



2012硕士学位研究生入学资格考试

GCT

数学



模拟试题与解析

刘庆华 主编



清华大学出版社

495

D00927807



2012硕士学位研究生入学资格考试



模拟试题与解析

刘庆华 主编

关 治 扈志明 编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书根据硕士学位研究生入学资格考试指南的要求,编写了12套模拟试题.每套试题包含25道单项选择题,其中算术、初等代数、几何与三角三部分有15道题,一元函数微积分、线性代数两部分有10道题.书中给出了每套模拟试题的答案与解析过程,供考生们参考.

本书可供准备参加硕士学位研究生入学资格考试的备考人员以及辅导教师使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.滴水涂抹后标识图案消失,水干后图案再现;揭下标识表膜置于白纸上,用彩笔涂抹后图案可透印.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2012 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学模拟试题与解析/刘庆华主编;关治,扈志明编.--北京:清华大学出版社,2012.4

ISBN 978-7-302-28295-2

I. ①2… II. ①刘… ②关… ③扈… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 043334 号

责任编辑:刘颖

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:9.5 字 数:212 千字

版 次:2012 年 4 月第 1 版 印 次:2012 年 4 月第 1 次印刷

印 数:1~10000

定 价:20.00 元

出版 说明

2012 硕士学位研究生入学资格考试

硕士学位研究生入学资格考试(Graduate Candidate Test, GCT)是国务院学位委员会办公室组织的全国统一考试。考试始于 2003 年,当时名为“工程硕士专业学位研究生入学资格考试”(简称 GCT-ME),考试适用范围为在职报考工程硕士的考生。2004 年,适用范围增加了报考农业推广和兽医专业硕士的考生,考试名称也去掉了“工程”二字。2005 年,国务院学位委员会办公室组织专家对 2003 版考试大纲进行了修订,考试名称改为“硕士学位研究生入学资格考试”。GCT 考试属于综合素质型考试。考试试卷由四部分构成:语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试、外国语运用能力测试。试卷满分 400 分,每部分各占 100 分。考试时间为 3 个小时,每部分为 45 分钟。考试试题均为客观选择题。

清华大学出版社是国内最早出版 GCT 考前辅导用书的出版机构。2003 年,我们出版了由全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织编写的“全国工程硕士专业学位研究生入学资格考试考前辅导教程”丛书,包括语文、数学、英语、逻辑共 4 册。2004 年,在对考前辅导教程系列进行修订再版的基础上,又特别邀请教程系列的作者编写了“硕士学位研究生入学资格考试模拟试题与解析”系列,同样分为语文、数学、英语、逻辑 4 册,作为考前辅导教程的配套资料,供考生复习时进行强化训练使用。2005 年,我们组织出版了《英语核心词汇精解》,作为《英语考前辅导教程》的补充;《综合模拟试卷》用于临考前进行实战模拟测试。这些图书组成了覆盖系统复习、训练提高、模拟冲刺等考生备考各阶段需求的比较完整的备考辅导书体系。考虑到考生不同的知识背景、备考时间及复习策略,我们还出版了“历年真题分类精解”系列(一套 4 册)和含有大量报考信息的综述性的备考图书《GCT 备考指南》,考生可根据自身的实际情况选用最适合自己的图书。为及时反映 GCT 考试命题发展趋势的变化,不断提高图书质量,我们每年都要对上述图书修订改版一次。经过多年的积累和提高,清华版 GCT 考前辅导用书以其权威性、严谨性、全面性和实用性,给广大考生复习和备考提供了方便,赢得了广大考

生的欢迎和信赖。

本次推出的 2012 版图书是在 2011 版的基础上精心修订而成的,其中在考前辅导教程 4 册书中各附赠清华在线上网学习卡(在封底)。读者可使用该卡上的激活码访问交互式辅导网站 www.qinghuaonline.com,免费获取更多有用的报考备考资料。

欢迎广大读者选用本系列图书,祝大家考试成功!

清华大学出版社

2012 年 3 月

清华
GCT

GCT 数学模拟试题与解析

前言

2012 硕士学位研究生入学资格考试

本书是根据硕士学位研究生入学资格考试指南编写的数学辅导材料,以方便考生备考。

按照现在的复习备考方式,大致将复习的过程分为三个阶段:全面复习阶段、归纳总结阶段和冲刺阶段。在每个阶段考生所选用的辅导材料是有区别的。在全面复习阶段,一般选用涵盖考试大纲所涉及的知识点的教材(我们所编写的《2012 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学考前辅导教程》就是为此准备的),此阶段的主要任务是将要考的知识点搞清楚、弄明白,扫清知识上的盲点。在归纳总结阶段,是对前一阶段所复习知识的浓缩和提升,以便于自己从全局上把握所复习的知识,突出重点和难点。由于各自的知识背景和复习效果不同,所以浓缩和提升的程度也不同,因此,这一阶段可选择材料较少,一些辅导教师开设申讲课来帮助备考者归纳总结,考生也可根据自身特点,自己总结或提炼此阶段的复习材料和复习方法。在冲刺阶段,大多采取做模拟题的方式,通过做模拟题来检查自己对知识点的掌握程度以及灵活运用所学知识处理问题的能力,同时也可以从中发现自己的薄弱点,以便及时调整复习的方式和方法。很多考生在第二阶段就开始有针对性地做一些题目,帮助自己归纳总结,训练提高。另一方面,也可以通过做模拟题来熟悉试卷的出题方式和应对考试的一些措施及技巧。

为了便于考生检验全面复习阶段的效果,顺利、便捷地开展归纳总结阶段的复习,我们在编写《2012 硕士学位研究生入学资格考试 GCT 数学考前辅导教程》的基础上,编写了本书,以帮助考生在备考阶段准备得更加充分,提升应试能力,以利在考试中取得好的成绩。

考试大纲中关于数学内容的考试要求是:测试考生所具有的数学方面的基础知识和基本思想方法,逻辑思维能力,数学运算能力,空间想象能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力。据此,我们在模拟试题的选择上,既考虑到试题的知识覆盖面,又注意到难易程度,以利于考生通过做模拟试题能够全面检查对所复习知识的掌握程度。在模拟试题的设计上,既侧重知识的重点和难点,也注意考查重点和难点的方式与方法,以便于考查考生对重

点和难点的掌握程度以及对这些知识点的灵活运用情况。

根据考试指南的要求,我们在此模拟试题集中编写了 12 套模拟试题. 每套试题包含 25 道单项选择题,其中算术、代数、几何与三角三部分有 15 道题,一元函数微积分、线性代数两部分有 10 道题. 在书的后半部分给出了每套模拟试题的答案与解析过程,供考生们参考。

由于 GCT 在国内是一种类型比较新颖的考试,准备 GCT 考试与准备传统的考试有所不同,为了使考生尽快地熟悉和掌握这一考试形式,对过去的考题做一点总结和分析是十分必要的. 下面用表格的形式将过去 9 年中数学基础能力测试题涉及的知识点加以汇总,以便考生能够清晰地了解考点的分布情况以及各考点的出题频次,更有针对性地进行复习备考。

科 目	内 容	具体知识点	出题年份
算 术	数的概念与运算	数的概念与性质	2003,2004,2009
		分数运算	2003,2008,2011
		比与百分数的运算	2003, 2004, 2005, 2006, 2006, 2007, 2008,2010,2010,2011
		算术表达式求值	2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009,2010,2011
	简单应用问题	植树问题	2003,2004,2008
		运动问题	2004,2007,2008,2009,2011
		求单位量与求总量的问题	2004,2005
		其他问题	2006
初等代数	数与代数式	乘方、开方运算	2003
		绝对值的概念与性质	2004,2011
		复数的基本概念与简单运算	2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010,2011
		简单代数公式	2005,2005,2007,2007,2011
	集合与函数	集合与函数的基本性质	2003,2007,2009,2010,2010
	代数方程和一元二次函数	一元二次方程	2004,2006,2007,2008,2010
		二元一次方程组	2007
		一元二次函数	2003,2006,2008,2009
	不等式	分式不等式	2004
	数列	等差数列,等比数列	2005,2006,2009,2010,2011
	排列、组合、二项式定理	组合公式	2007,2008,2009
	古典概率问题	等可能事件的概率	2004,2005,2006,2008,2009,2010
		简单概率公式	2003,2007
几何与三角	平面几何	求面积问题	2003, 2004, 2005, 2006, 2006, 2008, 2009,2009,2011
		求长度问题	2004,2004,2005,2010
		求角度问题	2004,2006,2007
	空间几何图形	空间几何体	2003, 2003, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009,2010,2011
	三角函数	特殊角的三角函数值	2005,2007,2008,2009,2010

清华
GCT

续表

科 目	内 容	具体知识点	出题年份
几何与三角	平面解析几何	平面直线问题	2003, 2003, 2004, 2006, 2009, 2010
		平面几何与平面解析几何的综合题	2005, 2005, 2007, 2008, 2010, 2011
		二次曲线问题	2005, 2006, 2008, 2009, 2010, 2011
一元函数 微积分	函数、极限、连续	函数	2005, 2008, 2009
		极限	2005, 2007, 2009, 2010, 2011
		连续	2007
	导数与微分的概念与运算	基本概念	2003, 2005, 2006, 2008, 2010, 2011
		运算	2004, 2007, 2009, 2010
	导数的应用	利用导数判定单调性、求极值	2003, 2003, 2004, 2005, 2006, 2006, 2006, 2007, 2008, 2008, 2009, 2010, 2011
	不定积分	分部积分与换元积分	2005, 2007
	定积分	定积分的概念与性质	2003, 2005, 2007, 2009
		定积分的运算	2003, 2004, 2006, 2006, 2008, 2008, 2009, 2010, 2011
		定积分的应用	2004, 2004, 2010, 2011
线性代数	行列式	行列式的性质及计算	2003, 2004, 2005, 2007, 2009
	矩阵	矩阵的运算与性质	2003, 2003, 2005, 2006, 2008, 2010, 2011
		逆矩阵	2004, 2007, 2009
	向量组	线性相关与线性无关	2004, 2006
		秩与极大线性无关组	2005, 2008, 2010
	线性方程组	齐次线性方程组	2003, 2004, 2006, 2008
		非齐次线性方程组	2007, 2009, 2010, 2011
	矩阵的特征值和特征向量	基本概念与运算	2003, 2005, 2006, 2008
		可对角化的充要条件	2004, 2007, 2009, 2010, 2011

由于 GCT 考试是只有四选一这种形式的客观题, 考生除了复习好有关的内容, 掌握基本的分析问题和解析问题的常用方法外, 还应了解处理选择题时的一些解题技巧. 下面就以一些题目为例, 简要地介绍几种技巧.

一、排除法

由于在 GCT 考试中四个选项中有且仅有一个选项正确的, 所以如果能将错误的排除, 剩下的自然就是正确选项. 大部分情况下, 即使只排除掉一两个错误选项, 对找到正确选项也是很有帮助的. 因此排除法是处理选择题的一个有效方法.

1. (2003) 甲乙两人百米赛跑成绩一样, 那么_____.

- (A) 甲乙两人每时刻的瞬时速度必定一样
- (B) 甲乙两人每时刻的瞬时速度都不一样
- (C) 甲乙两人至少在某时刻的瞬时速度一样

前言

清
GCT

2012 硕士学位研究生入学资格考试

(D) 甲乙两人到达终点时的瞬时速度必定一样

根据常识很容易将选项(A), (B), (D)排除掉, 因此正确选项为(C).

2. (2003) 某工厂产值三月份比二月份的增加 10%, 四月份比三月份的减少 10%, 那么_____.

(A) 四月份与二月份产值相等

(B) 四月份比二月份产值增加 $\frac{1}{99}$

(C) 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{99}$

(D) 四月份比二月份产值减少 $\frac{1}{100}$

根据题意可知四月份的产值不会多于二月份, 因此选项(A), (B)可以直接排除掉. 这样此题就变成了一个二选一的是非题, 难度就降低了.

3. (2005) 三个不相同的非零实数 a, b, c 成等差数列, 又 a, c, b 恰成等比数列, 则 $\frac{a}{b}$ 等于_____.

(A) 4

(B) 2

(C) -4

(D) -2

根据条件可知 $c^2 = ab$, 从而 $\frac{a}{b} > 0$, 所以选项(C), (D)错误. 又 $2b = a + c$, 即 $2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$,

且 $\frac{c}{b} \neq 0$, 所以 $\frac{a}{b} \neq 2$, 故选项(B)错误. 即正确选项为(A).

4. (2007) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$, 则必定_____.

(A) $f(1) = 4$

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义

(C) 在 $x=1$ 的某邻域($x \neq 1$), $f(x) > 2$

(D) 在 $x=1$ 的某邻域($x \neq 1$), $f(x) \neq 4$

取 $f(x) = \frac{2(x^2-1)}{x-1}$ 排除选项(A), 取 $f(x) = 4$ 排除(B), (D). 故正确选项为(C).

二、特殊值代入法

题目中给出的大多是一些满足一定条件的变量或函数. 对这些量成立的结论对满足这些条件的特殊数或特殊函数自然也成立. 通过选取合适的特殊值, 将正确选项找出是处理选择题的最有效方法之一.

1. 设 a, b, m 均为大于零的实数, 且 $b > a$, 则 $\frac{a+m}{b+m}$ 与 $\frac{a}{b}$ 谁大? _____.

(A) 前者

(B) 后者

(C) 一样大

(D) 无法确定

对于此题, 如果令 $a=1, b=2, m=1$, 及 $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, 便知选项(A)正确.

2. (2003) 函数 $y_1 = f(a+x)$ ($a \neq 0$) 与 $y_2 = f(a-x)$ 的图形关于_____.

(A) 直线 $x-a=0$ 对称

(B) 直线 $x+a=0$ 对称

(C) x 轴对称

(D) y 轴对称

在此, 若取 $f(x) = x$, 则 $y_1 = a+x, y_2 = a-x$, 从而易知选项(D)正确.

3. (2005) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} (n=1, 2, \dots)$, 则 $f'(0) =$ _____.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

作为选择题, 本题的简单方法是取 $f(x) = 2x$, 则 $f(x)$ 满足题中条件, 且 $f'(x) = 2$, 特别地有 $f'(0) = 2$. 故选项(C)正确.

4. (2005) 已知 x 为 n 维单位列向量, x^T 为 x 的转置, I_n 为单位矩阵, 若 $G = xx^T$, 则 G^2 等于 _____.

(A) G

(B) $\pm G$

(C) 1

(D) I_n

若取 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则 $G = xx^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $G^2 = G$. 故选项(A)正确.

5. (2006) 设 n 为正整数, 在 1 与 $n+1$ 之间插入 n 个正数, 使这 $n+2$ 个数成等比数列, 则所插入的 n 个正数之积等于 _____.

(A) $(1+n)^{\frac{n}{2}}$

(B) $(1+n)^n$

(C) $(1+n)^{2n}$

(D) $(1+n)^{3n}$

取 $n=1$, 则数列为 $1, \sqrt{2}, 2$, 插入的数为 $\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}}$. 易知选项(A)正确.

6. (2007) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 展开式中的常数项为 _____.

(A) 4

(B) 2

(C) 1

(D) 0

行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项是它在 $x=0$ 时值, 即 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 由于此行列式的

第一行与第二行相同, 故其值为 0. 即选项(D)正确.

7. (2009) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1 和 F_2 . 若 P 是该双曲线右支上异于顶点的一点, 则以线段 PF_2 为直径的圆与以该双曲线实轴为直径的圆的位置关系是 _____.

(A) 相离

(B) 外切

(C) 相交

(D) 内切

作为选择题, 不妨选一特殊的双曲线和特殊的 P 点. 例如, 取 $a=3, b=4$, 则右焦点 F_2 为 $(5, 0)$. 再取双曲线右支上与 F_2 具有相同横坐标的一点 $P\left(5, \frac{16}{3}\right)$, 则以 PF_2 为直径的圆的圆心坐标为 $M\left(5, \frac{8}{3}\right)$, 半径为 $\frac{8}{3}$. 以实轴为直径的圆的圆心为 $O(0, 0)$, 所以两圆圆

心距离为

$$|OM| = \sqrt{5^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 2 \times 3 \times \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 3 + \frac{8}{3},$$

即两圆圆心间的距离等于两圆的半径之和,所以两圆相切.故(B)选项正确.

三、选项代入法

对于选择题来说,题目中的选项也包含许多可以利用的信息,比如将题中给出的选项代入题干中进行验证就是处理选择题的一个常用方法.

1. (2004) 设 a, b, c 均为正数,若 $\frac{c}{a+b} < \frac{a}{b+c} < \frac{b}{c+a}$, 则_____.

- (A) $c < a < b$ (B) $b < c < a$ (C) $a < b < c$ (D) $c < b < a$

本题直接求解题干中的分式不等式比较复杂,但如果将选项(A)代入题干进行验证则非常简单.

2. (2005) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 的对应于特征值 2 的一个特征向量是_____.

- (A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

本题根据特征值和特征向量的定义,利用选项代入法易知正确选项为(D).

3. $\int e^{x^2+\ln x} dx = () + C$ (C 为常数).

- (A) e^{x^2} (B) $\frac{1}{2}e^{x^2}$ (C) $2e^{x^2}$ (D) $(1+2x^2)e^{x^2}$

由于 $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2} \neq xe^{x^2}$, 所以排除掉选项(A); 由于 $\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' = xe^{x^2} = e^{x^2+\ln x}$, 所以选项(B)正确.

4. (2007) 方程 $\sqrt{x+y-2} + |x+2y| = 0$ 的解为_____.

- (A) $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$

易知 $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 都不满足题设方程,所以正确选项为(D).

四、数形结合法

许多情形数与形是密切结合的.借助图形可以直观地理解数(函数)所反映的内容,因此,可以将题目与题目中所涉及的函数所对应的图形结合起来,寻找解题的捷径.

1. 要使方程 $3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2 = 0$ 的两个实根分别满足 $0 < x_1 < 1$ 和 $1 < x_2 < 2$, 实数 m 的取值范围是_____.

(A) $-2 < m < -1$

(B) $-4 < m < -1$

(C) $-4 < m < -2$

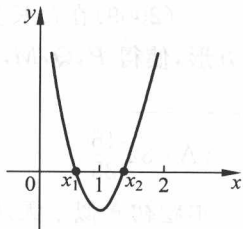
(D) $-3 < m < 1$

这里主要考查二次函数(方程)的性质. 如果用一元二次方程根与系数的关系解题, 比较烦琐, 我们不妨结合图形解题. 如例图 1 所示, 设

$$f(x) = 3x^2 + (m-5)x + m^2 - m - 2,$$

则 $f(x)$ 开口向上, 与 x 轴交于 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 两点, 有不等式组

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) > 0. \end{cases}$$



例图 1

从而有 $m^2 - m - 2 > 0$, $m^2 - 4 < 0$, $m^2 + m > 0$. 由此可确定出 $-2 < m < -1$. 故应选(A).

2. (2004) $\arg z$ 表示 z 的辐角, 令又 $\alpha = \arg(2+i)$, $\beta = \arg(-1+2i)$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

(A) $-\frac{4}{5}$

(B) $-\frac{3}{5}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) $\frac{3}{5}$

如例图 2 所示, 由复数的几何表示易知

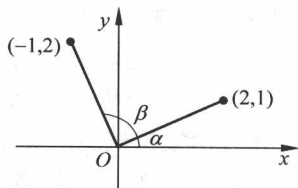
$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

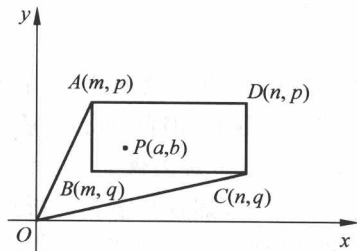
所以

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}.$$

故正确选项为(D).



例图 2



例图 3

3. (2006) $P(a, b)$ 的第一象限内的矩形 $ABCD$ (含边界) 中的一个动点, A, B, C, D 的坐标如例图 3 所示, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值与最小值依次是_____.

(A) $\frac{p}{m}, \frac{q}{n}$

(B) $\frac{q}{m}, \frac{p}{n}$

(C) $\frac{q}{m}, \frac{q}{n}$

(D) $\frac{p}{m}, \frac{p}{n}$

由例图 3 可知, 比值 $\frac{b}{a}$ 是直线 OP 的斜率, 当点 P 与点 A 重合时取得最大值 $\frac{p}{m}$, 当点 P 与点 C 重合时取得最小值 $\frac{q}{n}$, 故正确选项为 (A).

4. (2009) 在边长为 10 的正方形 $ABCD$ 中, 若按例图 4(a) 所示嵌入 6 个边长一样的小正方形, 使得 P, Q, M, N 四个顶点落在大正方形的边上, 则这 6 个小正方形的面积之和是 _____.

(A) $32 \frac{16}{25}$

(B) $30 \frac{1}{5}$

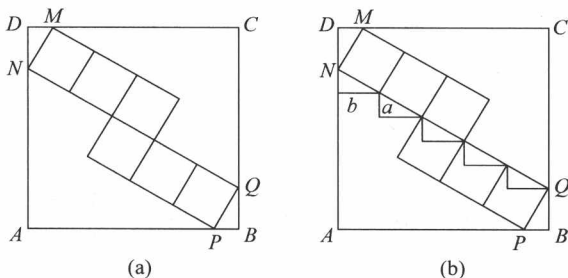
(C) $32 \frac{4}{5}$

(D) $30 \frac{4}{5}$

本题初看似乎无从下手, 但做出如例图 4(b) 中所示的辅助线后, 借助所得到的一些全等直角三角形, 可以很容易地看出这些全等直角三角形与正方形 $ABCD$ 之间的关系, 这样问题就迎刃而解了. 具体求解过程如下.

作如例图 4(b) 所示的辅助折线, 显然所得的小直角三角形与直角 $\triangle DMN$ 及 $\triangle BPQ$ 全等. 设小直角三角形的两条直角边的长度分别为 a, b , 则 $5b=10, 5a+2b=10$, 所以 $b=2, a=\frac{6}{5}$. 从而 $a^2+b^2=\frac{36}{25}+4=\frac{136}{25}$, 所求面积之和是 $6 \times \frac{136}{25}=32 \frac{16}{25}$.

故正确选项为 (A).



例图 4

从已举行的 9 次 GCT 考试汇总情况来看, 尽管 25 道题都是 4 选 1 的单项选择题, 但在 45 分钟内完成这些题目, 时间还是很紧张的. 因此考生在做这些模拟时, 最好按正式考试的要求来做, 即在 45 分钟内做完一套模拟题, 然后再核对答案, 进行分析总结. 而不要一遇到疑难问题就停下来, 翻看答案和解析过程. 这样才能真正体现出模拟试题的效用.

由于编者的经验和水平所限, 书中难免会有疏漏和不足之处. 欢迎广大读者、辅导教师及各方面的专家批评指正.

编者

2012 年 3 月

CONTENTS

目 录

2012硕士学位研究生入学资格考试

模拟试题(1)	1
模拟试题(2)	4
模拟试题(3)	8
模拟试题(4)	12
模拟试题(5)	16
模拟试题(6)	20
模拟试题(7)	24
模拟试题(8)	28
模拟试题(9)	32
模拟试题(10)	36
模拟试题(11)	40
模拟试题(12)	44
模拟试题(1)答案与解析	48
模拟试题(2)答案与解析	55
模拟试题(3)答案与解析	62
模拟试题(4)答案与解析	71
模拟试题(5)答案与解析	78
模拟试题(6)答案与解析	85
模拟试题(7)答案与解析	92
模拟试题(8)答案与解析	101
模拟试题(9)答案与解析	109
模拟试题(10)答案与解析	117
模拟试题(11)答案与解析	124
模拟试题(12)答案与解析	131

模拟试题(1)

本试题满分为 100 分,共 25 个选择题,每题 4 分.每小题所给出的 4 个选项中,只有一项是正确的.

1. 有一正的既约分数,如果其分子加上 24,分母加上 54 后,其分数值不变,那么,此既约分数的分子与分母的乘积等于[].

- (A) 24 (B) 30 (C) 32 (D) 36

2. 若 $m, n (m < n)$ 是关于 x 的方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两个根,且 $a < b$,则 a, b, m, n 的大小关系是[].

- (A) $m < a < b < n$ (B) $a < m < n < b$ (C) $a < m < b < n$ (D) $m < a < n < b$

3. 如果 Ω 是半径为 R 的球, $\bar{\Omega}$ 是以 Ω 的大圆为底面、顶点在 Ω 表面上的一个圆锥,那么 $\bar{\Omega}$ 的体积是 Ω 体积的[].

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

4. 两个码头相距 198km,如果一艘客轮顺流而下行完全程需要 6h,逆流而上行完全程需要 9h,那么该艘客轮的航速和这条河的水流速度分别是[]km/h.

- (A) 27.5 和 5.5 (B) 27.5 和 11 (C) 26.4 和 5.5 (D) 26.4 和 11

5. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 64,则展开式中常数项为[].

- (A) 20 (B) -20 (C) 160 (D) -160

6. 某种测验可以随时在网络上报名参加,某人通过这种测验的概率是 $\frac{1}{2}$.若他连续两次参加测验,则其中恰有一次通过的概率是[].

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

7. 已知 a 为正整数,且关于 x 的方程

$$\lg(4 - 2x^2) = \lg(a - x) + 1$$

有实数根,则 a 等于[].

- (A) 1 (B) 1 或 2 (C) 2 (D) 2 或 3

8. 若关于 x 的不等式 $|x-2|+|x+1|<b$ 的解集是 $\emptyset$, 则 b 的取值范围是[].

- (A) $(3, +\infty)$ (B) $[3, +\infty)$ (C) $(-\infty, 3]$ (D) $(-\infty, 3)$

9. 已知 $f(x)=3ax-2a+1$, 若存在 $x_0 \in (-1, 1)$, 使 $f(x_0)=0$, 则实数 a 的取值范围是[].

- (A) $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ (B) $(-\infty, -1)$

- (C) $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ (D) $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 首项 $a_1=2$, 公比 $q=2$, 其前 n 项之和为 S_n , 前 n 项之积为 T_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{(\sqrt[n]{T_n})^2} = []$.

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

11. 若方程 $\sqrt{9-x^2}=x+b$ 有实数解, 则 b 的取值范围是[].

- (A) $[-3, 3]$ (B) $[-3, 3\sqrt{2}]$ (C) $[-3\sqrt{2}, 3]$ (D) $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

12. $\triangle ABC$ 中, $AB=3, BC=\sqrt{13}, AC=4$, 则 AC 上的高等于[].

- (A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $3\sqrt{3}$

13. 坐标平面内, 与点 $A(1, 2)$ 距离为 2, 且与点 $B(4, 0)$ 距离为 3 的直线共有[]条.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

14. F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若 P 到 F_1 的距离等于 9, 则 P 到 F_2 的距离等于[].

- (A) 1 (B) 17 (C) 1 或 17 (D) 18

15. 两圆的半径之比为 $3:1$, 则大圆的内接正三角形与小圆的外切正三角形的面积之比为[].

- (A) $3:2$ (B) $9:4$ (C) $3:1$ (D) $9:1$

16. 函数 $f(x) = \frac{|x-1|\sin(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$ 在区间[]上有界.

- (A) $(-2, 1)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(3, 4)$

17. 曲线 $y=2^{2-x}$ 在 $x=2$ 处的切线方程是[].

- (A) $x\ln 2 + y = 1$ (B) $x + y\ln 2 = 1$

(C) $x \ln 2 + y = 2 \ln 2$

(D) $x \ln 2 + y = 1 + 2 \ln 2$

18. 已知某厂生产 x 件产品的成本为 $c(x) = 1000 + 150x + \frac{1}{10}x^2$ (元), 要使平均成本最小所应生产的产品的件数为 [] 件.

(A) 50

(B) 100

(C) 150

(D) 200

19. $I = \int_0^{2\pi} (2^{\sin x} - 2^{-\sin x}) dx$, 则 [].

(A) $I = 0$

(B) $I > 0$

(C) $I < 0$

(D) $I = 2\pi$

20. 曲线 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 x 轴、 y 轴及 $x = 3$ 所围成图形的面积为 [].

(A) $\int_0^3 (x^2 - 3x + 2) dx$

(B) $\left| \int_0^3 (x^2 - 3x + 2) dx \right|$

(C) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx$

(D) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx$

21. 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数, $F(x) = \int_{-1}^0 xf(x-t) dt$, 则 $F'(x) = []$.

(A) 0

(B) $xf(0)$

(C) $\int_0^1 f(t) dt$

(D) x

22. 设 $\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, $A = I - \alpha\alpha^T$, $B = I + 2\alpha\alpha^T$, 其中 I 是 4 阶单位矩阵, 则 $AB = []$.

(A) I

(B) $-I$

(C) 0

(D) A

23. 已知 A 为三阶方阵, A^* 为其伴随矩阵, 且有 $|A + 2I| = 0$, $|A - 2I| = 0$, $|2A - I| = 0$, 则 $|A^*| = []$.

(A) 4

(B) -4

(C) 2

(D) -2

24. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, α_5 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $r(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_5 - \alpha_4) = []$.

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

25. 设 A 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 则 $r(A^*) = []$.

(A) 0

(B) 1

(C) 4

(D) 以上均不正确