找到函数 B 之后, 将其代入方程 (1.1.19), 便可进一步求得 R_μ . 在具体应用时, 可取一部分 R_μ 为零.

例 1 研究线性阻尼振子

$$\ddot{x} + x + \gamma \dot{x} = 0 \quad (\gamma = \text{const.}) \quad (1.1.24)$$

的 Birkhoff 表示.

首先, 用 Santilli 第一方法. 令

$$a^1 = x, \quad a^2 = \dot{x}$$

则方程 (1.1.24) 表示为

$$\dot{a}^1 = a^2, \quad \dot{a}^2 = -a^1 - \gamma a^2$$

取 Birkhoff 函数 B 为系统的总能量, 即

$$B = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2$$

将其代入方程 (1.1.12), 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_1}{\partial t} &= \left(\frac{\partial R_2}{\partial a^1} - \frac{\partial R_1}{\partial a^2} \right) (-a^1 - \gamma a^2) - a^1 \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial a^2} - \frac{\partial R_2}{\partial a^1} \right) a^2 - a^2\end{aligned}\quad (1.1.25)$$

假设 R_2 不依赖于 a^1 , 则方程 (1.1.25) 第一个的特征方程为

$$\frac{da^1}{0} = \frac{da^2}{-a^1 - \gamma a^2} = \frac{dt}{1} = \frac{dR_1}{-a^1}$$

它有如下积分

$$a^1 = c_1, \quad (a^1 + \gamma a^2)\exp(\gamma t) = c_2, \quad R_1 + a^1 t = c_3$$

于是, 解为

$$\Psi(a^1, (a^1 + \gamma a^2)\exp(\gamma t), R_1 + a^1 t) = 0$$

其中 Ψ 为任意函数. 可简单地取

$$\Psi = R_1 + a^1 t - \frac{1}{\gamma}(a^1 + \gamma a^2)\exp(\gamma t) = 0$$

即

$$R_1 = \frac{1}{\gamma}(a^1 + \gamma a^2)\exp(\gamma t) - a^1 t$$

将其代入方程 (1.1.25), 得

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} = a^2 \exp(\gamma t) - a^2$$

于是有

$$R_2 = \frac{1}{\gamma}a^2 \exp(\gamma t) - a^2 t$$

其次, 用 Santilli 第二方法. 这个方法要求方程是自伴随的, 但方程 (1.1.24) 不是自伴随的. 为此, 将方程写成形式

$$(\ddot{x} + x + \gamma \dot{x}) \exp(\gamma t) = 0$$

令

$$a^1 = x, \quad a^2 = \dot{x}$$

则有

$$-\dot{a}^2 \exp(\gamma t) - (a^1 + \gamma a^2) \exp(\gamma t) = 0$$