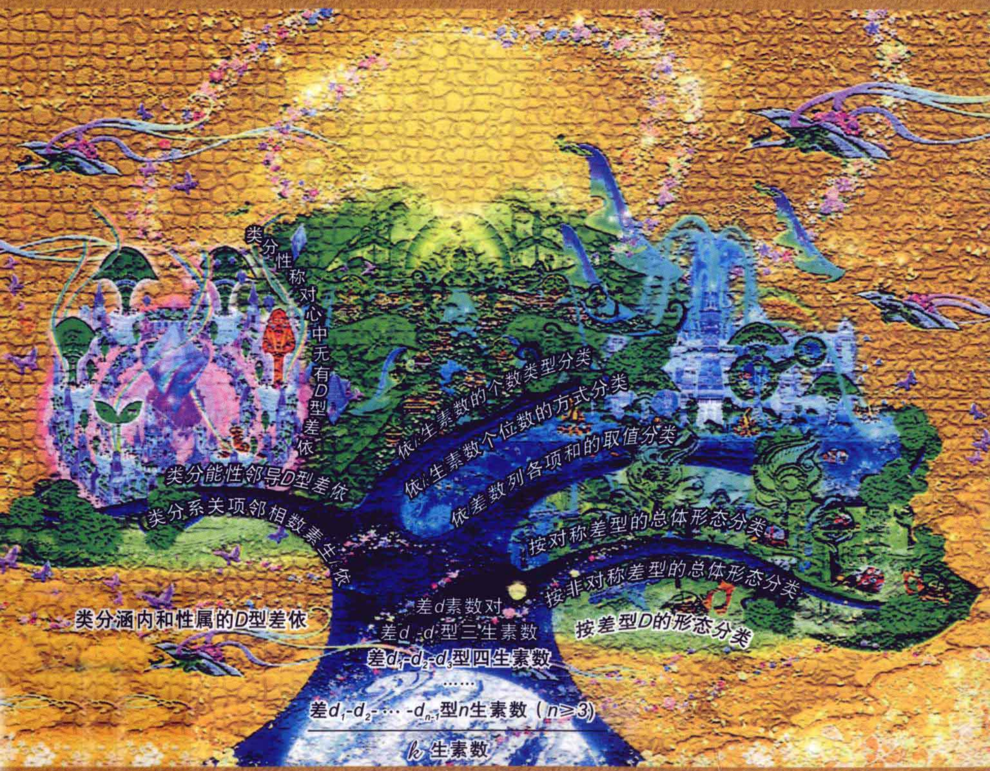
# $k$生素数

## 分类及相邻$k$生素数

蔡书军 著




西北工业大学出版社

# $k$ 生素数分类及相邻 $k$ 生素数

蔡书军 著

西北工業大學出版社

**【内容简介】** 本书给出了 $k$ 生素数多视角、多层次科学合理的分类，着重介绍了 $k$ 生素数个位数分类法、$k$ 生素数个位方式数公式计算法；详尽阐述了绝对相邻 $k$ 生素数与随机相邻 $k$ 生素数的判定方法. 为此，提出了一些新概念、新方法和新观点，既是作者钻研探讨结果的总结，又是继续深入研讨的平台和出发点 最后举例说明了直接依次不漏搜寻相邻 $k$ 生素数唯一普适工具素数间隙表的应用 书中编有 30 万以内素数间隙表，以供读者查阅备用

本书视角新颖，方法独特，说理清晰，举例详实，深入浅出，通俗易懂，易学易用，融学术探讨性与数学科普性、逻辑严密性与趣味审美性于一体，适合大、中学师生和数学工作者、爱好者阅读

**图书在版编目(CIP)数据**

$k$ 生素数分类及相邻 $k$ 生素数/蔡书军著 . —西安：西北工业大学出版社，2012. 6

ISBN 978-7-5612-3355-9

Ⅰ. $k$⋯ Ⅱ. ①蔡⋯ Ⅲ. ①素数—研究 Ⅳ. ①O156. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 129410 号

**出版发行**：西北工业大学出版社
**通信地址**：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072
**电 话**：(029)88493844 88491757
**网 址**：www. nwpup. com
**印 刷 者**：陕西兴平报社印刷厂
**开 本**：850 mm×1 168 mm 1/32
**印 张** 16. 375 插页.3
**字 数**：427 千字
**版 次**：2012 年 6 月第 1 版 2012 年 6 月第 1 次印刷
**定 价**：45 00 元

研究必须充分地占有材料,分析它的各种发展形式,探寻这些形式的内在联系.只有这项工作完成以后,现实的运动才能适当地叙述出来.

——马克思

只要自然科学在思维着,它的发展形式就是假说.

——恩格斯

我们数论知识的积累,不仅依靠已经证明了的理论,而且也依靠那些未知的猜想.

——谢尔宾斯基

千古数学一大猜!

——华罗庚

在数学的领域中,提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要。

——康托

新的数学方法和概念,常常比解决数学问题本身更重要.

——华罗庚

数学,如果正确地看它,不但拥有真理,而且也具有至高的美.

——罗素

秩序和对称是美的重要因素,而这两者都能在数学里找到.

——亚里士多德

哪里有数，哪里就有美。

——普洛克拉斯

数学本身，也有无穷的美妙.认为数学枯燥，没有艺术，这看法是不正确的，就像站在花园外面，说花园枯燥无味一样.只要踏进了大门，你们随时会发现数学有许许多多趣味的东西。

——华罗庚

数学世界充满了精神的创造，只要深入其中就会发现奥妙无穷.

——谷超豪

……数学能够集中、加速和强化人们的注意力，能够给人发明创造的精细与谨慎的谦虚精神，能够激发人们追求真理的勇气和自信心……数学比起任何其他学科来，更能使学生得到充实和增添知识的光辉，更能锻炼和发挥学生们探索事理的独立工作能力。

——狄尔曼

数学的贡献在于对整个科学技术（尤其是高新科技）水平的推进与提高，对科技人才的培养与滋润，对经济建设的繁荣，对全体人民的科学思维与文化素质的哺育，这四方面的作用是极为巨大的，也是其他学科所不能全面比拟的。

——王梓坤

# 前　　言

朋友，每当仰望璀璨的星空，你也许会发出屈原似的天问……而笔者由于长期从事和数字打交道的工作，难免偶发数字之问。在天上地下、自然万物与数理之中，充满了人类神往的奥秘和无穷的真理，吸引着无数的拓荒者在问题的激发下去寻觅、去实践、去探求，去发现、去思考、去创造……

马克思有一句名言："自由自觉的活动恰恰就是人类的特征."温家宝总理在2009年首都科技界大会上的讲话中指出："我们全部科技政策的着眼点，就是要让创新火花竞相迸发，创新思想不断涌现，创新成果有效转化.为此，要创造良好的环境，让科技工作者更加自由地讨论，更加专心地研究，更加自主地探索."本书中涉及的许多问题，都是在业余的自由探讨中自然提出和摸索解决的，都是反复实践、反复认识的结果，因为一切真知都来源于实践，来源于实践中的探索与发现.本书的出版，也是为了抛砖引玉，以便与读者朋友一起，"更加自由地讨论，更加专心地研究，更加自主地探索".

当然，最花功夫、最费时间的是搜寻四生以上的包括珍稀奇特之例在内的许许多多从未露面的 $k$ 生素数.有时如同大海捞针；有时就像寻找地外生命；有时束手无策，有时一筹莫展；有时"众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处".因此，书中给出的示例，既是说明所得方法、结论的佐证，也是方法、结论产生的基础和前提，是理论的载体和支撑，当然也是早期苦苦寻觅、艰难探索的部分成果.但是，如果没有这个成果作基础，也就没有后来理解的扩充和深化，更不会产生认识的升华和飞跃，自然也无书中方法的提炼和结论的凝结.初次接触 $k$ 生素数的读者朋友，如果觉得数据

枯燥乏味，阅读时可以跳过示例，待以后有兴趣再回头品味. 因为兴趣并非一次接触即可产生、加强或巩固.

$k$ 生素数是无穷无尽的，人们目前所看到的仅仅是冰山一角，书中示例所撷取的 $k$ 生素数也只是“沧海一粟”. 包括 $k$ 生素数的素数论学科博大精深，还有无穷的奥秘等待人们去探索！“科学的事业永无止境. 这是科学的永恒魅力所在，也是我们砥砺自身不断求索的动力所在. 这样的事业，值得我们全力以赴.”就让我们以著名科学家李政道的这句话共勉吧.

另外，书中的定义、定理、引理、推论、猜测、图和式子都是各章分别编号，即一章一编号. 但是以字母标号的概括式、字母判别矩阵等则不分章节，全书统一编号、贯通叙述和引用.

本书的顺利出版，受惠于西北工业大学出版社的大力支持和帮助，对他们提出的技术方面的宝贵意见和建议，我们进行了愉快而富有成效的沟通。如果没有他们付出的辛勤劳动，本书不会如此之快与读者见面，在此表示衷心的感谢！同时，要特别感谢陕西省交通运输厅作家协会主席丁晨、商洛市交通运输局局长周三启、副局长黄恒林等党政领导和我的朋友、同事，本书的出版得到他们热情的关心、大力支持和帮助。当然还要特别感谢我的妻子和家人——多年来，今已八十有余的老父亲一直在鼓励、支持着自己；妻子悉心照料我年迈有病的双亲，承担了绝大部分家务劳作。要没有亲人的持久鼓励、支持、分担和帮助，本书的业余撰写及出版也都是不可企望的。

在书中笔者首次提出的新概念、新方法和新观点以及给出的相关基础数据、资料可供研究和应用，不当之处以及因受学识所限难免之错漏，恳请各位专家、学者和读者朋友批评指正.

著　者

2011 年 12 月

# 常用符号表

| | |
|---|---|
| $\mathbf{N}$ | 自然数集;非负整数集. $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}$ |
| $\mathbf{N}^{+}$ | 正整数集:$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,3,\cdots,n,n+1,\cdots\}$ |
| $x \in A$ | $x$ 属于$A$;$x$ 是集合$A$ 的一个元素 |
| $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ | 诸元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集合 |
| $A \cup B$ | $A$ 与 $B$ 的并集 |
| $A \cap B$ | $A$ 与 $B$ 的交集 |
| $\varnothing$ | 空集 |
| $A \subset B$ | $A$ 真包含于$B$;$A$ 是 $B$ 的真子集 |
| $\mathbf{Q}_j$ | $j(2 \leqslant j \in \mathbf{N}^{+})$ 项递增奇数列. $\mathbf{Q}_j=\{q_1,q_2,\cdots,q_j\}$ |
| $p,p_1,p_2,\cdots,r_1,r_2,\cdots$ | 素数 |
| $p_n$ | 第 $n$ 个素数. 其中 $p_1=2,p_2=3,p_3=5,\cdots$ |
| $P_n$ | 前 $n$ 个素数的连乘积. $P_n=p_1 p_2 \cdots p_n$ |
| $\infty$ | 无穷 |
| $(a_1,a_2)$ | $a_1,a_2$ 的最大公因数 |
| $a \mid b$ | $a$ 整除 $b$;$b$ 含有因数 $a$ |
| $a \nmid b$ | $a$ 不能整除 $b$;$b$ 不含因数 $a$ |
| $p_n \parallel b$ | $p_n \mid b$ 但 $p_{n+1} \nmid b$ |
| $P_n \parallel b$ | $P_n \mid b$ 但 $p_{n+1} \nmid b$ |
| $a \equiv b \pmod{m}$ | $a$ 同余于 $b$ 模 $m$ |
| $a \not\equiv b \pmod{m}$ | $a$ 不同余于 $b$ 模 $m$ |

| | |
|---|---|
| $\pi(x)$ | 不超过正整数 $x$ 的素数个数 |
| $\varphi(n)$ | 欧拉(Euler)函数，即序列 $1,2,\cdots,n$ 中与 $n$ 互素的数的个数 |
| $d$ | 正偶数. $d=2,4,6,\cdots,2n,2(n+1),\cdots$ |
| $R$ | 差 $d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$ 型 $k$ 生素数. $R=\{r_1,r_2,\cdots,r_k\}$ |
| $D$ | $k$ 生素数 $R$ 的差数列，又称差型. $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_{k-1}\}$，亦详写为“$d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$”，简写为“$D$” |
| $\bar{R}$ | 差 $d_{k-1}-d_{k-2}-\cdots-d_2-d_1$ 型 $k$ 生素数. $\bar{R}=\{\bar{r}_1,\bar{r}_2,\cdots,\bar{r}_k\}$ |
| $\bar{D}$ | $k$ 生素数 $\bar{R}$ 的差数列，是差数列 $D$ 的逆序排列数列，与 $D$ 互为相反差型 |
| $I^D$(或 $I^{\bar{D}}$) | 客观存在的分布于自然数列中的差 $D$ 或差 $\bar{D}$ 型 $k$ 生素数的个数. $I^D=I^{d_1-d_2-\ \ -d_{k-1}}\geqslant 1$, $I^D=I^{d_{k-1}-d_{k-2}-\ \ -d_2-d_1}\geqslant 1$ |
| $D'$ | 零函数差型. 即差型是 $D'$ 的 $k$ 生素数不存在，或者说 $I^D=0$ |
| $l\bmod m$ | 包含 $l$ 的模 $m$ 的非负有序同余类：$l\bmod m=\{qm+l:q=0,1,2,\cdots\}$ |
| $R^{\gamma}_{p_t}$ | 分布于 $\gamma\bmod p_n$ 中的差 $D$ 型 $k$ 生素数 $R$ 的元素构成的良序集合 |
| $\pi(x)^d$ | 不超过 $x$ 的差 $d$ 素数对 $\{p,p+d\}$ 的个数($p+d\leqslant x$) |
| $\pi(x)^d_{c_1\ c_2}$ | 个位数是 $c_1,c_2(c_\iota=1,3,7,9;\iota=1,2)$ 的不超过 $x$ 的差 $d$ 素数对 $\{p,p+d\}$ 的个数($p+d\leqslant x$) |

| | |
|---|---|
| $\pi(x)^{d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}}$ | 不超过 $x$ 的差 $d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$ 型 $k$ 生素数的个数. 其中第 $k$ 项素数 $r_k=r_1+(d_1+d_2+\cdots+d_{k-1})\leqslant x$ |
| $\pi(x)^{d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}}_{c_1,c_2,\cdots,c_k}$ | 个位数是 $c_1,c_2,\cdots,c_k(k\geqslant 3,c_i=1,3,7,9;1\leqslant i\leqslant k)$ 的不超过 $x$ 的差 $d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$ 型 $k$ 生素数的个数. 其中第 $k$ 项素数 $r_k=r_1+(d_1+d_2+\cdots+d_{k-1})\leqslant x$ |
| $\langle b\rangle$ | 正整数 $b$ 的个位数 |
| $F^D$(或 $F^{\overline{D}}$) | 差 $D$(或差 $\overline{D}$) 型 $k$ 生素数个位数分类的方式数,简称差 $D$(或差 $\overline{D}$) 型 $k$ 生素数个位方式数. $F^D=F^{d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}}$, $F^D=F^{d_{k-1}-d_{k-2}-\cdots-d_2-d_1}$ |
| $F^d$ | 差 $d$ 素数对个位数分类的方式数,简称差 $d$ 素数对个位方式数 |
| $S$ | 三角数阵 |
| $S^{(y)}$ | 三角数阵($y$) |
| $S^{(y)}_{H_i}$(或 $S^{(y)}_{L_i}$) | 三角数阵($y$) 第 $i$ 行(或第 $i$ 列) |
| $S^{(y)z}_{H_i}$(或 $S^{(y)z}_{L_i}$) | 三角数阵($y$) 第 $i$ 行(或第 $i$ 列) 第 $z$ 项 |
| $D_{H_i}$(或 $D_{L_i}$) | 三角数阵($D$) 第 $i$ 行(或第 $i$ 列) 中至少有一项或无一项 5 倍数的取值. $D_{H_i}$(或 $D_{L_i}$)$=1$ 或 0 |
| $\overline{D}_{H_i}$(或 $\overline{D}_{L_i}$) | 三角数阵($\overline{D}$) 第 $i$ 行(或第 $i$ 列) 中至少有一项或无一项 5 倍数的取值. $\overline{D}_{H_i}$(或 $\overline{D}_{L_i}$)$=1$ 或 0 |
| $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k-1} D_{H_i}$(或 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k-1} D_{L_i}$) | 三角数阵($D$) 各行(或各列)$D_{H_i}$(或 $D_{L_i}$)值为 1 的个数 |
| $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k-1} \overline{D}_{H_i}$(或 $\sum\limits_{k\leqslant i\leqslant k-1} \overline{D}_{L_i}$) | 三角数阵($\overline{D}$) 各行(或各列)$\overline{D}_{H_i}$(或 $\overline{D}_{L_i}$) |

| | |
|---|---|
| | 值为 1 的个数 |
| $L(M)$ | $L$ 或 $M$. 即对两种有所关联且形式相似的不同事物 $L$ 和 $M$ 作并列平行的统一叙述 |
| $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$ | 和式: $x_1+x_2+\cdots+x_n$ |
| $\{$ | 包含;包括;划分为(图中专用符号) |
| $\}$(或$]$或$\rangle$) | 包含于;归纳概括为(图中专用符号) |
| $\leftrightarrow$ | 等价(图中专用符号) |

# 目　录

# 下篇 相邻 $k$ 生素数

# 绪　　论

## 一、什么是 $k$ 生素数

$k$ 生素数是素数王国中无边无际、神奇迷人的天然大花园，素数的各种绚丽花朵在这漫山遍野竞相开放，如春潮滚滚，似朝霞灿烂……$k$ 生素数用它那锦簇花团、婀娜多姿自然构筑的奇妙图案和诗意盎然的景观，彰显出素数神奇的内涵之美，但却有意无意地把素数的玄机隐藏和把其神秘展现. 千百年来，素数及其 $k$ 生素数的魅力让不计其数的人为其神醉情驰，探微索隐、破解悬谜，劈波斩浪、前仆后继……

众所周知，如果大于 1 的整数 $a$ 只能被 1 和 $a$ 整除，则 $a$ 是素数，否则称 $a$ 是合数. 如同兵藏于民，$k$ 生素数产生、融化和隐藏在素数广阔无边的汪洋大海之中.

$k(2 \leqslant k \in \mathbf{N}^+)$ 项递增奇素数

$$R=\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$$

称为 $k$ 生素数. 设 $R$ 的差数列为

$$D=\{d_1, d_2, \cdots, d_{k-1}\}$$

即 $d_1=r_2-r_1, d_2=r_3-r_2, \cdots, d_{k-1}=r_k-r_{k-1}$，则称 $k$ 生素数 $R$ 是一个差 $d_1-d_2-\cdots-d_{k-1}$ 型 $k$ 生素数，简称 $R$ 是一个差 $D$ 型 $k$ 生素数. 特别地

(1) 如果 $k=2, d_1=d$，则称二生素数 $r_1, r_2$ 是一个差 $d$ 素数对. 其中差 2 素数对又称孪生素数；如果 $k \geqslant 3$，则又称 $R$ 是一个差 $D$ 型 $k$ 项素数列.

(2) 如果 $k \geqslant 3$ 且 $d_1=d_2=\cdots=d_{k-1}=d$，则称 $k$ 生素数 $R$ 是一个 $k$ 项等差 $d$ 素数列.

(3) 如果 $r_1=p_s, r_2=p_{s+1}, \cdots, r_k=p_{s+k-1}$，则称 $k$ 生素数 $R$ 是