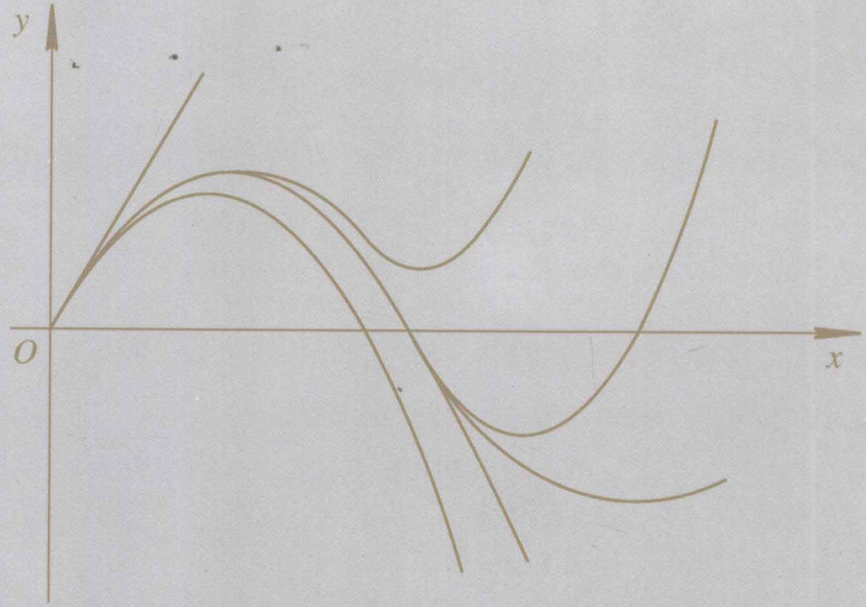
"十二五"国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材

数学分析教程

上册 第3版

常庚哲 史济怀 编著



中国科学技术大学出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

中国科学技术大学精品教材

数学分析教程

Shuxue Fenxi Jiaocheng

上册　第3版

常庚哲　史济怀　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本教材第2版为普通高等教育"十五"国家级规划教材，在国内同类教材中有着非常广泛和积极的影响. 本版是在第2版的基础上经过较大的修改编写而成的，内容得到了必要而合理的调整，逻辑结构更加清晰明了.

本教材分上、下两册. 本书为上册，内容包括实数和数列极限，函数的连续性，函数的导数，Taylor定理，求导的逆运算，函数的积分，积分学的应用，多变量函数的连续性，多变量函数的微分学，以及多项式的插值与逼近初步(附录). 书中配有丰富的练习题，可供学生巩固基础知识；同时也有适量的问题，可供学有余力的学生练习，并且书后附有问题的解答或提示，以供参考.

本书可供综合性大学和理工科院校的数学系作为教材使用，也可作为科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 上册/常庚哲，史济怀编著. —3版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2012.8

(中国科学技术大学精品教材)

"十二五"国家重点图书规划项目

ISBN 978-7-312-03009-3

Ⅰ. 数…　Ⅱ. ①常…　②史…　Ⅲ. 数学分析—高等学校—教材　Ⅳ. O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第164821号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路96号，230026

http://press.ustc.edu.cn

安徽省瑞隆印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本：710 mm×960 mm　1/16　印张：32　插页：2　字数：629千

1998年10月第1版　2012年8月第3版　2012年8月第3次印刷

定价：56.00元

编审委员会

总　　序

2008 年，为庆祝中国科学技术大学建校五十周年，反映建校以来的办学理念和特色，集中展示教材建设的成果，学校决定组织编写出版代表中国科学技术大学教学水平的精品教材系列．在各方的共同努力下，共组织选题 281 种，经过多轮、严格的评审，最后确定 50 种入选精品教材系列．

五十周年校庆精品教材系列于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版，共出书 50 种，在学生、教师、校友以及高校同行中引起了很好的反响，并整体进入国家新闻出版总署的“十一五”国家重点图书出版规划．为继续鼓励教师积极开展教学研究与教学建设，结合自己的教学与科研积累编写高水平的教材，学校决定，将精品教材出版作为常规工作，以《中国科学技术大学精品教材》系列的形式长期出版，并设立专项基金给予支持．国家新闻出版总署也将该精品教材系列继续列入“十二五”国家重点图书出版规划．

1958 年学校成立之时，教员大部分来自中国科学院的各个研究所．作为各个研究所的科研人员，他们到学校后保持了教学的同时又作研究的传统．同时，根据“全院办校，所系结合”的原则，科学院各个研究所在科研第一线工作的杰出科学家也参与学校的教学，为本科生授课，将最新的科研成果融入到教学中．虽然现在外界环境和内在条件都发生了很大变化，但学校以教学为主、教学与科研相结合的方针没有变．正因为坚持了科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合的方针，并形成了优良的传统，才培养出了一批又一批高质量的人才．

学校非常重视基础课和专业基础课教学的传统，也是她特别成功的原因之一．当今社会，科技发展突飞猛进、科技成果日新月异，没有扎实的基础知识，很难在科学技术研究中作出重大贡献．建校之初，华罗庚、吴有训、严济慈等老一辈科学家、教育家就身体力行，亲自为本科生讲授基础课．他们以渊博的学识、精湛的讲课艺术、高尚的师德，带出一批又一批杰出的年轻教员，培养

了一届又一届优秀学生.入选精品教材系列的绝大部分是基础课或专业基础课的教材,其作者大多直接或间接受到过这些老一辈科学家、教育家的教诲和影响,因此在教材中也贯穿着这些先辈的教育教学理念与科学探索精神.

改革开放之初,学校最先选派青年骨干教师赴西方国家交流、学习,他们在带回先进科学技术的同时,也把西方先进的教育理念、教学方法、教学内容等带回到中国科学技术大学,并以极大的热情进行教学实践,使"科学与技术相结合、理论与实践相结合、教学与科研相结合"的方针得到进一步深化,取得了非常好的效果,培养的学生得到全社会的认可.这些教学改革影响深远,直到今天仍然受到学生的欢迎,并辐射到其他高校.在入选的精品教材中,这种理念与尝试也都有充分的体现.

中国科学技术大学自建校以来就形成的又一传统是根据学生的特点,用创新的精神编写教材.进入我校学习的都是基础扎实、学业优秀、求知欲强、勇于探索和追求的学生,针对他们的具体情况编写教材,才能更加有利于培养他们的创新精神.教师们坚持教学与科研的结合,根据自己的科研体会,借鉴目前国外相关专业有关课程的经验,注意理论与实际应用的结合,基础知识与最新发展的结合,课堂教学与课外实践的结合,精心组织材料、认真编写教材,使学生在掌握扎实的理论基础的同时,了解最新的研究方法,掌握实际应用的技术.

入选的这些精品教材,既是教学一线教师长期教学积累的成果,也是学校教学传统的体现,反映了中国科学技术大学的教学理念、教学特色和教学改革成果.希望该精品教材系列的出版,能对我们继续探索科教紧密结合培养拔尖创新人才,进一步提高教育教学质量有所帮助,为高等教育事业作出我们的贡献.

侯建国

中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士

第 3 版前言

本书初版于 1998 年，由江苏教育出版社出版，第 2 版于 2003 年由高等教育出版社出版. 现在这一版则是在第 2 版的基础上经过较大的修改编写而成的. 大致说来，有以下变动：

1. 经过近十年的教学实践，我们发现原书为介绍计算机辅助几何设计(CAGD)而设置的第 5 章(插值与逼近初步)、第 8 章(曲线的表示和逼近)和第 15 章(曲面的表示与逼近)作为数学分析课程的基本内容不是必需的，特别对将来不从事这一专业学习的读者更是如此. 因此，本次改编时把这三章内容删去了. 当然，像曲线的弧长、曲线的切向量和曲面的切平面等基本内容仍会出现在相关的章节中. 考虑到对 CAGD 或相近的专业有兴趣的读者的需要，我们把这三章内容写成一个附录放在书后，供这些读者参考.

2. 原书对积分在几何学中的应用只讲了曲线弧长的计算，其他如计算面积、体积和侧面积等常要用到的知识都没有提及，这次修改增加了与此相关的内容.

3. 为了使学生在大学一年级时能学完微积分的基本知识，改编时把多变量微分学和积分学部分放在无穷级数理论前面来讲，这样做可能会增加学习的难度，但还是值得的.

4. 对练习题和问题作了适当的调整，把较难的练习题改成了问题，把较易的问题改成了练习题. 另外还新增了一些练习题和问题.

除了上面这些明显的变动外，还改正了不少印刷错误. 对有些问题的处理也作了改进. 这里就不再一一叙述了.

必须重申，书中有些问题的确有相当的难度，这是为学有余力的读者进一步提高自己的能力而设置的，因而读者不必每题都做，更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

在过去几年里，一些学生、教师和其他读者都曾对本书的前两版提出过不

少有益的建议，特别是北京航空航天大学数学与系统科学学院的邢家省副教授的一些建议，对我们的修改很有帮助.借此机会对邢家省副教授及其他读者表示我们真诚的谢意.

常庚哲　史济怀

2012 年 4 月于中国科学技术大学

第 2 版前言

“数学分析”究竟应该包括哪些内容，从西方和东欧各国名为《数学分析》的书籍来看，一直没有十分明确的定义，但是在我国，它作为大学数学系的一门课程的名称，通常包含一元和多元微分学和积分学，以及与之相关的内容．从它的地位和作用，从所占用的学时数来看，说它是数学系最重要的基础课，是当之无愧的．

微积分已有三百多年的历史，经过跨越好几个世纪的数学巨匠们的精雕细琢，千锤百炼，已经形成了一个完整的、精密的庞大知识宝库．随着时代的进步和科学技术的发展，传统数学分析教材的内容显得比较陈旧，只有极少数的几处（例如 Bernstein 多项式）涉及 20 世纪初的发现．从 21 世纪的今天来看，这种反差更加强烈，改革数学分析教材的必要性日益显露出来了．在有些新出版的数学分析教科书中，引入了拓扑空间、微分流形，这是朝“现代化”方向走的一种试验．我们的想法则是在保持原有理论水平的基础上，着重于加强数学分析同现代应用数学的其他分支学科的联系．这样做既不会加重学生的负担，又不会挤占后续课程的时间．我们认为，任何积极的改革，都不应该触动其中最基础的理论部分．回顾 20 世纪 50 年代和 70 年代以抛弃这些基本理论为特色的教学改革都未能坚持下来的历史，我们会变得聪明起来，不再干那种蠢事．

何琛、史济怀、徐森林三位教授所著的《数学分析》（共三册）一书，由高等教育出版社于 1985 年公开出版．其实，该书早在 1985 年以前，就以讲义的形式作为中国科学技术大学数学系、少年班和教改试点班的教材．至今，这套教材对中国科学技术大学的数学教学起过重要的作用，在全国同类教材中也产生了积极的影响．

本书正是以上述《数学分析》一书为基础写成的．这中间融合了二十多年来用它作为教科书的教学经验，同时也参考了国内外同类书籍中的许多名著．在我们看来，本教程有如下特色：

1. 从基本理论上看,本教程不但包含了上述《数学分析》的全部内容,而且在许多地方添加了新的材料.其中值得一提的是,在单变量的积分理论中,我们证明了"Riemann 可积的充分必要条件是被积函数在积分区间上的不连续点的集合是一零测集".通常这一定理是"实变数函数"课程中的内容,但是我们用了完全属于数学分析的技巧加以处理.有了这一定理,就可以删去关于可积性的许多讨论,从总体上来看反而缩短了篇幅.其次,增加了二元凸函数的理论和应用;采用了 Peter Lax 对圆的等周性质的优美证明;收入了能充满整个正方形的 Schoenberg 的连续曲线.至于更加系统的知识的补充,将在以下作详细介绍.

2. 在第 2 章"函数的连续性"的最后,我们介绍了"混沌现象",叙述并证明了李天岩和 Yorke(1975)的"周期 3 蕴涵混沌"的著名定理.虽然对混沌的研究是当今数学的一个热门分支,但是在它的生长点上,则完全是"微积分的",更具体地说,只不过是连续函数在闭区间上的性质的巧妙应用.过去,人们热衷于找出函数迭代的表达式,欢喜收敛的迭代.在这里我们告诉读者,研究不收敛的迭代会碰到一些非常奇特的现象,从而生长出新的理论.

3. 在第 8 章"曲线的表示和逼近"中,我们介绍了计算机辅助几何设计(computer aided geometric design,简写为 CAGD)中广泛使用的 Bézier 曲线.它的数学基础是经典的 Bernstein 多项式(1912 年).过去,在很多数学分析书中也介绍过 Bernstein 多项式,主要是用来作为用多项式一致逼近有限闭区间上的连续函数的一个构造性的证明.在逼近论中,研究 Bernstein 多项式的文献浩如烟海,但由于它的收敛速度十分缓慢,直到 20 世纪 60 年代初期,逼近论的专家们还在为它没有任何的实际应用而悲叹.正是在那个年代,由法国的工程师 Bézier 创造的、后来被人们称为 Bézier 曲线的曲线被成功地运用到汽车设计之中,已成了当今 CAGD 和 CG(计算机图形学)的理论基础.人们发现,所谓 Bézier 曲线(曲面)只不过是向量值形式的一元(或二元)Bernstein 多项式,而 Bézier 的成功之点乃是他充分地利用了 Bernstein 多项式的"保形性质"——这恰好是传统的数学分析教材中不曾谈到的.

第 10 章介绍了 Bernstein 多项式的一致逼近性质,这是因为它在理论上确实有着重要的地位;同时第 5 章还研究了它的保形性质,而作为曲线理论的一部分内容,第 8 章讲述了 Bézier 曲线.这是数学科学同当代 CAGD 与 CG 技术的一个接口.根据我们的经验,在课堂上讲述这一部分内容时气氛最为活跃,最能激起学生的热情和兴趣.他们可以在电脑上根据 Bézier 的方法随心所欲地设计自己的曲线,亲身感受到数学理论的威力.

4. 在空间解析几何和过去的多变量函数理论中，学生都要学习曲面. 但到后来，到底还有多少曲面能留在头脑之中？无非是椭球面、抛物面、马鞍面……在本书第 15 章中，我们介绍了 Bernstein-Bézier 曲面，它是当代 CAGD 和 CG 生成曲面的重要工具. 在 Bernstein 多项式诞生半个世纪之后，是工程师而不是职业数学家为它找到了实际的应用；而工程师们提出的“控制多边形”这种非常生动的几何概念，又被数学家发展成为研究多元逼近理论的有力方法. 数学理论的深入和工程技术的发展相互促进和推动的例子屡见不鲜，Bernstein 多项式和 CAGD、CG 之间的关系，就是这方面的一个有说服力的例证.

5. 在本书的第 10 章中，当我们用 van der Waerden 方法构造处处连续而处处不可微的函数之后，介绍了“分形几何”的大意. 传统的数学分析只是把这个例子当成一个“反例”，当作怪物. 而我们在这里试图告诉读者：在自然界和社会的现象中，到处存在着这种不规则、不光滑的东西.

6. 混沌理论、CAGD 和 CG 技术、分形几何等都是当代应用数学的十分活跃的分支，都已形成了各自的完整体系. 对这些材料我们是如何选择的呢？我们的原则是：

(1) 只在这些学科的“生长点”上进行讨论，“点到为止”；

(2) 不作一般的空泛的叙述和议论，务必让学生从中学到实质性的数学思想和技巧；

(3) 所涉及的数学必须是“纯微积分的”，不再牵扯任何其他高深知识；

(4) 涉及的数学推导必须是简洁和优美的.

为做到以上几条，特别是后三条，我们必须去搜寻那些初等和简洁的证明. 其中有一些经过了我们的再次加工. 例如，Bernstein 算子“磨光性质”的 Kelisky-Rivlin 定理(*Pacific J. of Math.*, 1967)，原先的证明用到了矩阵的特征值和特征向量，而我们的初等证明，只有短短的几行.

7. 对经典的定理和理论，我们也作了一些新的处理. 利用 CAGD 中的“混合函数”(blending functions)方法，把微分学的 Lagrange 中值定理、Cauchy 定理一直到 Taylor 公式的证明，统一到一种风格之下，变得较为简洁. 在证明 van der Waerden 函数处处连续而处处不可导的时候，我们采用几何方法，这种方法既是非常严格的，同时又免去了传统证明中一系列烦琐的区间表示.

8. 精选了例题和习题. 我们更换了不少例题，对保留下来的例题，也尽量寻找比较简单的解法. 凡是一个例题也能用初等方法来解决的，同时也列出了初等的解法，以引导和鼓励读者尽可能用最少的知识来解决问题. 特别应当提到的是：我们补充了大量的习题，其中一部分有一定的难度. 我们把习题分作

两大类:练习题和问题,前者是基本的定理和理论的直接应用,一般不需要太多的技巧,而后者则有相当的挑战性.也许我们认为较难的题目,一些聪明的学生,可能会给出很简单的解法.有些习题同时也是正文的扩充,是本书的一个有机组成部分.

9. 在写作风格上,我们很不赞成一些数学书中的所谓“标准写法”,那些语言像是一封电码,没有任何感情色彩.我们力图把读者当成自己的朋友,平等对话,娓娓谈心.

本书与过去已有的同类教材相比有着较大的差别,内容有不少更新,篇幅也随之加大.究竟该讲授些什么,不讲授些什么,一个有经验的教师完全可以针对受教育者的情况和允许的教学课时数作出取舍.文字可以多写,讲课可以少讲,给学生留有自己阅读的余地.

习题的分量是过多了一些,这也要请任课的老师们根据学生的情况适当地选择.初学者应当在教师的指导下做练习,不必题题都做;更不要因为有几个题目做不出来而失去信心.

本书是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动编写而成的.经过几年的教学实践,我们发现原书第二册中的隐映射定理、逆映射定理对初学者较难,这次修订把这些内容和较易接受的无穷级数和反常积分交换了次序,使学生在最后一学期才遇到这些较难的概念.一些定理的证明简化了,例如关于可积性的Lebesgue定理,现在的证明比原书更简单了.原书中的“问题”使不少读者望而却步,这次修订删去了一些过于困难的题目,同时增加了一个附录“问题的解答或提示”,目的是使有志于做一些难题的读者知道从何处入手.

在写作本书的时候,我们参考了国内外与数学分析相关的许多优秀著作,在此恕不一一列名致谢.

在写作本书的时候,得到了中国科学技术大学主管教学的负责同志和数学系负责同志的热情鼓励和大力支持,作者们在此谨对他们表示诚挚的感谢.有着数学分析课程多年辅导经验的王建伟同志,对本书的写作提出了许多宝贵的意见,并为本书增添了许多习题,使本书增色不少.

囿于作者们的水平和经验,缺点和错误在所难免.欢迎广大读者对本书多提意见.

常庚哲　史济怀

2002年9月于中国科学技术大学

目　次

第 1 章　实数和数列极限

粗略地说，数学由三个大的分支——几何学、代数学和分析学组成.它们有着各自的研究对象、内容和方法，同时又互相依赖和渗透.分析学是从“微积分”开始的.虽然在古代已经产生了微积分的朴素的思想，但是作为一门学科，微积分则建立于 17 世纪下半叶.在这一方面，英国、法国和德国的数学家们作出了杰出的贡献.创立微积分的大师们着眼于发展强有力的方法，他们虽然解决了许多过去被认为是无法攻克的难题，却未能为自己的方法奠定无懈可击的理论基础.这就引起了长达一个多世纪的混乱和争论，直到 19 世纪初才玉宇澄清，一切混乱、误解的阴霾才为之一扫.这主要是由于有了严格的极限理论，以及这一理论所依赖的“实数体系的连续性”得以确定.

本书书名为《数学分析教程》，正是研究微积分学的原理和应用，因此我们得从实数理论和数列的极限理论谈起.

1.1　实　　数

在中学里，大家已经学习过有理数，任何有理数 r 都可以表示为两个整数之商：

$$r = \frac{p}{q},$$

式中 p, q 都是整数，且 $q \neq 0$.大家还知道：有理数经过加、减、乘、除(除数不能是 0)四则运算之后仍为有理数.据此，称全体有理数组成一个**数域**.就是说，仅仅通过四则运算，我们不可能从有理数得到别的东西.