Б.П.吉米多维奇

数学分析习题全解 6

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系

许宁 廖良文 编著

重积分和曲线积分

A·P·G 安徽出版集团

安徽人民出版社

ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

Б. П. 吉米多维奇

Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析习题全解

（六）

南京大学数学系

许 宁 廖良文 编著

杨立信 译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解. 6/(苏)吉米多维奇著. 许宁，廖良文编著. 一合肥：安徽人民出版社，2005

ISBN 978-7-212-02700-1

Ⅰ. 吉… Ⅱ. ①吉…②许…③廖… Ⅲ. 数学分析-高等学校-解题Ⅳ. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113595 号

吉米多维奇数学分析习题全解(六)

(苏)吉米多维奇 著 许 宁 廖良文 编著 杨立信 译

责任编辑 王玉法 **封面设计** 王国亮

出版发行 安徽人民出版社

地　　址 合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场

邮编：230071

发 行 部 0551-3533258 0551-3533292(传真)

经　　销 新华书店

印　　刷 南京新洲印刷有限公司

开　　本 880×1230 1/32 **印张** 14.25 **字数** 340 千

版　　次 2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)

标准书号 ISBN978-7-212-02700-1

定　　价 20.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第 13 版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第八章 多重积分和曲线积分

§1. 二重积分

1. **二重积分的直接计算法** 下数称为由连续函数 $f(x,y)$ 有界封闭二维域 Ω 上的二重积分：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和是对于使 $(x_i,y_j) \in \Omega$ 的所有 i 和 j 来求的.

若用不等式表示域 Ω：

$$a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为 $[a,b]$ 区间的连续函数，则相应的二重积分可以按照下式计算：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_2(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. **二重积分中的变量代换** 若可微分的连续函数

$$x = x(u,v), y = y(u,v).$$

把 Oxy 平面上有界封闭域 Ω 单值唯一地映为 Ouv 平面上域 Ω'，以及雅哥比行列式：

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

可能除了零测度集之外，在域 Ω 内保持符号不变，则下式是正确的：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u,v),y(u,v)) \mid I \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

特别是对于按照公式 $x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$ 变换极坐标 r 和 φ 的情

况，得出：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

【3901】 计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

把它看作是积分和的极限，用直线：

$$x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n-1),$$

把积分域分成若干正方形，并在这些正方形的右顶点选取被积函数值.

解 用

$$x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n-1),$$

将积分域分成若干正方形，则

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n},$$

故积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4},$$

所以 $$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}.$$

【3902】 用直线

$$x = 1+\frac{i}{n}, y = 1+\frac{2j}{n}(i,j = 0,1,\cdots,n),$$

把 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$，域分成若干矩形，写出此域内函数 $f(x,y) = x^2+y^2$ 的积分上和 $\overline{S}$ 与积分下和 $\underline{S}$. 当 $n\to\infty$ 时，上和与下和的极限等于什么？

解 上和为

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n}j+\frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中 $$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

下和为 $$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}=\lim_{n\to\infty}\underline{S}=\frac{40}{3}.$$

【3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域，且正方形的顶点 A_{ij} 位于整数点上，并且在每个正方形离坐标原点最远的顶点上选取被积函数值，近似的计算积分：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

将所得出的结果与积分精确值进行比较.

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3). 故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$\approx\frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}\approx 2.469.$$

即 $$\iint_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}\approx 9.876.$$

下面来计算积分的精确值，利用极坐标来计算.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{24+x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$=2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13.194.$$

将精确值与近似值作比较,显然,误差很大,其原因在于有不少不是正方形的域被忽略,因而产生较大的绝对误 3.318 及较大的相对误差$\dfrac{3.318}{13.194}\approx 25\%$.

【3904】 S 是由直线 $x=0$,$y=0$ 和 $x+y=1$ 围成的三角形,用直线 $x=$ 常数,$y=$ 常数,$x+y=$ 常数把域 S 分成四个相等的三角形,且在这些三角形的重心选取被积函数值. 近似地计算积分$\iint\limits_S\sqrt{x+y}dS$,

解 以 $x=\dfrac{1}{2}$,$y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x+y=\dfrac{1}{2}$ 分域 S 即得四个相等的三角形,它的面积均为

$$\Delta S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

重心为$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\right)$,$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$,$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{6}\right)$及$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3}\right)$,于是,此积分的近似值为 $\iint\limits_S\sqrt{x+y}\mathrm{d}S$

$$=\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right)$$

$$\approx\frac{1}{8}(0.577+0.816+2.091)\approx 0.402.$$

【3905】 把 $S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$ 域分成有穷个直径小于 δ 的可求积的子域 ΔS_i($i=1,2,\cdots,n$).

当 δ 为什么样的值时将保证以下不等式成立:

$$\left|\iint\limits_S\sin(x+y)\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001,$$

其中$(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i,则

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\,\mathrm{d}S - \sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]\,\mathrm{d}S\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|\,\mathrm{d}S$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}\omega_i\,\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta S_i.$$

因域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$的面积为π，故只要$\omega_i<\frac{0.001}{\pi}$即可，而

$$\omega_i = \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|\sin(x'_i+y'_i)-\sin(x_i+y_i)|$$
$$\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}|(x'_i+y'_i)-(x_i+y_i)|$$
$$\leqslant \sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}[|x'_i-x_i|+|y'_i-y_i|]$$
$$\leqslant 2\sup_{\substack{(x_i,y_i)\in\Delta S_i\\(x'_i,y'_i)\in\Delta S_i}}\sqrt{(x'_i-x_i)^2+(y'_i-y_i)^2} = 2\delta_i,$$

故只要取

$$\delta<\frac{1}{2\pi}\times 0.001\approx 1.6\times 10^{-4}.$$

则有 $$\left|\iint_S(\sin(x+y))\,\mathrm{d}S-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<0.001.$$

计算积分(3906—3908)。

【3906—3908】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\,\mathrm{d}y.$

解 $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x^2+x)\Big|_0^1=1.$$

【3907】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}xy^2\,\mathrm{d}y.$

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{3}xy^3\Big|_{x^2}^{x} dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\right) dx = \frac{1}{40}.$$

【3908】 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr.$

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$$= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

【3909】 若R为矩形:$a \leqslant x \leqslant A, b \leqslant y \leqslant B$,并且函数$X(x)$和$Y(y)$在相应区间是连续的,证明不等式:

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 将二重积分化为二次积分即得

$$\iint_R X(x)Y(y)dxdy$$

$$= \int_0^A dx\int_0^B X(x)Y(y)dy = \int_0^A X(x)dx\int_0^B Y(y)dy.$$

【3910】 若 $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$,计算

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

解 $I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy = \int_a^A F'_x(x,y)\Big|_b^B dx$

$$= \int_a^A [F'_x(x,B) - F'_x(x,b)]dx$$

$$= F(x,B)\Big|_a^A - F(x,b)\Big|_a^A$$

$$= F(A,B) - F(a,B) - F(A,b) + F(a,b).$$

【3911】 设 $f(x)$ 为在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的连续函数,证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

其中当且仅当 $f(x)=$ 常数时等号才成立.

提示:研究积分

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y.$$

证 因为

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y.\\&=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&\quad+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

所以 $$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 为常数时,显然上式中等号成立. 反之,设上式中等号成立,则

$$\begin{aligned}0&=\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y\\&=\iint_S [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I,\end{aligned}$$

其中 $$S=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\},$$
$$F(x,y)=[f(x)-f(y)]^2,$$

为 S 中的非负连续函数,若存在 $(x_0,y_0)\in S$ 使得 $F(x_0,y_0)>0$,则存在一个包含 (x_0,y_0) 的小区域 (ΔS),使得当 $(x,y)\in(\Delta S)$ 时

$$F(x,y)>\frac{F(x_0,y_0)}{2},$$

从而 $$I\geqslant\iint_{(\Delta S)}F(x,y)>\frac{F(x_0,y_0)}{2}\Delta S>0,$$

矛盾. 因此,在 S 上,$F(x,y)\equiv 0$,即 $f(x)=$ 常数.

【3912】 下列积分具有怎样的符号:

(1) $$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(2) $$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

解 (1) 因为

$$0\leqslant x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1,$$

所以当 $|x|+|y|<1$ 时,

$$\ln(x^2+y^2)<\ln 1=0.$$

故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}x<0.$$

(2) 显然有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3.$$

其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{x^2+y^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt{x^2-y^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时,

$$0\leqslant\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\leqslant 1.$$

故 $\quad 0<I_1<\pi,$

同样 $\quad I_2>0,$

$$I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi,$$

因此

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3)

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性知,上式第一个积分为零,在第二积分中,被积函数在积分域中为非负且不恒为零的连续函数,因而积分值是正的.因此,原积分是正的.

【3913】 在正方形

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi.$$

求函数 $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$ 的平均值.

解 平均值为

$$I=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}\sin^2 x\cdot\sin^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_0^\pi\sin^2 x\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi\right]^2=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

【3914】 利用中值定理估计积分:

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

解 因为积分域的面积为 200,故由积分中值定理有

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},$$

其中(ξ,η) 是域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 中的一个固定点,显然

$$0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2$$

下面证明

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2,$$

事实上$\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 为有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant 0$ 上的连续函数,且

$$\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant\frac{1}{100}.$$

如果

$$\cos^2\xi+\cos^2\eta=2,$$

则
$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0.$$

而 $$f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102},$$
是非负的连续函数,从而
$$f(x,y)\equiv 0 \qquad (|x|+|y|\leqslant 0),$$
即 $$\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2 \qquad (|x|+|y|\leqslant 10),$$
这显然是不可能的.故
$$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2,$$
同样 $$\cos^2\xi+\cos^2\eta>0.$$
从而有 $$\frac{200}{102}<I<\frac{200}{100},$$
即 $$1.96<I<2.$$

【3915】 求圆
$$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2.$$
上的点到坐标原点的距离的平方的平均值.

解 平均值为
$$I=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{R^2-(y-b)^2}}^{a+\sqrt{R^2-(y-b)^2}}x^2\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{3\pi R^2}\int_{b-R}^{b+R}\left[(a+\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\right.\\
&\qquad\left.-(a-\sqrt{R^2-(y-b)^2})^3\right]\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{3\pi R^2}\left[6a^2\int_{b-R}^{b+R}\sqrt{R^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}y\right.\\
&\qquad\left.+2\int_{b-R}^{b+R}[R^2-(y-b)^2]^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y\right]\\
&=\frac{2a^2}{\pi R^2}\left[\frac{y-b}{2}\sqrt{R^2-(y-b)^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{y-b}{R}\right]\Bigg|_{b-R}^{b+R}
\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{3\pi R^2}\left\{\frac{y-b}{8}[5R^2-2(y-b)^2]\sqrt{R^2-(y-b)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3R^4}{8}\arcsin\frac{y-b}{R}\right\}\Bigg|_{b-R}^{b+R}$$

$$=\frac{2a^2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^2}{2}\pi+\frac{2}{3\pi R^2}\cdot\frac{3R^4}{8}\pi$$

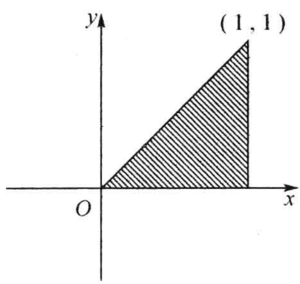
$$=a^2+\frac{R^2}{4}.$$

同理有 $\quad \dfrac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b^2+\dfrac{R^2}{4},$

于是 $\quad I=a^2+b^2+\dfrac{R^2}{2}.$

在二重积分$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$中对所指定的域$\Omega$,按照不同的顺序安置积分的上下限(3916 ~ 3922).

【3916】 Ω 为带有顶点 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,1)$ 的三角形.



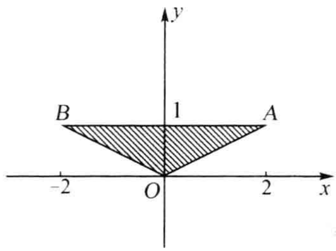
3916 题图

解 为方便起见,以 I 记二重积$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【3917】 Ω 为以 $O(0,0)$,$A(2,1)$,$B(-2,1)$ 为顶点的三角形.

解 如 3917 题图所示



3917 题图

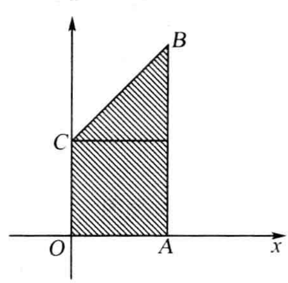
OA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$,

OB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$,

于是
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-2}^0 \mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$$

【3918】 Ω 为以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,2)$,$C(0,1)$ 为顶点的梯形.

解 如 3918 题图所示



3918 题图

BC 的方程为 $y=x+1$,所以
$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y$$