高等几何

辅导材料

山东省五所师专高等几何修编组

高等几何辅导材料

山东省五所师专高等几何修编组

一九八五年九月

前　　言

今年四月，五所师专在菏泽召开的高等几何教材修编会上商定，对1983年11月编印的《高等几何辅导材料》一书进行修编和补充，以便于教学参考和学生自学。会议委托孙炳泰、李云普、宋述立、任国朝等同志审编定稿。全书分为参考资料、习题解答和参考习题三部分，对选用的文章和题解根据教材作了相应的修改。由于水平有限，不当之处请批评指正。

山东省五所师专高等几何修编组

1985年9月

目　　录

参 考 资 料

习 题 解 答

参 考 习 题

参 考 资 料

几何基础(教材分析)

张 立 绥

“几何基础”是研究几何学公理系统的科学。

在师专数学专业开设“几何基础”，由于教学时间的限制，不能对这门科学的内容作全面的系统的陈述，而只能择其要骸。本编共有三个主要内容：几何基础的发展简史，希尔伯特公理系统，罗氏几何的基本定理。

一 几何基础的发展简史

这部分内容包括古代几何学简史，欧几里得的《几何原本》，对《几何原本》中第五公设的试证和罗氏几何与希尔伯特公理系统的诞生等四部分。这些内容主要阐明了产生近代公理法的条件，和产生非欧几何的历史原因。在教学和学习过程中，应尽量避免脱离教学目的而泛泛地对几何学史作过多的陈述或深究。应该“群星托月”抓住欧几里得《几何原本》，联系其产生的前后，说明希尔伯特公理系统与非欧几何是历史发展的必然产物，是数学科学特别是几何学的重大贡献，它不仅整理和归纳了古代几何方面的发现与发展，而且开创了用综合法研究几何学的新纪元。《几何原本》在全部数学的发展史上有着深远的历史意义和影响，教材中虽然列举了《原本》逻辑上还存在着这样那样的缺点和问题，例如公理的不完全性等，但这并非对《原本》的褒贬，而是

指出十八到十九世纪以撒开里、勒让德、约·波里埃、罗巴切夫斯基、黎曼以及希尔伯特等为代表的伟大数学家们在几何科学上所创造的光辉业绩，从而了解非欧几何学及近代公理法的起因以便更好地去理解它。非欧几何学特别是罗氏几何学与近代公理法，在历史上是同生同长的一对孪生兄弟，这一历史事实在学习研究几何基础时是不能忽视的。

二 希尔伯特公理系统

十九世纪的晚期，关于近代公理法的研究已日臻完善，论著如雨后春笋，其中最重要的文献便是德国数学家希尔伯特于1899年发表的《几何基础》。希尔伯特建立了一个完善而科学的欧几里得几何的公理系统，修正了《原本》中的缺点，并提出了公理系统必须符合的三个基本原则，即相容性、独立性、完备性。从此以后，欧氏几何科学化的问题得到了圆满地解决。几千年来历代几何学家们对《原本》的研究整理工作也就告一段落。

关于这部分内容的教学，注意以下三个方面的问题。

1 对基本对象“点”、“直线”、“平面”的理解。希尔伯特公理系统中所规定的基本对象“点”、“直线”、“平面”并不描述它们的形象，这是公理系统具有高度的抽象性、概括性和科学性的要求。我们可以随意地用一些具体事物代表“点”、“直线”和“平面”，只要这些事物之间能够解释一定关系（即公理中规定的基本关系——结合关系、顺序关系、合同关系），并使这些关系符合公理系统所规定的要求即可，这就构成了几何学。换句话说，凡能够符合公理要求的一切东西（事物）统统可以构成几何学。这样

以来通常所说的形象或图形就无关紧要了，它只不过是符合这种几何学公理系统要求的一种直观形象。凡符合几何公理系统的要求的形象称为解释这种几何的模型（例如在中学里我们平常在纸面或黑板面上画出的“点”、“直线”、“平面”，就是解释欧氏几何学的一种模型）。于是几何学的含意就不再受欧氏几何的局限（欧几里得几何中的点、直线、平面先验地给出了形象，其一切几何性质也仅指这些形象而言），而更具有一般性。

初学几何基础时，往往对这三个基本对象的抽象意义不能很好地理解。特别刚进大学的学生，当谈到“点”、“直线”、“平面”三个基本对象时，往往是“先天”的体现出在中学时形成的直观形象。这一点必须逐步地予以克服，否则它对几何基础科学性的理解必然会成为阻力。例如对解释希尔伯特公理系统的各种模型上的“点”、“直线”、“平面”，常常与中学时所得到的形象是完全不相同的。

2　平行公理和它的等价命题。希尔伯特公理系统所采用的平行公理是与《原本》第五公设等价的普雷菲尔公理：“设AB是任意直线，C是不属于AB的一点，那么在点C和直线AB决定的平面上至多可引一条直线，通过点C而不与AB相交”。对这条公理并不难理解，最重要的是应注意这条公理是绝对几何、欧氏几何、罗氏几何及黎曼几何的分水岭。凡与这条公理毫无关系的几何就是绝对几何学；凡与这条公理相符合的几何学就是欧氏几何学；与这条公理相反的罗氏几何与黎曼几何通常称为非欧几何学。因此在教学这条公理时，确切地掌握它的等价命题是十分重要的，因为它是区分各种几何学的基本标准，也是在逻辑上推动几何学向前

发展的历史渊源。

关于两个命题等价的意义是，设命题A、B和不含A、B的公理系统Σ，如果由$\Sigma+A$能推出B，又能从$\Sigma+B$推出A，那么命题A与B关于公理系统Σ是等价的。即在公理系统Σ中以A或B作为公理时，作用是一样的。例如以希尔伯特的前四组公理组成公理系统Σ，用A表示“平面上存在相似三角形”，用B表示普雷菲尔平行公理，那么可以由$\Sigma+A$推出B，由$\Sigma+B$推出A（证明略），因此平面上存在相似三角形和平行公理是等价的。如果公理系统Σ里，加入B作公理，那么A就是推论，反之也一样。希尔伯特的前四组公理的一切推论以及前四组公理再加上平行公理的一切推论就构成了欧氏几何的全部内容。因此希尔伯特的公理系统是欧氏几何的公理系统或者叫做初等几何的公理系统。

3　希尔伯特公理系统与中学几何的关系。严格的以希伯特公理系统为基础的几何学，是科学的几何学。而中学几何也是以希尔伯特的公理系统为基础的，所以中学几何也是欧几里得几何学，然而由于教育的要求，根据中学生年龄特征、智力发展的适应性，在中学几何里对希尔伯特公理系统要作必要的修正，最突出的有三点：第一，顺序公理与连续公理（包括线段的度量）在中学几何里被允许是显然的。例如，对命题“直线上有不同的三点，那么有且仅有一个点在其他两点之间”，这里既不要解释“在……之间”的意义，也不需要证明结论的正确性，一切被直观显然性所代替了。其他如“直线上有无限多个点存在”，“线段都有长度”等等，都可以作为自明的，并可作为理论证明的根据。

第二，“合同”是希尔伯特公理系统的基本概念，“运

动”是“合同”的派生概念。中学几何里则恰恰相反，以“运动”（搬动）为自明的基本概念，而“合同”则是“运动”的派生概念。在这里的“合同”是指两个图形的“重合”而言，而重合是经验的，因此，这样的处理方法直观易明，便于为中学生们接受。

第三，希尔伯特公理系统，除三个基本概念，三个基本关系以及联系这些概念和关系的五组公理外，并不允许有其他的任何因素加入到这几何中来。中学几何则不同，为适应综合技术教育的需要，不仅增加了许多代数公理，而且允许用眼、用手、用工具解决问题。在高等师范院校里，学习希尔伯特公理系统，主要是为了明确各种几何学特别是欧氏几何学科学的空间结构和公理法的严谨性，从而居高临下，更有力的指导中学几何的教学。切不可忽视中学教育的要求，把希尔伯特公理系统及其推论的严格证明不加区别的照搬到中学里去。

三　罗氏几何的基本定理

这部分内容表明了不同的公理系统构成不同的几何学，从而说明了公理系统作为几何基础的重要意义。因此，罗氏几何基本定理是研究几何基础不可缺少的内容。特别是罗氏几何的平行公理和欧氏几何的平行公理相反，然而其公理系统本身的逻辑展开并未导致矛盾，这就证明了欧几里得第五公设的独立性，从而加强了对欧氏几何公理系统（即希尔伯特公理系统）的科学性的认识。

罗氏几何的创立，本源于对欧几里得几何原本第五公设的试证。这种试证从《原本》问世不久一直到十八世纪，从

未间断过。所以罗氏几何的创立和发展，决非罗巴切夫斯基一人之功，而是若干代数学家共同努力的结果。罗氏几何的所有定理，统统是希尔伯特的前四组公理以及罗氏平行公理组成的罗氏几何公理系统逻辑推演的结果，因此，初学者对罗氏几何的真实性常常提出疑问，可以从广义相对论的观点出发（参阅《爱因斯坦文集》第一卷），指明各种几何学都是和现实的物理空间相联系的。无论是欧氏几何学或罗氏几何学，只能是近似地反映现实物理空间的几何性质。由于欧氏几何学容易理解，应用简便，并被人们几千年的实践经验证实了它在可认识到的物理空间的真实性，所以人们以欧氏几何为正宗，这是历史的必然。但不能由此得出结论说罗氏几何就不真实，应该说它们好比毛笔和铅笔都是笔，各有所长，各有所用。

本教材只列举了罗氏几何的基本定理，以说明欧、罗两种几何学的根本不同。如果读者要更深入地了解罗氏几何，可参阅钱端壮编《几何基础》、科士青著《几何学基础》或陈荩民著《非欧派几何学》。

联系初等几何，讲好射影几何

张成先

师范专科学校教学计划规定师专数学专业开设高等几何，其内容包含几何基础（希尔伯特公理系统及罗氏几何）与平面射影几何两部份，这些都是上个世纪以来几何学发展

的重要成就。对于射影几何部分，通过教学，要使学生在已学过的初等几何、解析几何及高等代数的基础上，掌握平面射影几何的基本概念、基础知识及其理论体系的基本结构，认识射影空间的基本特征及射影几何的研究方法；了解在变换群观点下的几何学分类，掌握欧氏几何、仿射几何、射影几何以及非欧几何间的联系与区别，与几何基础部分相结合，最终达到发展学生的几何空间观念，扩大几何视野，提高学生的几何素养与驾驭中学几何教材的能力的目的。

在学习本课程之前，学生已有的几何知识与几何空间观念是欧氏的，对多数学生来说，由于直觉的习惯和知识的局限，认为欧氏几何空间是理所当然的，绝对的。在学习本课程时，不管在罗氏几何或射影几何中所面对的却是在结构与性质上与欧氏几何空间不相容的或者是不相同的。因而学生在学习中对于新概念、新知识常感到不自然，难接受，若明若暗，常常是形式主义的理解，难于融汇贯通。这一困难，在我们讲授本课程时必须有所估计。教学中正反两方面的经验说明，在高等几何的教学中经常注意与初等几何比较、联系，这不仅有利于学生接受也利于培养学生居高临下的能力。

在射影几何部分，联系初等几何进行教学，一般可通过以下几个方面。

一　逻辑基础与理论体系

我省五所师专合编的高等几何教材，其射影几何部分不是采用公理法结构，而是从欧氏空间出发，通过增加无限远元素构造射影空间，展开平面射影几何的内容的。这本身就体

现了与初等几何的联系，利于学生接受。当然，这样处理也有其缺点，即学生一时不易了解射影几何的基本特征及其与初等几何的联系和区别。正由于此，教材在引出射影空间的概念之后又介绍了射影几何的公理系统，让学生从公理法的角度以较高的观点来认识射影几何，提高理论水平。教师在介绍这部分内容时不仅应较直观的从中心投影的角度说明射影几何的公理体系为什么只包含结合、顺序、连续三组公理的合理性，并应进一步从公理法角度深入分析射影几何的基本特征是位置几何学，而不象初等几何那样不仅研究图形的位置关系还要研究图形的度量性质，从而让学生明确划清那些是射影几何的内容，那些不是。对于两种几何中的结合、顺序与连续公理还应进一步逐条地进行对比，从而让学生认识它们的不同点和相同点，这样一开始就从逻辑基础上把两种几何空间的区别和联系交待清楚，对以后的教学大有好处。

对初等几何与射影几何或进而对仿射几何、非欧几何从理论体系上进行系统比较与评定，是在本书的后部。首先在群论观点下，从运动变换、仿射变换及射影变换的代数形式与几何特征（无限远直线不变，无限远直线及其上的圆点不变）阐明欧氏几何、仿射几何所对应的变换群都只不过是射影变换群的子群，从理论上进一步讲清了这几种几何学的统一性及区别。而对于非欧几何，教材在最后也作了简单的提示，指出从射影的观点看，欧氏几何与非欧几何的区别同样只在于绝对形选取的不同，从而对应的射影自同构群——射影变换群的子群不同。教材对此未作详述，但这里却包含重要的理论意义，它不仅进一步丰富了几何学的群论原则（克莱

茵观点)的内容,是学生现有的几何知识的进一步总结,而且,罗氏平面几何所对应的绝对形是射影平面上的常态实二次曲线,在此绝对形内可建立罗氏几何的射影几何模型,即克莱茵模型,通过它可以进一步解释第二章所讲授的罗氏几何的内容,因此若适当补充(可参考本书中的“非欧几何学的克莱茵模型”,第58页),可以收到前后照应融汇贯通之效,是很有好处的。总之,在射影几何的开头与末尾,必须有意识有目的地分析,使用好上述教材,讲清欧氏几何、非欧几何与射影几何等的内在联系与区别。这样以来,学生视野宽阔,界限清楚,对学好射影几何,提高对初等几何的驾驭能力都是十分重要的。

二 概念教学

射影几何中的许多概念,联系初等几何的知识加以介绍会有助于学生去理解和掌握。联系的方式,根据情况不同一般在两种几何间或由“初”及“高”,或由“综合”到“解析”,或相比较。

例如齐次坐标与齐次坐标方程,利用代数方法引入,学生并不难理解。但是为什么必须引入齐次坐标?点的齐次坐标、直线的齐次方程与非齐次坐标、非齐次方程的几何意义有何区别?这种坐标系是什么样的坐标系?它与以后介绍的射影坐标系有何关系等等。诸如此类的问题涉及到齐次坐标、齐次坐标方程的意义及概念的逐步扩展,如不从相应的空间的逐步扩展和比较中加以说明,学生是不易真正理解的。关于交比的概念,教材是直接给出参数形式的定义,再给以几何的解释,这样由一般到特殊,简洁明了。在讲课时也可从

欧氏几何的度量观念出发，先给出点列上四点、线束中四线交比的初等意义，而后推出在欧氏平面上的参数表示，最后给出交比的射影定义。这样由“初”及“高”，由具体到抽象，由特殊到一般，学生既易于接受，又能在概念的逐步扩展中体会到两种几何的区别与联系。其他如一维基本形式、完全四点形，也应联系欧氏几何与射影几何的特征，通过比较说明“基本”、“完全”的含义，让学生知其所以然。

射影对应、射影变换等这些重要的基本概念，它们纯属射影概念，不能按由“初”到“高”的方式介绍，但若纯用解析定义，这样一来，射影对应与中心投影有何关系？射影对应与射影变换有何关系？这些问号在学生脑子里必然出现，疙瘩解不开，就会影响学生对概念的理解。教材在介绍射影对应的概念时，就采用了由”综合”到“解析”的方法，先给出点列与线束间的透视对应，再引入射影对应。教学时也可一并引出点列与点列间的透视对应（中心投影的推广）、线束与线束间的透视对应等概念，这样虽然要多花点时间，但由于有了抽象的基础，学生就易于接受。同样地，在讲射影对应时，教材特意介绍了两点列间的射影对应的齐次坐标的表达式 $\rho x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2$，$\rho x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$（$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$），为后面讲射影变换打下了埋伏。在讲射影变换时，要有意地与前面对比，说明它们之间的关系，便于揭示这些知识的内在联系，使学生形成一完整概念。总之，对一些解析定义，应力求避免生硬地塞给学生，使学生食而不知其味。

对偶原理反映射影空间的基本特征，应充分利用它多举例子说明两种空间的区别，从比较中使学生加深理解，明确

对偶原理的适用范围，防止出现不考虑命题性质，盲目地、教条地去制造对偶命题的错误。

三　联系初等几何内容

师范院校数学专业的学生在学习高等数学时常常提出"学了有什么用？"的问题，这种提法虽欠妥，但也反映了我们在教学中存在不注意联系初等数学的缺点，在本教材中对于这种联系比较注意，教学时应尽量把握和发挥。

用射影几何的理论来处理和解释初等几何或解析几何中的有关问题，这意味着我们从射影平面回到了拓广的欧氏平面或欧氏平面上来，当然这里所能联系的只能是那些与射影性质有关的问题，即与在射影变换下图形的不变性质（同素性、结合性）及不变量（交比）有关的问题。在射影几何教学中，为了提高学生的能力，一方面应注意交待射影几何中某些基本概念和理论在初等几何、解析几何中的意义以及用于解决初等几何问题的范围和方法。另一方面，还应注意重视初等几何及解析几何中一些概念的射影解释，从而既能"居高"又能"临下"。

例如，利用笛沙格定理以及四点形、四线形的射影性质可以解决有关线共点、点共线问题。教材中这方面的篇幅不少，应充分加以利用。还可从梁绍鸿编《初等数学复习与研究》（平面几何，P.158—202）中选取一些具体材料。在第三、四、五章内处理这些问题主要是用综合法，在第六章介绍了平面射影坐标系后，还可以通过例题引导学生恰当选出射影坐标系，用齐次坐标来解决（如本书中参考习题第44题等），以收深入浅出、上下结合之效。

教材第七、八章讲授二次曲线的射影性质、仿射性质和度量性质，这部分内容不仅与初等几何，且与学生已有的解析几何知识联系也非常密切，教学中应充分注意揭示、发挥。如通过二次曲线的射影性质、帕斯卡与布列安桑定理的讲解，可以提出有关圆与椭圆的内接、外切六边形、五边形以至三边形的类似几何性质，让学生去寻求其初等证明方法，并利用定理让学生去研究二次曲线的作图问题。通过极点与极线的讲解，可提出在初等几何中由反演变换所定义的圆的极点、极线的许多类似结论。通过配极对应与拉盖尔定理，可把学生所熟悉的二次曲线的重要概念如中心、直径、渐近线及主轴、焦点、准线等以新的射影解释，从新的高度把这些知识统一起来，这样新旧联系，高低贯通，“学了有什么用”的问题自然可以得到回答，从而提高学生的学习兴趣，加深对射影几何的理解，把知识学活。这些教学上的措施，不少可在教师提供材料的基础上，指导学生自己去阅读去研究，不一定占用课堂时间。

四　适当介绍射影几何学的历史

科学发展是有继承性的，从欧氏几何到射影几何所走过的道路是漫长的，这其中也有其规律与联系，因而适当介绍历史，对学生学好射影几何不无好处。

我们知道古希腊的综合几何学曾取得了光辉的成就，这集中反映在欧几里得（Euclid，公元前330——275年）的《几何原本》与阿波罗尼（Appollonius，公元前262—190年）的《圆锥曲线》中。《圆锥曲线》一书中曾讲到圆锥曲线的极点、极线性质。此后，梅耐劳斯（Menelaus，